Ordre N° :
Serial N °:

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE CHAHID HAMMA LAKHDAR
D ' EL OUED
FACULTE DES LA SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique
Filière: Mathématiques
Option: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Sur un probléme dynamique d'élasticité lineaire non-isotherme: Etude asymptotique et théorique

Présenté par :

- **Imane Kina**
- **Salma Benbouzid**

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Dr.	Rehouma Abdelhamid	MCB	Univ.El-Oued	Président
Dr.	Letoufa Yassine	MCA	Univ.El-Oued	Encadreur
Pr.	Adel Aissaoui	**MCA**	Univ.El-Oued	Examinateur

Promotion : 2022/2023

Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail:

À le pére cher.

À la mére chère.

À les frères et soeurs.

À toute la famille.

À tous le samis.

À toute personn la plus chère à mon coeur

Remerciements

Avant toute chose,nous tenons á remercier **Allah** le tout puisant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Je tiens également á remercier **mes parents** pour leur soutien dans tous les aspects tout au long de ia réalisation de ce memoire et tout long des annéeé de majeure

Nous remrrçions notre professeur encadreur **Dr.Letoufa Yassine** qui nous aide beaucoup pour finier ce mémoire .

Je remercie **Mohamed Moumen Bakoush** qui nous a aide avce ce memoire

Nous remeréions de professeur fraçais **Kina Maroua** et nous amies:Haifa ,Amira, Siham, Imane...A.Karim

Nos sentiments de reconnaissance Que tous ceux qui néont pas été mentionnés et qui ont contribué á la réalisation,de prés ou de loin,de ce travail vous nos remerciements.

Table des matières

Introduction générale

Ce mémoire consiste á l'étude du comportement des fuides dans des domaines minces, c'est-á-dire des domaines physiques où la "hauteur" est beaucoup plus petite que la "longueur". Les principales applications fondamentale (typiquement l'étude d'un lubrifiant entre deux parois rigides très proches en mouvement relatif comme par exemple dans un mécanisme de roulement à billes), et l'application aux écoulements de faible épaisseur entre deux surfaces solides, comme il est justifié dans la référence [9] par des techniques asymptotiques ainsi l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds. L'équation de Reynolds a été utilisée pendant une longue période pour décrire le comportement d'un écoulement visqueux entre deux surfaces proches en mouvement relatif (voir [23,24] pour des références historiques), elle peut être écrite comme

$$div(h^3\nabla p) = div(sh),$$

où h est l'épaisseur de l'écoulement et s un vecteur donné représentant le cisaillement de l'une des deux surfaces.

Celle-ci permet d'obtenir la pression hydrodynamique, indépendante de la variable décrivant. l'épaisseur de l'écoulement, ce qui nous permet de déterminer la distribution de pression dans un espace mince rempli de fluide entre deux surfaces. Le contact liquide-solide peut être modélisé par la loi de frottement de Coulomb ou de Treska. L'étude du phénomène de lubrification par des fluides Newtoniens avec glissement a été obtenue en [15] lorsque le glissement est donné par la loi de frottement de Coulomb, et par F.Saidi[4] lorsqu'on prend aussi en considération l'effet de température. Dilmi dans [16] a étudié l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement du type Tresca.

le but ce de travail, n'est pas seulement de donner l'existence et l'unicité de ce problème, mais aussi d'obtenir rigoureusement l'équation décrivant ces phénomènes dans un flux du film mince par le biais d'une analyse asymptotique dans lequel le petit paramètre est la largeur de l'écart, en suivant les mêmes idées que dans [3, 9]. Le point de départ est l'équation des milieux continus avec les conditions aux limites de Tresca et ainsi de tomber dans le champ d'application du travail de A. Saad allah [1]. La technique asymptotique est basée sur les étapes :

1. i) –Le changement d'échelle, par rapport à l'épaisseur, ce qui nous permet d'obtenir des estimations dans un domaine "fixe".

2. ii) –Les résultats de convergence faible et problème limite. Dans ce mémoire on s'intéresse aussi à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité linéaire isotherme et non-isotherme dans un domaine borné en dimension trois avec les conditions de frottement de Tresca.

Le premier chapitre, est consacré tout d'a bord au rappel des notions principales de la théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle et les ecpasec de sopelv nécessaires et des résultats utilisés tout au long de ce travail. Ensuite, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent l'évolution isotherme (ou non-isotherme) d'un corps homogène élastique en présence de conditions non linéaires du type Tresca sur une partie de la frontière du domaine.

Le deuxième chapitre, on prouve en premier le résultat ˇdexistence et ˇdunicitéˇdune solution faible, des équations dynamiques pour l'élasticité linéaire dans un domaine borné á trois dimensions avec des conditions de frottement sur une partie de la frontière et Dirichlet surˇlautre partie. Le domaine Ω est donné par

$$\Omega_\varepsilon = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

La frontière de Ω_ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \cup \omega$,où w un domaine borné de R^2 ˇdéquation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine et $h \ \varepsilon \ c^1 \ (R)$,Γ_1^ε est la frontière supérieure du domaine etΓ_1^ε L est la frontière latérale.

Nous étudions l'analyse asymptotique quand ε tend vers zéro du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} = 2\mu Div\ (D\,(u^\varepsilon)\,) + \lambda divu^\varepsilon + f^{\ \varepsilon} & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon \times \,]0,T[\,, \\ \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}\,(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}\,(u^\varepsilon)\,\delta_{ij} & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times \,]0,T[\,, \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \ \Gamma_L^\varepsilon \times \,]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.\nu = 0 & \text{sur } \ \omega \times \,]0,T[\,, \\ \left. \begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists \beta > 0 \ tel\ que\ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array} \right\} & \text{sur } \omega \times \,]0,T[\,, \\ u^\varepsilon\,(0) = u_0 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,(0) = u_1. \end{cases}$$

où f^ε, g, u et k^ε sont des données du problème. on montre d'abord que pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème admet une solution unique faible. Ensuite, on étudie l'analyse asymptotique du problème en faisant un changement d'échelle, pour ramener l'étude sur un domaine indépendant de ", sur lequel nous définissons des nouveaux inconnues. Nous obtenons des estimations à priori sur la solution indépendamment de " en utilisant les inégalités de Korn, Poincaré et Young. Grâce à ces estimations, on obtient un théorème de convergence, qui nous a permis de passer à la limite lorsque " tend vers zéro.Donc la convergence forte de la vitesse est prouvée, l'équation spécifique de Reynolds est aussi prouvée. EnFIn, nous montrons l'unicité de la solution de notre problème initial.

Le troisiéme chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité linéaire mais cette fois non-isotherme, c'est-à-dire le coeffcient u épend de la température, avec les conditions de frottement non linéaires de type de Tresca. Nous couplons l'équation de la conservation de la quantité du mouvement avec l'équation de la conservation de l'énergie déduite de la loi de Fourier. Le problème complet dans Ω_ε, s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} = 2\mu Div\ (D\,(u^\varepsilon)\,) + \lambda divu^\varepsilon + f^{\ \varepsilon} & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon \times \,]0,T[\,, \\ \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}\,(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}\,(u^\varepsilon)\,\delta_{ij} & \text{dans } \ \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times \,]0,T[\,, \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \ \Gamma_L^\varepsilon \times \,]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.\nu = 0 & \text{sur } \ \omega \times \,]0,T[\,, \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists\beta > 0 \ tel\ que\ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times \,]0,T[\,, \\ T^\varepsilon\,(0) = 0 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial T^\varepsilon}{\partial v}\,(0) = 0. \end{cases}$$

où u^ε , k^ε , et$g$ sont des données du problème. On étudie l'analyse asymptotique du problème de la même manière que dans le deuxième chapitre, on obtient des estimations à priori indépendamment de " concernant le gradient de la température.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d\,(d=2,3)$, on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière, partitionnée en trois parties mesurables disjointes deux à deux.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v défini sur $\overline{\Omega}$.
$C^1\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω.
$C_0^\infty(\Omega)=D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables età support compact contenu dans Ω.
$D'(\Omega)$	l'espace de distributions sur Ω.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables de puissance p-ième integrable sur Ω.
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur Ω telles que $\exists$ c¿0: $\lvert u(x)\rvert \leq c,\ p.p$ sur Ω.
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω.
$H_0^1(\Omega)$	l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$H_{\Gamma_i}^1(\Omega)$	l'espace $\{\varphi\in H^1(\Omega):\varphi=0 \quad \text{sur } \Gamma_i\}$.
$\gamma\ :H^1(\Omega)^d\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$L^2(\Omega)^d$	l'espace $\left\{u=(u_i)\,/\,u_i\in L^2(\Omega)\,,\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$H^1(\Omega)^d$	l'espace $\left\{u=(u_i)\,/\,u_i\in H^1(\Omega)\,,\ i=\overline{1,d}\right\}$.
$\lVert\cdot\rVert_{0,\Omega}$	la norme de $L^2(\Omega)^d$.
$\lVert\cdot\rVert_{1,\Omega}$	la norme de $H^1(\Omega)^d$.

Si X est un espace de Banach et d $\in\mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

$\Vert.\Vert_X$	la norme de X .
X^d	l'espace $\left\{x = (x_i) = x_i \in X, i = \overline{1,d}\right\}$.
$x_n \to x$	la convergente forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$x_n \to x$	la convergente faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$L^p(0,T,X)$	l'espace des fonctions f mesurables de [0, T] dans X, telles que $\int_0^T \Vert f(t)\Vert_X \, dt < \infty$ avec les modifications usuelles si $p = \infty$.
$\Vert.\Vert_{Lp(0,T,X)}$	la norme de $L^p(0,T,X)$.
$C(0,T,X)$	l'espace des fonctions continues de [0, T] dans X.

Pour une fonction f on note par

dom f	le domaine de f.
supp f	le support de f .
$\partial_i f$	la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_i.
∇f	le gradient de f.
$\varepsilon(f\ )$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla^T f\right)$.
Div f	le divergence de$f$.
$\dot{f}$	la dérivation par rapport au temps.
$\frac{\partial f}{\partial \nu}$	la dérivée normale extérieure.
$lim\ inf$	la limite inférieure.
δ_{ij}	le symbole de Krönecker.
I_3	le tenseurs identité du seconde ordre sur $\mathbb{R}^d$.
0	le zéro de $\mathbb{R}^d$.
C	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque par tout.
$\vert\Vert.\Vert\vert$	la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
$(u,v), u.v$	le produit scalaire des vecteurs u et v.

Chapitre 1

Préliminaires

Contenu

1.1 Cadres Mathématiques

1.1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable ayant uneloi élastique sous l'action des efforts extérieurs en présence deconditions de frottement sur une partie au bord du domaine. Ceci se traduit mathéma-tiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur undomaine de $\mathbb{R}^d$ (d = 2, 3). Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement et de l'énergie du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. Pour les références bibliographiques, nous avons consulté [4, 10].

•L'équation de conservation de la quantité de mouvement.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit àl'équation du mouvement suivante :

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2} = Div\ \sigma + f\ , \tag{1.1.1}$$

où le vecteur f, de composantes fi (i = 1; 2; 3); représente une densité massique des forces extérieures, est la densité de masse et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$Div\ \sigma = (\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j})_{1\leq i\leq 3}$$

•L'équation de conservation de l'énergie.

L'expression générale du premier principe dela thermodynamique s'écrit :

de

$$\rho\frac{de}{dt} = \sigma : D(u) - divq + r, \tag{1.1.2}$$

- e est un scalaire qui désigne l'énergie interne spécifique du milieu continu.

- r est un scalaire représentant l'apport d'énergie par unité de masse et de temps.

- q, de composantes qi, est le vecteur transport d'énergie.
- D(u) est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);\ 1 \leq i,j \leq 3.$$

-σ : D(u) est le produit de deux tenseurs et D(u) défini par l'expression

$$\sigma : D(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}(u).$$

•Lois de comportement linéaire de matériaux é lastiques.

Cette loi reliant le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéairisées D(u) est

$$\sigma(u) = E\ : D(u) \qquad (\ \sigma_{ij}(u) = E_{ijkl}\ d_{kl}(u)). \tag{1.1.3}$$

où $E = (E_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité symétrique d'ordre quatre.

On l'appelle alors la loi de Hooke et elle est valide pour un très grand nombre de matériaux.

Dans le cas isotrope, le tenseur d'élasticité E est défini par

$$E_{\ ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \tag{1.1.4}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé qui sont spécifiques à chaque matériau.δ_{ij} désigne le symbole de Krönecker.

En utilisant (1.1.3), (1.1.4), on peut alors démontrer que le tenseur des contraintes σ d'un corps homogène élastique et isotrope est :

$$\sigma(u) = 2\mu D(u) + \lambda Tr D(u) I,$$

où

- D(u) est le tenseur des taux de déformation.
- I est la matrice identité de rang 3.
- Tr D(u) désigne la trace de D(u) définie par

$$Tr D(u) = \sum_{k=1}^{3} d_{kk}\ (u).$$

μ est une fonction dela température T

$$\mu = (T)$$

La loi de comportement de l'élasticité linéaire d'un corps homogne et non isotherme est donc

$$\sigma(u) = 2\mu(T)D\,(u) + \lambda TrD\,(u)\,I. \tag{1.1.5}$$

•Cas non-isotherme

Considérons un corps homogène élastique, isotrope, et conducteur de chaleur qui occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

Si le milieu est homogène, la densité au point x de Ω reste constante au cours du temps, elle est donc de plus indépendante des variables d'espace. Ce que nous supposerons

$$\rho = \rho_0 = \text{constante.}$$

Il est même possible de posera $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

En utilisant la loi de comportement (1.1.5) l'équation de mouvement (1.1.1) devient

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Div\,(2\mu(T)D\,(u) + \lambda TrD\,(u)\,I) + f\ .$$

On a donc

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Div\ (2\mu(T)D\,(u)\ ) + \lambda divu + f\ . \tag{1.1.6}$$

On suppose que

- e l'énergie interne spécifique est donnée par la loi

$$\frac{de}{dt} = C_v(T)\frac{dT}{dt},$$

où C_v désigne la chaleur spécifique à volume constant.

- l'apport d'énergie par unité de masse r dépend de la température T :

$$r = r(T).$$

- le vecteur flux de chaleur q par diffusion est donné par la loi de Fourier :

$$q = -K\nabla T.$$

où K est la conductivité thermique.
Dans ces conditions l'équation de l'énergie (1.1.2) s'ecrit

$$C_v(T)\frac{dT}{dt} = \sigma : D(u) + div(K\nabla T) + r(T). \tag{1.1.7}$$

Finalement, les équations générales de problème dynamique d'élasticité linéaire non isotherme sont données par le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dt^2} = Div(2\mu(T)D\,(u)\,) + \lambda divu + f, \\ C_v(T)\dfrac{dT}{dt} = \sigma : D(u) + div(K\nabla T) + r(T). \end{array}\right. \tag{1.1.8}$$

Dans le cas stationnaire on obtient le systéme :

$$\left\{\begin{array}{l} -Div\ (2\mu(T)D\,(u)\,) = \lambda divu + f, \\ -div(K\nabla T) = \sigma : D(u) + r(T). \end{array}\right. \tag{1.1.9}$$

•**Lois de frottement du type Tresca.** La loi de frottement présente un seuil de frottement fixe k^εlorsque le solide et la fondation sont en contact,la fondation exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil

$$|\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[\,.$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| \leq k^\varepsilon, \\ Si\ \ |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \ \ \text{alors} \ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0, \\ Si\ \ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \ \ \text{alors}\ \sigma_\tau^\varepsilon = -\lambda\ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau \ \ \text{avec}\ \lambda \geq 0. \end{array}\right. \quad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[\,, \tag{1.1.10}$$

Remarque 1.1.1. Quand $k^\varepsilon = 0$, on obtient $\sigma_\tau^\varepsilon = 0$ sur $\omega \times]0, T[$. Il s'agit du cas sans frottement.

Remarque 1.1.2 [5, 26] La condition (1.1.6) esté quivalente ‘a la relation suivante.

$$(u_\tau - s)\sigma_\tau + k\,|u_\tau - s| = 0 \quad sur \quad \omega.$$

1.2 Espaces fonctionnels

On commençe par un rappel d'analyse fonctionnelle concernant l'espace des distributions, les espaces $L^p(\Omega)$ et les termes principales de la convergence faible. puis,On présente également les espaces de Sobolev, de type $L^p(0;T;X)$, et les principales propriétés notamment les théorèmes de trace. Nous finissons en donnant quelques lemmesdu type Gronwall, qui seront de plus utiles en particalier dans la démonstrationd'unicité des solutions faibles ainsi que les majorations et d'estimations d'erreurs.

1.2.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

On alle introduire dans ce paragraphe un résumé d'analyse fonctionnelle, et quelques résultats qui interviennent dans l'étude des problèmes de ce mémoire.De nombreux ouvrages parcourent cesujet,nous renvoyer le lecteur soucieux de plus détails à par exemple [23]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On désigne par $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $D(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. Nous munitons $C_0^\infty(\Omega)$ de la pseudo-topologie , c'est-à-dire qu'on définit les termes deconvergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

•L'inegalité de Hölder

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on notera q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Pour tout $u \;\epsilon\; L^p(\Omega)$ et $v \;\epsilon\; L^q(\Omega)$.on a $uv \;\epsilon\; L^1(\Omega)$ et $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Il résulte de l'inégalité de Hölder qui si (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, et (v_n) une suite telle que $v_n \to v$ dans $L^q(\Omega)$. on obtient que la suite $(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ converge vers uv dans $L^1(\Omega)$,ce qui implique $lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v_n dx = \int_\Omega uv dx$.

Théorème1.2.1 Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $v \epsilon L^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \to v \;\text{ p.p dans } \Omega \text{ et } |\, u_{n_k}| \; \leq v \text{ p.p dans } \Omega \;.$$

•**L'espace des distributions** $D'(\Omega)$ est le de D(Ω), c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues sur $D(\Omega)$. On note $\langle T, \phi \rangle = T(\phi)$le produit de dualité entre une distribution $T \,\epsilon\, D'(\Omega)$et une fonction $\phi \,\epsilon D(\Omega)$: ce produit de dualité généralise l'intégrale usuelle $\int_\Omega T\phi dx$. En effet, on vérifie que si f est une fonction localement intégrable dans Ω , alors on peut définir une distribution T$_f$ par

$$\langle T_f, \phi \rangle \;\; = \int_\Omega f \;\; \phi dx.$$

On peut aussi munir$D'(\Omega)$ d'une notion de convergence : on dit qu'une suite$T_n \epsilon D'(\Omega)$ **converge au sens des distributions** vers $T \,\epsilon\, D'(\Omega)$ si, pour tout $\phi \,\epsilon$ D(Ω).

$$\mathbf{lim}_{n\to\infty} \langle T,\; \phi_n \rangle = \langle T, \phi \rangle \,.$$

Théorème 1.2.2 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue). Soit (u$_n$)
(i) $u_n(x) \to u(x)$ p.p. sur Ω ,
(ii) il existe une fonction $v \,\epsilon\, L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n , $|u_n(x)| \leq v(x)$ p.p. sur Ω .
donc

$$u \,\epsilon\, L^1(\Omega) \text{ et } \|u_n - u\| \; L^1(\Omega) \to 0.$$

Remarque 1.2.1.Il résulte de l'inégalité de Hölder que si (u$_n$) une suite telle que $u_n \to u$ dans$L^p(\Omega)$, et (v$_n$) une suite telle que $v_n \to v$ dans $L^q(\Omega)$. on obtient que la suite$(u_n v_n) \subset L^1(\Omega)$ converge vers uv dans $L^1(\Omega)$, ce qui implique $lim_{n\to\infty} \int_\Omega \; u_n \; v_n dx = \int_\Omega uvdx$ Le résultat suivant, qui est presque l'inverse du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il est d'une certaine importance dans l'étude des équations non linéaires, il établit une certaine relation entre la convergence dans le sens de la norme de $L^1(\Omega)$ et la convergence presque partout sur Ω.

Théorème 1.2.3 Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions intégrables telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ et $v \,\epsilon L^1(\Omega)$ telle que $u_n \to v$ p.p dans Ω et $|u_{n_k}| \leq v$ p.p dans Ω .

1.2.2 Espaces de Sobolev

On déinit les espaces de Sobolev qui sont les espaces de fonctions qui permet de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles.Ensuite,Ω est un ouvert borné régulier de$\mathbb{R}^d$. Pour p = 2, $L^d(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans . Muni du produit scalaire

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.2.1 Soit un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u\epsilon L^2(\Omega) telque \forall \ i\epsilon \{1, ..., d\} \, \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \epsilon L^2(\Omega) \right\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$est la dérivée partielle de v au sens des distributions (1.2.1).

Proposition 1.2.1 L'espace de sobolev $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{\ H^1(\Omega)} = \textstyle\int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla\ u(x).\nabla v(x))dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{\ H^1(\Omega)} = \left(\int \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Soboleve$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.2.2 (Inégalité de Poincaré). Soit un ouvert de borné de $\mathbb{R}^d$, Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction $u \ \epsilon \ H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{\ L^2(\Omega)} \leq \ \mathrm{C}\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, $\|\nabla u\| \, L^2(\Omega)$ est une norme équivalente à celle de H $^1_0(\Omega)$ ($H^1_0(\Omega)$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles surΓ).

Formule de Green pour l'élasticité

On munit l'espace produit H^1 (Ω)d du produit scalaire canonique et de la norme associée respectivement $(.,.)_{1,\Omega}$ et $\|.\|_{1,\Omega}$ qui définis par :

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_\Omega (u_i v_i + \int_\Omega (u_{i,j} v_{i,j} dx$$

$$\|v\|^2_{1,\Omega} = \int_\Omega |v|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \ .$$

Et la norme de $L^2(\Omega)^d$ sera notée $\|.\|_{0,\Omega}$.

On rappelle que l'application de trace γ : H^1 $(\Omega)^d \to L^2$ $(\Gamma)^d$ est linéaire continue,mais n'est pas surjective.L'image de H^1 $(\Omega)^d$ pare cette application notée par H_Γ,c'est un sous-espace s'injecte continûment dans L^2 $(\Gamma)^d$. Pour σ assez régulier nous avons la formule de Green:

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u) dx + \int Div(\sigma) u dx = \int_\Gamma \sigma\nu \ v d\Gamma \ 8v \in H^1(\Omega)^d.$$

Un résultat essentiel pour les applications du prochain chapitre est l'inégalité suivante:

Théorème 1.2.4 (Inégalité de Korn). Soit Ω un domaine régulier borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction v $\in H^1$ $(\Omega)^d$, on a :

$$\int_\Omega v_i v_i dx + \int_\Omega \epsilon_{ij}(v)\epsilon_{ij}(v) dx \ \ C \geq |v|^2_{1,\Omega} \ \ . \ \ v \in H^{\ 1}(\Omega)^d$$

Pour des détails sur les résultats de ce paragraphe nous renvoyons par exemple [25].

Remarque 1.2.1 Pour tout un ouvertde $\mathbb{R}^d$, ona

$$H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega).$$

Les espaces Lp (0, T,X)

Soit $T > 0$ et soit (X, $\|.\|_X$) un espace de Banach réel.

Définition 1.2.2 On définit les espaces suivants:

$$C(0, T; X) = \{u : [0, T] \to X continue\} \ ,$$

$$L^p(0,T;X) = \left\{ \ u : [0,T] \to X mesurable; \int_0^T \|u(t)\|_X \, dt \prec \infty \ \right\}, 1 \leq p < 1,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_x^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{ \ u : [0,T] \to X mesurable; \exists C > 0 \, \|u(t)\|_X \ \leq C \ p.p.t \}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf \{ \ C > 0; \|u(t)\|_X \ \leq C \ p.p.t \} \, .$$

Remarque 1.2.2. Pour tout $1 \leq p < \infty$, L^p(0,T;X) est un espace de Banach et C(0, T,X) est dense dans L^p(0,T,X).Si 1$\leq p < \infty$ et si X est réflexif, donc Lp(0, T,X) est réflexif.
Théorème 1.2.5. Soit (X, $(.; .)_X$) un espace de Hilbert et soit u : [0, T] $\to$ X une fonction telles que u, $\frac{\partial u}{\partial t} \in$ L^p(0, T; X), 1$\leq$ p $\leq$1. donc :
(1) la fonction t $\to \frac{1}{2} \, \|u(t)\|_X^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle]0,T[,
(2) $\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \, \|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t) \, , u\,(t)\right)_x$p.p. t $\in$]0, T[,
(3)$\frac{1}{2} \, \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \, \|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s) \, , u\,(s)\right)_x$ds pour tout t $\in$ [0,T] .

1.3 Elémemts d'analyes non linaire dans les espaces Hilbert

1.3.1 Lemmes de type Gronwall

On rappelle ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, on pourra consulter par exemple [3],[9].
Lemme 1.3.1 Soient m et $n \, \epsilon C([0,T], R)$ telles que$m(t) \geq 0, n(t) \geq 0$ pour tout
$t \, \epsilon]0,T[$, $a \geq 0$ une constante , $\phi \, \epsilon C(0;T;R)$

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \forall t \in [0, T], \tag{1.3.1}$$

donc

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \forall t \in [0, T], \tag{1.3.2}$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s)ds \forall t \in [0, T], \tag{1.3.3}$$

donc

$$\int_0^t \phi(s)ds \ \leq \exp(aT) \left(\int_0^t m(s)ds \right). \tag{1.3.4}$$

Dans le cas par

ticulier m = 0, la partie de (1) de ce lemme devient :

Corollaire 1.3.1. Soit n $\in C$ ([0,T] ;R) telle que, n (t) ≥ 0 pour tout t $\in$]0; T[, et soit a ≥ 0 . Si $\in$ C (0, T,R) est une fonction telle que

$$\phi \text{ (t)} \leq \text{a} + \int_0^t \text{n (s) } \phi(\text{s}) \text{ ds } \ \forall \text{t} \in [0, \text{T}] \ ,$$

donc

$$\phi \text{ (t)} \leq \ a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \forall \text{ t} \in [0, \text{T}] \ .$$

le corollaire 1.3.1 est souvent utilisé pourmontrer l'unicité de la solution, de la façon suivante.

En supposant qu'il existe deux solutions, en notant par ϕ la norme de la diérence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ϕ sous la forme

$$\phi \text{ (t)} \leq \int_0^t \text{n (s) } \phi(\text{s}) \text{ ds } \ \forall \text{t} \in [0, \text{T}] \ ,$$

avec une certaine fonction n≥ 0. L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ϕ .

Lemme 1.3.2. Soient m et n $\in$ C ([0, T] ;R) telles que m(t)≥ 0, n (t)≥ 0 pour tout t $\in$]0; T[, a ≥ 0 une constante. Soit également ϕ : [0, T] $\to$R une fonction telle que

$$\tfrac{1}{2}\phi^2\ (\mathrm{s}) \leq \tfrac{1}{2}\mathrm{a}^2 + \int_0^s \mathrm{m(t)}\ \phi\,(t)\mathrm{dt} + \int_0^s \mathrm{n\ (t)}\ \phi^2(\mathrm{t})\ \mathrm{dt}\quad \forall \mathrm{s} \in [0,\ \mathrm{T}]\ ,$$

donc

$$|\phi(s)| \leq \big(a + \int_0^s m(t)dt\big)\exp\big(\int_0^s n(t)dt\big)\ \forall\ \mathrm{s}\in [0,T\ ]\ .$$

Dans le cas particulier n = 0 le lemme1.3.2 devient :

Corollaire 1.3.2. Soit m $\in$ C ([0,T] ;R) telle que, m (t) ≥ 0 pour tout t $\in$]0; T[, a ≥ 0 une constante. soit également $\phi :\ [0,T]$ $\rightarrow$R une fonction telle que

$$\tfrac{1}{2}\phi^2\ (\mathrm{s}) \leq \tfrac{1}{2}\mathrm{a}^2 + \int_0^s \mathrm{m(t)}\ \phi\,(t)\mathrm{dt}\quad \forall \mathrm{s} \in [0,\ \mathrm{T}]\ ,$$

donc

$$|\phi(s)| \leq \big(a + \int_0^s m(t)dt\big)\ \forall\ \mathrm{s}\in [0,T\ ]\ .$$

1.3.2 Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

Théorème 1.3.1 (d'Aloaglu). Soit E un espace de Banach separable, et soit (f_n) une suite bornée dans $E'0$ le dual de E. Alors il existe une sous-suite extraire (f_{n_k}) qui converge faiblement dans E'.

Proposition 1.3.1 Soit E un espace de Banach, et soit (f_n) une suite dans E' le dual d'espace E:

(1) $\mathrm{f}_n \rightarrow$ f dans E' implique fn $\rightharpoonup^*$ f .

(2) Si $\mathrm{f}_n \rightharpoonup *$ f , alors (f_n) est bornée et lim inf n$\rightarrow$1 $\|f_n\| \geq \|f\|$:

(3) Si $\mathrm{u}_n \rightarrow$ u dans E et $\mathrm{f}_n \rightharpoonup^*$ f dans E', alors il suit que $\langle f_{n;} u_n\rangle \rightarrow \langle f; u\rangle$.

(4) $\mathrm{f}_n \rightharpoonup$ f dans E' implique $\mathrm{f}_n \rightharpoonup *$ f .

(5) Si E est refléxif, alors $\mathrm{f}_n \rightharpoonup^*$ f est équivlante à $\mathrm{f}_n \rightharpoonup^*$ f dans E'

Théorème 1.3.2 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet). Soit H un espace de Hilbert réel et $(..,..)_H$ un produit scalaire de H. Pour toute $\phi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v\rangle_{H\prime\times H} = (f;v)_H \qquad \forall\ v\ \epsilon\ H \text{ et } \|\phi\|_{H\ \prime} = \|f\|_H\ .$$

Proposition 1.3.2

(1) Une suite dans H qui converge fortement vers $f \in H$ converge aussi faiblement vers f.
(2) La propriété toute suite dans H qui converge faiblement vers $f \in H$ converge fortement vers f est vraie si et seulement si la dimension de H est finie.
(3) Toute suite faiblement convergente est bornée.
(4) Si E et F sont des espaces de Hilbert réels, et si $u \in L(E, F)$, alors l'image par u de toute suite dans E faiblement convergente vers un élément $x \in E$ est faiblement convergente dans F vers $u(x)$.

*L*e résultat crucial suivant est une conséquence du théorème de Riesz-Fréchet et du théorème(1.3.1)de Banach-Alaoglu.

Théorème 1.3.3 (Théorème de compacité faible de la boule unité fermé des espaces de Hilbert). Si H est un espace de Hilbert, alors toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente.

Chapitre 2

Analyse asymptotique d'un problème dynamique d'Élasticité linéaire avec frottement

Contenu

2.1 Position du problème

On considére un problème associé à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime dynamique dans le domaine mince $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ dont une partie de sa frontière est soumise à des conditions de frottement et une autre partie est soumise à des conditions de Dirichlet, où $0 < \varepsilon < 1$ est un réel positif destiné à tendre vers zéro. La frontière de Ω_ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \overline{\omega}$, avec Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$, Γ_L^ε est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω_ε. On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < h_{\min} \leq h(x') \leq h_{\max} = \overline{h} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

On note $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le domaine Ω_ε est donné par

$$\Omega_\varepsilon = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

Soit $T > 0$, $u^\varepsilon(x, t)$ est la vitesse de déplacement du corps élastique au point x et à l'instant $t \in [0, T]$. On désigne par $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations avec

$$d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke, écrite avec la convention d'Einstein

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}\left(u^\varepsilon\right) + \lambda d_{kk}\left(u^\varepsilon\right)\delta_{ij}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

Les équations qui gouvernent les déformations d'un corps homogène élastique isotrope en *régime dynamique* dans le domaine Ω_ε sont les suivantes [1]

$$\frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^\varepsilon + f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\tag{2.1.1}$$

où f^ε représente une densité massique des forces extérieures.

On utilise les notations usuelles

$$u_\nu^\varepsilon = u^\varepsilon.\nu \qquad u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_\nu^\varepsilon.\nu \qquad \sigma_\nu^\varepsilon = \left(\sigma^\varepsilon.\nu\right).\nu, \qquad \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma^\varepsilon.\nu - \left(\sigma_\nu^\varepsilon\right).\nu$$

où ν désigne le vecteur unitaire normal à Γ^ε extérieur à Ω_ε.

Nous supposons que la vitesse est connue sur $\Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[$ et sur $\Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[\tag{2.1.2}$$

$$u^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\tag{2.1.3}$$

où $g = (g_1, g_2, g_3)$ est une fonction ne dépend pas de t, avec $g_3 = 0$.

Sur ω la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition suivante

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.\nu = 0 \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{2.1.4}$$

Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω, ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca [10]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Rightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Rightarrow \exists\ \beta \geq 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0,T[\tag{2.1.5}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, et k^ε est une fonction donnée.

Le problème consiste donc à trouver un champ de vitesse de déplacement u^ε vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d^2u^\varepsilon}{dt^2} = 2\mu Div\ (D\,(u^\varepsilon)\,) + \lambda divu^\varepsilon + f^{\ \varepsilon} & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0,T[\,, \\ \sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}\,(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}\,(u^\varepsilon)\,\delta_{ij} & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_1^\varepsilon \times]0,T[\,, \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma_L^\varepsilon \times]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.\nu = 0 & \text{sur } \omega \times]0,T[\,, \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon \Longrightarrow \exists\beta > 0 \ tel\ que\ \left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon \end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times]0,T[\,, \\ u^\varepsilon\,(0) = u_0 \text{ et } \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\,(0) = u_1. & (2.1.6) \end{array}\right.$$

Lemme 2.1.1. *La condition (2.1.5) sur* $\omega \times]0,T[$ *est équivalente à la condition suivante* :

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0. \tag{2.1.7}$$

Preuve.

- Supposons que u^ε vérifie la condition aux limites de tresca (2.1.5).
  - $\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0$, d'où (2.1.7)
  - $\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$ alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$, d'où

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = -\beta\,|\sigma_\tau^\varepsilon|^2 + \beta\,|\sigma_\tau^\varepsilon|^2 = 0.$$

- Réciproquement, on suppose que $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0.$
  - $\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors de (2.1.7) on a

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon = -\,|\sigma_\tau^\varepsilon| \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$

  - $\triangleright$ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0 \quad &\geq -\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \cdot |\sigma_\tau^\varepsilon| + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \\ &\geq \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| (k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon|)\end{aligned}$$

et comme $k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon| > 0$, d'où $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = 0.\Box$

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous supposons que la fonction vectorielle $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_L^\varepsilon)^3$ (l'ensemble des traces de $H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ sur Γ_L^ε) telle que

$$\int_{\Gamma_L^\varepsilon} g.\nu \; ds = 0 \tag{2.2.1}$$

Nous pouvons alors montrer comme dans [29] que cette condition est équivalente à l'existence d'un relèvement $G^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ de g sur Ω_ε vérifiant

$$G^\varepsilon = g \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon, G^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, G^\varepsilon.\nu = 0 \text{ sur } \omega. \tag{2.2.2}$$

Pour l'ouvert Ω_ε on définit l'espace et l'ensemble suivants :

$$H^1(\Omega_\varepsilon)^3 = \left\{ v \in \left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega_\varepsilon), \forall i, j = 1, ..., 3 \right\}$$

l'espace de Sobolev munit de la norme $\|.\|_{1,\Omega_\varepsilon}$, où la norme de $\left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^3$ sera noté $\|.\|_{0,\Omega_\varepsilon}$, $H_0^1(\Omega_\varepsilon)^3$ désigne le sous espace vectoriel des fonctions de $H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ nulles sur Γ^ε, on note $H^{-1}(\Omega_\varepsilon)^3$ son dual topologique.

Nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega_\varepsilon)^3$

$$K^\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_L^\varepsilon \cup \; \Gamma_1^\varepsilon, \; v.\nu = 0 \text{ sur } \omega \right\},$$

Pour simplifier l'écriture du problème faible on note :

$$a(u, v) = 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} d_{ij}(u) \, d_{ij}(v) \, dx + \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} div\,(u)\,.div\,(v)\,dx \tag{2.2.3}$$

Pour $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3$, on définit la fonctionnelle j^ε par

$$j^\varepsilon(v) = \int_\omega k^\varepsilon \left|v_\tau\right| dx' \tag{2.2.4}$$

j^ε est convexe et semi-continue inférieurement.

Enfin on note

$$(f, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f_i v_i dx, \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3.$$

Lemme 2.2.1. *Soit u^ε solution de (2.1.1)-(2.1.6), alors elle vérifie le problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u^\varepsilon \text{ où } \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in K^\varepsilon,\ \forall t\ \in [0,T]\,,\ \textit{telle que} \\ \left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a(u^\varepsilon(t), \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)) + \\ j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)) \geq (f^\varepsilon, \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)), \quad \forall \phi \in K^\varepsilon \\ \textit{avec} \qquad u^\varepsilon(0) = u_0, \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1 \end{cases}$$

Preuve. On multiplie l'équation (2.1.1) par $\phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)$, où $\phi \in K^\varepsilon$, en utilisant la formule de Green on obtient pour $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_i - \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial t}(t)\right) dx - \\ &- \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} n_j \left(\phi_i - \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial t}(t)\right) ds = \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon_i \left(\phi_i - \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial t}(t)\right) dx, \forall \phi \in K^\varepsilon\ . \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

En utilisant maintenant les conditions aux limites on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma^\varepsilon \nu \left(\phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) ds &= \int_\omega \sigma^\varepsilon \nu \left(\phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx' \\ &= \int_\omega \left[\sigma^\varepsilon_\tau \left(\phi_\tau - \frac{\partial u^\varepsilon_\tau}{\partial t}(t)\right) + \sigma^\varepsilon_\nu \left(\phi_\nu - \frac{\partial u^\varepsilon_\nu}{\partial t}(t)\right)\right] dx' \\ &= \int_\omega \sigma^\varepsilon_\tau \left(\phi_\tau - \frac{\partial u^\varepsilon_\tau}{\partial t}(t)\right) dx' \end{aligned}$$

car $\phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)$ sur $\Gamma^\varepsilon_L \cup \Gamma^\varepsilon_1$ et $\phi_\nu = \dfrac{\partial u^\varepsilon_\nu}{\partial t}(t) = 0$ sur ω.
Donc de (2.2.5) on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma^\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\phi_i - \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial t}(t)\right) dx + \\ &+ j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - \int_{\Omega_\varepsilon} f^\varepsilon_i \left(\phi_i - \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial t}(t)\right) dx = \\ &\int_\omega \left[\sigma^\varepsilon_\tau \left(\phi_\tau - \frac{\partial u^\varepsilon_\tau}{\partial t}(t)\right) + k^\varepsilon \left(|\phi_\tau| - \left|\frac{\partial u^\varepsilon_\tau}{\partial t}(t)\right|\right)\right] dx', \forall \phi \in K^\varepsilon\ . \end{aligned}$$

et comme $\int_\omega \left[\sigma^\varepsilon_\tau \left(\phi_\tau - \dfrac{\partial u^\varepsilon_\tau}{\partial t}(t)\right) + k^\varepsilon \left(|\phi_\tau| - \left|\dfrac{\partial u^\varepsilon_\tau}{\partial t}(t)\right|\right)\right] dx' \geq 0$ d'après le lemme 2.1.1,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a\left(u^\varepsilon(t), \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \\ &j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon, \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \quad \forall \phi \in K^\varepsilon \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

et par suite on obtient le problème variationel en vitesse suivant :

Trouver u^ε où $\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) \in K^\varepsilon, \quad \forall t \in [0,T]$, telle que

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + a\left(u^\varepsilon(t), \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \\ + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon, \phi - \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \forall \phi \in K^\varepsilon \\ \text{avec} \qquad u^\varepsilon(0) = u_0 \text{ et } \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_1 \end{array}\right. \tag{2.2.7}$$

Théorème 2.2.1. *On fait les hypothèses suivantes :*

$$f^\varepsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2\left(0,T; L^2\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right) \tag{2.2.8}$$

$$k^\varepsilon \in C_0^\infty(\omega), k^\varepsilon > 0 \quad \textit{ne depend pas de} \quad t \tag{2.2.9}$$

$$u_0 \in H^2(\Omega_\varepsilon)^3, \quad u_1 \in H^1(\Omega_\varepsilon)^3, \quad (u_1)_\tau = 0. \tag{2.2.10}$$

Alors, il existe une fonction u^ε unique solution de (2.2.7) *avec*

$$u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty\left(0,T; H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right) \tag{2.2.11}$$

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^\infty\left(0,T; L^2\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right) \tag{2.2.12}$$

Preuve.

a) L'unicité de la solution

Soient u_1^ε et u_2^ε deux solutions éventuelles. Prenant dans (2.2.7) $\phi = \dfrac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial t}(t)$ (resp $\phi = \dfrac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial t}(t)$) dans l'inéquation relative à u_1^ε (resp u_2^ε) et ajoutant, il vient, en posant $w^\varepsilon = u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon$:

$$-\left(\frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}\right) - a\left(w^\varepsilon, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}\right) \geq 0$$

ceci implique que

$$\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + a(w^\varepsilon(t), w^\varepsilon(t))\right] \leq 0$$

Donc, comme $a(v,v) \geq 0$, on a

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(t) \leq \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t}(0) = 0,\ \forall t \Rightarrow w^\varepsilon(t) = 0$$

d'où l'unicité de la solution.

b) Existence de la solution

Supposant que k^ε peut dépendre de t, avec $k^\varepsilon, \dfrac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^\infty\left(\omega \times]0, T[\right)$

On régularise la fonctionnelle j^ε, en posant

$$j^\varepsilon_\zeta(v) = \int_\omega k^\varepsilon(x,t)\varphi_\zeta\ (|v_\tau|^2)dx',\ \ où\ \varphi_\zeta\ (\lambda) = \frac{1}{1+\zeta}\,|\lambda|^{(1+\zeta)} \quad \zeta > 0. \tag{2.2.13}$$

on considère l'équation approchée

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}\,(t)\,, \phi\right) + a\left(u^\varepsilon_\zeta\,(t)\,, \phi\right) + \left(\left(\ j^\varepsilon_\zeta\right)'\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\,(t)\right), \phi\right) = \left(f^\varepsilon\,(t)\,, \phi\right)\ \forall \phi \in K^\varepsilon \\ \text{avec} \qquad u^\varepsilon_\zeta(0) = u_0, \qquad \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(0) = u_1.\end{gathered} \tag{2.2.14}$$

On montre d'abord l'existence d'une solution u^ε_ζ de (2.2.14) puis l'on établit des estimations à priori indépendantes de ζ. On passe ensuite à la limite en ζ.

<u>*Estimation à priori (I)*</u>

On prend dans (5.2.14) $\phi = \dfrac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)$, comme $\left(\left(\ j^\varepsilon_\zeta\right)'(w)\,, w\right) \geq 0,\ \ \forall w \in K^\varepsilon$, on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right) + a\left(u^\varepsilon_\zeta(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right) \leq \left(f^\varepsilon(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right)$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} + a(u^\varepsilon_\zeta(t), u^\varepsilon_\zeta(t))\right] \leq (f^\varepsilon(t), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)) \tag{2.2.15}$$

pour $\rho > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(v,v) + \rho\,\|v\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} \geq \alpha\,\|v\|^2_{1,\Omega_\varepsilon}$$

on déduit de (2.2.15) après intégration en t :

$$\begin{gathered}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} + \alpha\left\|u^\varepsilon_\zeta(t)\right\|^2_{1,\Omega_\varepsilon} - \rho\left\|u^\varepsilon_\zeta(t)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} \leq \|u_1\|^2_{0,\Omega_\varepsilon} + \\ +c\,\|u_0\|^2_{1,\Omega_\varepsilon} + 2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), \frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(\sigma)\right)d\sigma\end{gathered} \tag{2.2.16}$$

utilisant

$$\left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \leq c\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 d\sigma + \|u_0\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2$$

et comme

$$\begin{aligned}
2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right) d\sigma &= 2\int_0^t \left[\frac{d}{d\sigma}(f^\varepsilon(\sigma), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)) - 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right)\right] d\sigma. \\
&= 2(f^\varepsilon(t), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(t)) - 2(f^\varepsilon(0), u_0) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right) d\sigma
\end{aligned}$$

on déduit de (2.2.16) que

$$\begin{gathered}
\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 \leq c + c\int_0^t \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 d\sigma + c\int_0^t \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 d\sigma + \\
2\int_0^t \left(f^\varepsilon(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right)\sigma \leq c(1 + \int_0^t \left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2\right] d\sigma) + \\
+2(f^\varepsilon(t), \left(u_\zeta^\varepsilon\right)(t)) + 2(f^\varepsilon(0), u_0) + 2d\overset{t}{\underset{0}{int}} \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \left\|\left(u_\zeta^\varepsilon\right)(\sigma)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon} d\sigma
\end{gathered}$$

d'où finalement

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 \leq c\left(1 + \int_0^t \left[\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(\sigma)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2\right] d\sigma\right)$$

par conséquant, d'après le lemme de Gronwall :

$$\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|u_\zeta^\varepsilon(t)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 \leq c \tag{2.2.17}$$

où c est ne constante indépendante de ζ.

<u>*Estimation à priori (II)*.</u> On dérive (2.2.14) en t on obtient :

$$\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}(t), \phi\right) + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi\right) + \left(\frac{d}{dt}\left(\ j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \phi\right) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \phi\right)$$

on prend $\phi = \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$, on trouve

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + \\
+X(t) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)
\end{gathered} \tag{2.2.18}$$

où $X(t) = \left(\dfrac{d}{dt}\left(\ j_\zeta^\varepsilon\right)'\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$.

Mais

$$\left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(v),\phi\right)=\int_\omega k^\varepsilon\varphi_\zeta'\,(|v_\tau|^2).v_\tau.\phi_\tau dx'=\int_\omega k^\varepsilon\psi_\zeta(v_\tau).\phi_\tau dx'$$

où $\psi_\zeta(v_\tau)=\varphi_\zeta'\,(|v_\tau|^2).v_\tau$, donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(v(t)),\phi\right)&=\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(v_\tau(t)).\phi_\tau dx'+\\&+\int_\omega k^\varepsilon\lim_{h\to0}\frac{\psi_\zeta(v_\tau(t+h))-\psi_\zeta(v_\tau(t))}{h}.\phi_\tau dx'\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)),\phi'(t)\right)&=\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi_\tau'(t)dx'+\\&+\int_\omega k^\varepsilon\lim_{h\to0}\frac{\psi_\zeta(\phi_\tau(t+h))-\psi_\zeta(\phi_\tau(t))}{h}.\frac{\phi_\tau(t+h)-\phi_\tau(t)}{h}dx'\end{aligned}$$

comme l'opérateur est monotone, la dernière intégrale est positive et donc

$$\Rightarrow\quad\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\left(j_\zeta^\varepsilon\right)'(\phi(t)),\phi'(t)\right)&\geq\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t)).\phi_\tau'(t)dx'\\&=\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta(\phi_\tau(t))dx'\end{aligned}$$

avec cette inégalité, (2.2.18) nous donnons

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2+a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right]+\\&+\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)dx'\leq\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t),\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)\end{aligned}$$

où l'on remplace ϕ par $\dfrac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$.

Intégrant de 0 à t on en déduit

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2+\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2\leq+c\left(\|u_1\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2+\left\|\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right)\\&+c\int_0^t\left\|\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2d\sigma-2\int_0^t\int_\omega\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau(\sigma)\right)dx'd\sigma\\&+2\int_0^t\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma),\frac{\partial^2u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right)d\sigma\end{aligned}\tag{2.2.19}$$

mais

$$\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right) d\sigma = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0), u_1\right) - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right) d\sigma$$

et comme $\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right)$, alors avec l'inégalité de Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(\sigma), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right) d\sigma \leq c\left|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right| . \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon} + \\ +c + \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} . \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon} d\sigma\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

d'où l'on déduit, à partir de (2.2.19) :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \leq c\left(\|u_1\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right) \\ +c\int_0^t \left(\left\|\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(\sigma)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(\sigma)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right) d\sigma + \\ +2\left|\int_0^t \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} . \frac{\partial}{\partial t}\psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau (\sigma)\right) dx' d\sigma\right|\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

il faut maintenant estimer $\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$.
On déduit de (2.2.14) et (2.2.10) que

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right) = (f^\varepsilon(0), \phi) - a(u_0, \phi),\ \forall \phi \in K^\varepsilon \tag{2.2.22}$$

et par suit

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \leq cte \tag{2.2.23}$$

donc le dernier terme de (2.2.21), qui vaut

$$\begin{aligned}\int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} . \psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau (\sigma)\right) dx' - \int_\omega \frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t}(x,0) \psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau (0)\right) dx' \\ + \int_0^t \int_\omega \frac{\partial^2 k^\varepsilon}{\partial t^2} . \psi_\zeta\left(\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau (\sigma)\right) dx' d\sigma\end{aligned}$$

On suppose maintenant $\frac{\partial k^\varepsilon}{\partial t} = 0$ (l'hypothèse (2.2.9)), alors (2.2.21) et (2.2.23) donnent :

$$\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}+\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|^2_{1,\Omega_\varepsilon}\leq c\left[1+\int\limits_0^t\left(\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}(\sigma)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}+\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(\sigma)\right\|^2_{1,\Omega_\varepsilon}\right)d\sigma\right]$$

d'après le lemme de Gronwall on obtient

$$\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}+\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}\leq c \tag{2.2.24}$$

Passage à la limites en ξ

D'après (2.2.17) et (2.2.24) on peut extraire de u^ε_ζ une suite notée encore u^ε_ζ, telle que

$$\begin{array}{rcl} u^\varepsilon_\zeta \longrightarrow u^\varepsilon & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right)\\ \dfrac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\longrightarrow \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right)\\ \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}\longrightarrow \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} & \text{dans} & L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega_\varepsilon\right)^3\right)\end{array} \tag{2.2.25}$$

on déduit de (2.2.14) que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2},\phi-\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)+a\left(u^\varepsilon_\zeta,\phi-\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)+j^\varepsilon_\zeta\left(\phi\right)\ -\\ -\ j^\varepsilon_\zeta\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)-\left(f^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)=j^\varepsilon_\zeta\left(\phi\right)-\\ -\ j^\varepsilon_\zeta\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)-\left(\left(j^\varepsilon_\zeta\right)'\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right),\phi-\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)\geq 0\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Prenant dans (2.2.26) $\phi=\phi(t),\phi\in L^2\left(0,T;K^\varepsilon\right)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^T\left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}\left(t\right),\phi\right)+a(u^\varepsilon_\zeta,\phi)+j^\varepsilon_\zeta\left(\phi\right)-\left(f^\varepsilon,\phi-\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)\right]dt\geq\\ &\int\limits_0^T\left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon_\zeta}{\partial t^2}\left(t\right),\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\left(t\right)\right)+a\left(u^\varepsilon_\zeta,\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(t)\right)+j^\varepsilon_\zeta\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t})\right)\right]dt\\ &\qquad=\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(T)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}+a(u^\varepsilon_\zeta(T),u^\varepsilon_\zeta(T))\right]-\\ &\qquad-\frac{1}{2}\left[\left\|u_1\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}+a(u_0,u_0)\right]+\int\limits_0^T j^\varepsilon_\zeta\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t})\right)dt\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

mais

$$\begin{aligned}&\liminf_{\xi\to 0}\left[\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(T)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}+a(u^\varepsilon_\zeta(T),u^\varepsilon_\zeta(T))\right]+\int\limits_0^T j^\varepsilon_\xi\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t})\right)dt\right]\\ &\qquad\geq\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}(T)\right\|^2_{0,\Omega_\varepsilon}+a(u^\varepsilon(T),u^\varepsilon(T))\right]+\int\limits_0^T j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon_\zeta}{\partial t}\right)dt\end{aligned}$$

et donc (2.2.27) donne

$$\begin{aligned}\int_0^T \Bigg[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + a\left(u^\varepsilon, \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + j^\varepsilon(\phi) - j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \\ - \left(f^\varepsilon, \phi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\Bigg] dt \geq 0, \ \forall \phi \in L^2(0,T;K^\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

On passe de (2.2.28) à l'inégalité ponctuelle (2.2.7)

Soit $s \in]0,T[$ fixé quelconque et soit $w \in K^\varepsilon$ quelconque. Prenons la famille $\mathcal{O}_k = \left]s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k}\right[$ de voisinages de s :

et soit ϕ définie par

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t) & \text{si } t \notin \mathcal{O}_k \\ w(t) & \text{si } t \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Alors (2.2.28) donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_k} \left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, w\right) + a(u^\varepsilon, w) + j^\varepsilon(w) - (f^\varepsilon, w)\right] dt - \\ - \int_{\mathcal{O}_k} \left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + a\left(u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - (f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t})\right] dt \geq 0\end{aligned}$$

d'où encore en désignant par $|\mathcal{O}_k|$ la mesure de $\mathcal{O}_k$:

$$\begin{aligned}\left(|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t) dt, w\right) + a\left(|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} u^\varepsilon(t) dt, w\right) + j^\varepsilon(w) - \\ -(|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} f^\varepsilon(t) dt, w) - |\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} \left[\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) + a\left(u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right. \\ \left. - j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) - \left(f^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)\right] dt \geq 0.\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Mais d'après le *Théorème de Lebesgue, on a*

$$|\mathcal{O}_k|^{-1} \int_{\mathcal{O}_k} g(t) dt \to g(s), \text{ pour presque tout } s$$

On déduit donc de (2.2.29) que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s), w - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) + a\left(u^\varepsilon(s), w - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) + j^\varepsilon(w) \\ -j^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) \geq \left(f^\varepsilon(s), w - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right), \quad \forall w \in K^\varepsilon\end{aligned}$$

d'où (2.2.7) et donc le théorème 2.2.1 est démontré.

2.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique du problème on utilise le changement d'échelle $z = x_3/\varepsilon$. Comme dans [8] cette méthode consiste à transposer le problème initialement posé dans le domaine Ω_ε en un problème équivalent posé sur un domaine Ω indépendant de ε, où

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega, \quad 0 < z < h(x')\}$$

on note $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L \cup \overline{\omega}$ sa frontière. Nous définissons sur Ω des nouvelles inconnues

$$\begin{aligned} \widehat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) &= u_i^\varepsilon(x', x_3, t), \ i = 1, 2 \\ \widehat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) &= \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x', x_3, t) \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

pour les données du problème, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{aligned} \widehat{k} &= \varepsilon k^\varepsilon \\ \widehat{f}(x', z, t) &= \varepsilon^2 f^\varepsilon(x', x_3, t) \\ \widehat{g}(x', z, t) &= g(x', x_3, t) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

$$\begin{aligned} (\widehat{u}_0)_i (x', z) = (u_0)_i (x', x_3), \ i = 1, 2 \text{ et } (\widehat{u}_0)_3 (x', z) = \varepsilon^{-1} (u_0)_3 (x', x_3) \\ (\widehat{u}_1)_i (x', z) = (u_1)_i (x', x_3), \ i = 1, 2 \text{ et } (\widehat{u}_1)_3 (x', z) = \varepsilon^{-1} (u_1)_3 (x', x_3) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

avec $\widehat{k}, \widehat{f}, \widehat{g}, \widehat{u}_0$ et $(\widehat{u}_1)$ ne dépend pas de ε.

Soit $\widehat{G}(x', z, t)$ tel que $\widehat{G} = \widehat{g}$ sur Γ.

Ainsi on peut définir le relèvement G^ε de g précédemment introduit, par

$$G_i^\varepsilon(x', x_3, t) = \widehat{G}_i(x', z, t), \ i = 1, 2$$

$$G_3^\varepsilon(x', x_3, t) = \varepsilon \widehat{G}3(x', z, t)$$

Posons

$$K=\left\{v\in H^{1}(\Omega)^{3}: v=0 \text{ p.p sur } \Gamma_{L}\cup\Gamma_{1},\ v.\nu=0 \text{ sur } \omega\right\},$$
$$\Pi\left(K\right)=\left\{\overline{\varphi}\in H^{1}(\Omega)^{2}:\overline{\varphi}=\left(\varphi_{1},\varphi_{2}\right),\varphi_{i}=0 \text{ sur } \Gamma_{1}\cup\Gamma_{L} \text{ pour } i=1,2\ \right\}$$
$$V_{z}=\left\{v=(v_{1},v_{2})\in L^{2}(\Omega)^{2}:\frac{\partial v_{i}}{\partial z}\in L^{2}(\Omega),i=1,2;v=0 \text{ sur } \Gamma_{1}\right\}$$

V_z est un espace de Banach muni de la norme

$$\left\|v\right\|_{V_{z}}=\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\left|v_{i}\right|^{2}+\left|\frac{\partial v_{i}}{\partial z}\right|^{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

En multipliant (2.2.7) par ε, et en passant au domaine fixe Ω on montre que le problème variationnel est équivalent au problème donné par :

$$\begin{gathered}\textit{Trouver } \widehat{u}^{\varepsilon} \text{ où } \frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\in K\quad\forall t\ \in[0,T]\,,\ \textit{telle que}\\ \sum_{i=1}^{2}\varepsilon^{2}\left(\frac{\partial^{2}\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\left(t\right),\widehat{\phi}_{i}\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+\varepsilon^{4}\left(\frac{\partial^{2}\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\left(t\right),\widehat{\phi}_{3}-\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+\\ +\widehat{a}\left(\widehat{u}^{\varepsilon}\left(t\right),\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+\widehat{j}(\widehat{\phi})-\widehat{j}\left(\frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)\geq\\ \geq\sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_{i}^{\varepsilon}\left(t\right),\phi_{i}-\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+\varepsilon\left(\widehat{f}_{3}^{\varepsilon}\left(t\right),\phi_{3}-\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right),\forall\widehat{\phi}\in K\end{gathered}\tag{2.3.4}$$

$$\widehat{u}^{\varepsilon}(0)=\widehat{u}_{0},\ \frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}(0)=\widehat{u}_{1}\tag{2.3.5}$$

où

$$\widehat{j}(\widehat{\phi})=\int_{\omega}\widehat{k}\left|\widehat{\phi}_{\tau}\right|\ dx'$$

et

$$\begin{gathered}\widehat{a}\left(\widehat{u}^{\varepsilon},\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)=\mu\varepsilon^{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}+\frac{\partial\widehat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\widehat{\phi}_{i}-\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)dx'dz+\\ \mu\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^{2}\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_{i}-\frac{\partial\widehat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)+\varepsilon^{2}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\widehat{\phi}_{3}-\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\right]dx'dz\\ +2\mu\varepsilon^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_{3}-\frac{\partial\widehat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)dx'dz+\lambda\varepsilon^{2}\int_{\Omega}div\left(\widehat{u}^{\varepsilon}\right).div\left(\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\right)\ dx'dz\end{gathered}$$

2.3.1 Estimation à priori

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses du théorème 2.2.2, il existe une constante C indépendante de ε telle que :*

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\right)+\\&\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\le C\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^2\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\right)+\\&+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial^2\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial^2\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega}^2\le C\end{aligned}\tag{2.3.7}$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (2.2.7), donc

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+a\left(u^\varepsilon(t),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\le\left(\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\phi\right)+\\&+a\left(u^\varepsilon(t),\phi\right)+j^\varepsilon(\phi)+\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)-(f^\varepsilon,\phi),\ \forall\phi\in K^\varepsilon\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2+a(u^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\right]\le\left(\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial t^2}(t),\phi\right)+\\&+a(u^\varepsilon(t),\phi)+j^\varepsilon(\phi)+\left(f^\varepsilon(t),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)-(f^\varepsilon(t),\phi),\end{aligned}$$

comme $\sum\limits_{i,j=1}^{3}|d_{ij}(v)|^2\le|\nabla(v)|^2$ et $|div(v)|^2\le 3|\nabla(v)|^2$, en intégrant en temps pour $s\in[0,t]$ on a,

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2+a(u^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t))\le\|u_1\|_{0,\Omega}^2+(2\mu+3\lambda)\|\nabla u_0\|_{0,\Omega}^2+\\&+2\int_0^t\left(\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial t^2}(s),\phi\right)ds+2\int_0^t a(u^\varepsilon(s),\phi)ds+2Tj^\varepsilon(\phi)+\\&+2\int_0^t\left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right)ds-2\int_0^t(f^\varepsilon(s),\phi)ds,\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

de l'inégalité de Korn, il existe C_K indépendant de ε telle que

$$2\mu C_K \left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \leq a(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \tag{2.3.9}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Young, il vient que

$$\begin{aligned} 2a(u^\varepsilon,\phi) & \leq \textstyle\int_{\Omega_\varepsilon} 4\mu \left|d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right|.\left|d_{ij}\left(\phi\right)\right| \; dx + 2\lambda \int_{\Omega_\varepsilon} \left|div\left(u^\varepsilon\right)\right|.\left|div\left(\phi\right)\right| \; dx \\ & \leq \textstyle\int_{\Omega_\varepsilon} 2\left(\sqrt{\frac{\mu C_K}{4}}\left|d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right|\right).\left(\sqrt{\frac{16\mu}{C_K}}\left|d_{ij}\left(\phi\right)\right|\right) \; dx + \\ & + \textstyle\int_{\Omega_\varepsilon} 2\left(\sqrt{\frac{\mu C_K}{12}}.\left|div\left(u^\varepsilon\right)\right|\right).\left(\lambda\sqrt{\frac{12}{\mu C_K}}.\left|div\left(\phi\right)\right|\right) \; dx \\ & \leq \frac{\mu C_K}{4}\textstyle\int_{\Omega_\varepsilon}\left|d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right|^2 dx + \frac{16\mu}{C_K}\int_{\Omega_\varepsilon}\left|d_{ij}\left(\phi\right)\right|^2 dx + \\ & + \frac{\mu C_K}{12}\textstyle\int_{\Omega_\varepsilon}\left|div\left(u^\varepsilon\right)\right|^2 dx + \frac{12\lambda^2}{\mu C_K}\int_{\Omega_\varepsilon}\left|div\left(\phi\right)\right|^2 \; dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2\int_0^t a(u^\varepsilon\left(s\right),\phi)ds & \leq \frac{\mu C_K}{2}\int_0^t \left\|\nabla u^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + \\ & + T\left(\frac{16\mu}{C_K} + \frac{36\lambda^2}{\mu C_K}\right)\left\|\nabla\phi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s),\phi\right)ds & = 2\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t),\phi\right) - 2\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0),\phi\right) \\ & \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + 3\left\|\phi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|u_1\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

comme

$$2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right)ds = 2(f^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)) - 2(f^\varepsilon(0),u_0) - 2\int_0^t\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s),u^\varepsilon(s)\right)ds$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient :

$$\left\|u^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} \leq \varepsilon\overline{h}\left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}$$

donc on a :

$$\begin{aligned} \left|2\int_0^t (f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s))ds\right| & \leq \mu C_K\left\|\nabla u^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|f^\varepsilon(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\ & + \varepsilon^2\overline{h}\left\|f^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \left\|\nabla u_0\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \frac{\mu C_K}{2}\int_0^t\left\|\nabla u^\varepsilon(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + \\ & + \frac{2\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

et

$$\left| -2\int_0^t (f^\varepsilon(s),\phi)ds \right| \leq \varepsilon^2\overline{h}^2 \int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + T\|\nabla\phi\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \tag{2.3.13}$$

En utilisant (2.3.9)-(2.3.13), on déduit que :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \mu C_K \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right] \leq 2\|u_1\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\
&+(1+2\mu+3\lambda)\|\nabla u_0\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + T\left(\frac{\mu C_K + 16\mu^2 + 36\lambda^2}{\mu C_K}\right)\|\nabla\phi\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\
&+3\|\phi\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + 2Tj^\varepsilon(\phi) + \varepsilon^2\overline{h}\|f^\varepsilon(0)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\|f^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\
&+\frac{2\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + \varepsilon^2\overline{h}^2\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + \\
&+\int_0^t \left[\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \mu C_K\|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right] ds
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

et comme $\varepsilon^2\|f^\varepsilon\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-1}\left\|\widehat{f}^\varepsilon\right\|_{0,\Omega}^2$ et $j^\varepsilon(\phi) = \varepsilon^{-1}\widehat{j}^\varepsilon(\phi)$, en multipliant (2.3.14) par ε on déduit :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \varepsilon\mu C_K\|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \leq A + \\
&+\int_0^t \left[\varepsilon\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \varepsilon\mu C_K\|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right] ds
\end{aligned}$$

où A est une constante qui ne dépend pas de ε

$$\begin{aligned}
A = &(1+2\mu+3\lambda)\|\nabla\widehat{u}_0\|_{0,\Omega}^2 + 2\|\widehat{u}_1\|_{0,\Omega}^2 + T\left(\frac{\mu C_K + 16\mu^2 + 36\lambda^2}{\mu C_K}\right)\left\|\nabla\widehat{\phi}\right\|_{0,\Omega}^2 + \\
&+3\left\|\widehat{\phi}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2T\widehat{j}(\widehat{\phi}) + \overline{h}\left\|\widehat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\widehat{f}^\varepsilon\right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 + \\
&+\frac{2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2 + \overline{h}^2\left\|\widehat{f}^\varepsilon\right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}^2
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\varepsilon\left(\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \|\nabla u^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right) \leq C$$

d'où la majoration (2.3.6).

Pour montrer l'estimation à priori (2.3.7), en dérivant (2.2.14) en t et on prend $\phi = \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)$

$$\left(\frac{\partial^3 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^3}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) + \\ + \left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)''\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) = \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right)$$

où $\left(\left(j_\zeta^\varepsilon\right)''\left(\dfrac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) \geq 0$, utilisant l'inégalité de Korn, on obtient

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + 2\mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\ +a\left(\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) + 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) - \\ -2\int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s), \frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds$$

d'où l'on déduit

$$\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + 2\mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \leq \left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\ + (2\mu + 3\lambda)\left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\ +\mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\ +\frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \int_0^t \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + \\ +\int_0^t \mu C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\zeta^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds \tag{2.3.15}$$

il faut estimer $\dfrac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$, on déduit de (2.2.14) et (2.2.10) que

$$\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right) = \left(f^\varepsilon(0), \phi\right) - a\left(u_\zeta^\varepsilon(0), \phi\right), \ \forall \phi \in K^\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \phi\right)\right| &\leq \left\|f^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} . \left\|\phi\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} + (2\mu + 3\lambda)\left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}\left\|\phi\right\|_{1,\Omega_\varepsilon} \\ &\leq \left(\varepsilon\overline{h}\left\|f^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon} + (2\mu + 3\lambda)\left\|u_\zeta^\varepsilon(0)\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}\right)\left\|\phi\right\|_{1,\Omega_\varepsilon} \end{aligned}$$

si en multipliant cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_\zeta^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega} \leq c \tag{2.3.16}$$

où $c = \overline{h}\left\|\widehat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{0,\Omega} + (2\mu + 3\lambda)\left\|\widehat{u}_0\right\|_{1,\Omega_\varepsilon}^2$ ne dépend pas de ε.
En passant à la limite en ζ dans (2.3.15), alors

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 &\leq \left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\
+ (2\mu + 3\lambda + \mu C_K)\left\|\nabla u_1\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 &+ \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \\
+\frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 &+ \int_0^T \frac{\varepsilon^2\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 ds + \\
+\int_0^t\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 \right. &\left. + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right] ds
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

En multipliant maintenant (2.3.17) par ε on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right] &\leq B + \\
+\int_0^t \varepsilon\left[\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + \mu C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2\right] ds &+
\end{aligned}$$

où B est une constante ne dépond de ε

$$\begin{aligned}
B = (2\mu + 3\lambda + \mu C_K)\left\|\nabla\widehat{u}_1\right\|_{0,\Omega_\varepsilon}^2 + (c)^2 + \frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0.T,L^2(\Omega))}^2 \\
+\frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\overline{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial^2\widehat{f}^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|_{L^2(0.T,L^2(\Omega))}^2
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Gronwall, il existe une constante C ne dépond pas de ε telle que

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 + \varepsilon\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \leq C$$

d'où (2.3.7).

2.3.2 Résultat de convergence et problème limite

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, il existe* $u_i^\star \in L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z), i = 1, 2$ *tel que pour toute sous suite de* $\widehat{u}^\varepsilon$ *notée encore* $\widehat{u}^\varepsilon$ *on a les résultats de convergences suivants faiblement dans* $L^2(0.T, V_z)$ et *faiblement* $\star$ *dans* $L^\infty(0.T, V_z)$

$$\widehat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star, \quad \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}, \quad i = 1, 2 \tag{2.3.18}$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon \dfrac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t} \rightharpoonup 0, \quad i, j = 1, 2 \\ \varepsilon \dfrac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \end{array} \tag{2.3.19}$$

$$\begin{array}{c} \varepsilon^2 \dfrac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i \partial t} \rightharpoonup 0, \quad i = 1, 2 \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \ \varepsilon \dfrac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z \partial t} \rightharpoonup 0 \text{ et } \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 \end{array} \tag{2.3.20}$$

Preuve.

D'après (2.3.3.), il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq C \qquad (1 \leq i \leq 2)$$

utilisant cette estimation et l'inégalité de Poincaré

$$\|\widehat{u}_i^\varepsilon\|_{0,\Omega} \leq \overline{h} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{0,\Omega}, \ i = 1, 2, 3$$

on déduit que la suite $(\widehat{u}_1^\varepsilon, \widehat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$, donc le résultat de convergence faible et faible $\star$.

de même d'après (2.3.10) et l'inégalité de Poincaré pour $\dfrac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}$, on déduit que $\left(\dfrac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \dfrac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$ et par suite converge vers une limite (l_1, l_2), et comme $\widehat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^\star, i = 1, 2$, donc $(l_1, l_2) = \left(\dfrac{\partial u_1^\star}{\partial t}, \dfrac{\partial u_2^\star}{\partial t}\right)$

Aussi les convergences (2.3.19), (2.3.20) découlent à partir de (2.3.6), (2.3.7) et (2.3.18).

□

Théorème 2.3.3. *Avec les mêmes hypothèses du théorème 2.3.2,* $u^\star$ *vérifie*

$$\begin{gathered}
\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_i-\frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right)dx'dz+\widehat{j}(\widehat{\phi})- \\
-\widehat{j}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial t}(t)\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_i(t)\,,\phi_i-\frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right),\quad \forall\widehat{\phi}\in\Pi(K) \\
u_i^\star(x',z,0)=\widehat{u}_{0,i},\quad \forall i=1,2
\end{gathered}\tag{2.3.21}$$

$$-\mu\frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t)=\widehat{f}_i(t)\,,\quad i=1,2 \text{ dans } L^2(\Omega)\tag{2.3.22}$$

Preuve. De (2.3.4) on a

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\,,\widehat{\phi}_i-\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\,,\widehat{\phi}_3-\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+ \\
\widehat{a}\left(\widehat{u}^\varepsilon(t)\,,\widehat{\phi}-\frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\widehat{j}(\widehat{\phi})-\widehat{j}\left(\frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\geq \\
\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\widehat{f}_i(t)\,,\widehat{\phi}_i-\frac{\partial\widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)+\varepsilon\left(\widehat{f}_3(t)\,,\widehat{\phi}_3-\frac{\partial\widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t)\right).
\end{gathered}\tag{2.3.23}$$

En utilisant les résultats de convergence du théorème 2.3.2 et le fait que $\widehat{j}$ est convexe et semi-continue inférieurement, on obtient

$$\begin{gathered}
\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial}{\partial z}\left(\widehat{\phi}_i-\frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\right)dx'dz+ \\
+\widehat{j}(\widehat{\phi})-\widehat{j}\left(\frac{\partial u^\star}{\partial t}(t)\right)\geq\sum_{i=1}^{2}(\widehat{f}_i(t)\,,\widehat{\phi}_i-\frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t))
\end{gathered}\tag{2.3.24}$$

D'après [9], nous pouvons choisir $\widehat{\phi}$ dans (2.3.24) tel que

$$\widehat{\phi}_i=\frac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t)\pm\varphi_i\quad i=1,2\quad\forall\varphi_i\in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\mu\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}dx'dz=\sum_{i=1}^{2}(\widehat{f}_i(t)\,,\varphi_i)\tag{2.3.25}$$

utilisant maintenant la formule de Green, et en choisissant $\varphi_1=0$ et $\varphi_2\in H_0^1(\Omega)$, puis $\varphi_2=0$ et $\varphi_1\in H_0^1(\Omega)$, on obtient.

$$\mu\frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t)=\widehat{f}_i(t)\text{ pour } i=1,2 \text{ dans } H^{-1}(\Omega)\tag{2.3.26}$$

et comme $\widehat{f}_i(t)\in L^2(\Omega),\forall t\in[0,T]$, alors (2.3.26) devient (2.3.22).

Théorème 2.3.4. *Sous les hypothèses que le théorème précédent, les traces*

$$s^\star = u^\star(x',0,t) \qquad \pi^\star = \frac{\partial u^\star}{\partial z}(x',0,t),$$

vérifient

$$\int\limits_\omega \widehat{k}\ \left(\left|\psi_\tau + \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau\right| - \left|\left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau\right|\right) dx' - \int\limits_\omega \mu\pi^\star\psi dx' \geq 0, \forall\psi \in L^2(\omega)^2 \tag{2.3.27}$$

et la condition au limite de Tresca suivante

$$\begin{array}{l} \mu\left|\pi^\star\right| < \widehat{k} \Rightarrow \dfrac{\partial s^\star}{\partial t} = 0 \\ \mu\left|\pi^\star\right| = \widehat{k} \Rightarrow \exists\ \beta \geq 0 \ \textit{tel que}\ \dfrac{\partial s^\star}{\partial t} = \beta\pi^\star \end{array} \quad \textit{p.p sur} \quad \omega\times]0,T[\tag{2.3.28}$$

aussi $\pi^\star, s^*$ *vérifient l'équation généralisée faible de Reynolds*

$$\int\limits_\omega \left(\widetilde{\mathcal{F}} - \frac{h}{2}s^\star + \int\limits_0^h u^\star(x',y,t)dy\right)\nabla\psi(x')dx' = 0, \forall\psi \in H^1(\omega) \tag{2.3.29}$$

où $\mathcal{F}(x',y,t) = \int\limits_0^y\int\limits_0^\xi \widehat{f}(x',\alpha,t)d\alpha d\xi$ *et*

$\widetilde{\mathcal{F}}(x',t) = \dfrac{1}{\mu}\int\limits_0^h \mathcal{F}(x',y,t)dy - \dfrac{h}{2\mu}\mathcal{F}(x',h,t)$

Preuve. En utilisant le[19], on peut choisir $\widehat{\phi}$ dans (2.3.21) tel que $\widehat{\phi}_i = \dfrac{\partial u_i^\star}{\partial t}(t) + \psi_i$ pour $i = 1,2$, où $\psi \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega)^2$ avec,

$$H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1\cup\Gamma_2\right\},$$

donc

$$\mu\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial\psi_i}{\partial z}dx'dz + \widehat{j}\left(\psi + \frac{\partial s^\star}{\partial t}(t)\right) - \widehat{j}\left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}(t)\right) \geq \sum_{i=1}^2 (\widehat{f}_i(t), \widehat{\phi}_i - \psi_i)$$

et comme $\nu = (0,0,-1)$ sur ω, en utilisant la formule de Green, il vient que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \left\{-\mu\frac{\partial^2 u_i^\star}{\partial z^2}(t)\right\}.\psi_i dx'dz + \int\limits_\omega \widehat{k}\ \left(\left|\psi_\tau + \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau\right| - \left|\left(\frac{\partial s^\star}{\partial t}\right)_\tau\right|\right) dx' - \\ &\qquad - \int\limits_\omega \mu\pi^\star(t)\,\psi dx' \geq \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \widehat{f}_i(t)\,.\psi_i dx'dz \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

en utilisant (2.3.22), on déduit que pour tout $\psi \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega)^2$

$$\int\limits_{\omega} \widehat{k} \left(\left| \psi_\tau + \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t} \right)_\tau \right| - \left| \left(\frac{\partial s^\star}{\partial t} \right)_\tau \right| \right) dx' - \int\limits_{\omega} \mu \pi^\star \psi dx' \geq 0$$

cette inégalité reste valable pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\omega)^2$, et par la densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $L^2(\omega)$ on déduit (2.3.27).

Nous obtenons aussi (2.3.28) comme dans [19].

Pour prouver (2.3.29), on intégre deux fois (2.3.22) entre 0 et z, on obtient

$$-\mu u_i^\star(x', z, t) \ + \mu s_i^\star + \mu z \pi_i^\star = \int\limits_0^z \int\limits_0^\xi \widehat{f}_i(x', y, t) dy d\xi, i = 1, 2, \qquad (2.3.31)$$

en particulier pour $z = h$, donc

$$\mu s_i^\star + \mu h \pi_i^\star = \int\limits_0^h \int\limits_0^\xi \widehat{f}_i(x', y, t) dy d\xi, \ i = 1, 2, \qquad (2.3.32)$$

Intégrant (2.3.31) entre 0 et h, on obtient

$$-\mu \int\limits_0^h u^\star(x', y, t) dy \ + \mu s^\star h + \mu \frac{h^2}{2} \pi_i^\star = \int\limits_0^h \mathcal{F}(x', y, t) dy \qquad (2.3.33)$$

avec

$$\mathcal{F}(x', y, t) = \int\limits_0^y \int\limits_0^\xi \widehat{f}(x', \alpha, t) d\alpha d\xi \ , \ i = 1, 2$$

de (2.3.32)-(2.3.33), on déduit (2.3.29).□

Théorème 2.3.5. *La solution $u^\star$ du problème limite (2.3.2.4)-(2.3.2.5) est unique dans* $L^2(0.T, V_z) \cap L^\infty(0.T, V_z)$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions $u^\star$ et $u^{\star\star}$ *de (2.3.2.4)-(2.3.2.5)*, alors

$$\begin{aligned} &\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^\star}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{\phi}_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t} \right) dx' dz + \\ &+ \widehat{j}(\widehat{\phi}) - \widehat{j} \left(\frac{\partial u^\star}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^2 (\widehat{f}_i, \phi_i - \frac{\partial u_i^\star}{\partial t}), \quad \forall \widehat{\phi} \in \Pi(K) \end{aligned} \qquad (2.3.34)$$

$$\begin{aligned} &\mu \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^{\star\star}}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\widehat{\phi}_i - \frac{\partial u_i^{\star\star}}{\partial t} \right) dx' dz + \\ &+ \widehat{j}(\widehat{\phi}) - \widehat{j} \left(\frac{\partial u^{\star\star}}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^2 (\widehat{f}_i, \phi_i - \frac{\partial u_i^{\star\star}}{\partial t}), \quad \forall \widehat{\phi} \in \Pi(K) \end{aligned} \qquad (2.3.35)$$

on prend $\widehat{\phi} = \dfrac{\partial u^{\star\star}}{\partial t}(t)$ dans (2.3.34), puis $\widehat{\phi} = \dfrac{\partial u^{\star}}{\partial t}(t)$ dans (2.3.35) et en sommant les deux inéquations, il vient pour $\overline{W} = (u^{\star})(t) - (u^{\star\star})(t)$

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_i\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial t}\right) dx' dz \leq 0$$

ceci implique

$$\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}\right)\right\|_{0,\Omega}^{2} \leq 0$$

comme $\overline{W}(0) = 0$, donc $\left\|\dfrac{\partial}{\partial z}\overline{W}(t)\right\|_{0,\Omega}^{2} = 0$, utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\left\|\overline{W}\right\|_{L^2(0.T,V_z)} = \left\|\overline{W}\right\|_{L^\infty(0.T,V_z)} = 0. \qquad \square$$

Chapitre 3

Analyse asymptotique d'un problème dynamique d'Élasticité linéaire non isotherme avec frottement

Contenu

3.1 Position du problème

On considére un problème associé à des déformations d'un corps homogène élastique et isotrope en régime dynamique dans le domaine mince $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ dont une partie de sa frontière est soumise à des conditions de frottement et une autre partie est soumise à des conditions de Dirichlet, où $0 < \varepsilon < 1$ est un réel positif destiné à tendre vers zéro. La frontière de Ω_ε sera notée $\Gamma^\varepsilon = \overline{\Gamma}_1^\varepsilon \cup \overline{\Gamma}_L^\varepsilon \cup \overline{\omega}$, avec Γ_1^ε est la frontière supérieure d'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$, Γ_L^ε est la frontière latérale, ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$ qui constitue la frontière inférieure du domaine Ω_ε. On suppose que h est une fonction de classe C^1 définie sur ω telle que

$$0 < h_{\min} \leq h(x') \leq h_{\max} = \overline{h} \quad \forall (x', 0) \in \omega.$$

On note $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le domaine Ω_ε est donné par

$$\Omega_\varepsilon = \{(x',\, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ (x', 0) \in \omega, \quad 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

Soit $T > 0$, $u^\varepsilon(x,t)$ est la vitesse de déplacement du corps élastique au point x et à l'instant $t \in [0, T]$. On désigne par $D = (d_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des taux de déformations avec

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

On suppose que la loi de comportement suit la loi de Hooke, écrite avec la convention d'Einstein

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda d_{kk}(u^\varepsilon)\,\delta_{ij}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Krönecker.

Les équations qui gouvernent les déformations d'un corps homogène élastique isotrope en *régime dynamique* dans le domaine Ω_ε sont les suivantes [1]

$$\frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^\varepsilon + f_i^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\tag{3.1.1}$$

où f^ε représente une densité massique des forces extérieures.

On utilise les notations usuelles

$$u_\nu^\varepsilon = u^\varepsilon.\nu \qquad u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_\nu^\varepsilon.\nu \qquad \sigma_\nu^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon.\nu).\nu, \qquad \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma^\varepsilon.\nu - (\sigma_\nu^\varepsilon).\nu$$

où ν désigne le vecteur unitaire normal à Γ^{ε} extérieur à Ω_{ε}.

Nous supposons que la vitesse est connue sur $\Gamma_1^{\varepsilon} \times]0,T[$ et sur $\Gamma_L^{\varepsilon} \times]0,T[$

$$u^{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \Gamma_1^{\varepsilon} \times]0,T[\tag{2.1.2}$$

$$u^{\varepsilon} = g \text{ sur } \Gamma_L^{\varepsilon} \times]0,T[\tag{2.1.3}$$

où $g = (g_1, g_2, g_3)$ est une fonction ne dépend pas de t, avec $g_3 = 0$.

Sur ω la vitesse est supposée inconnue et elle vérifie la condition suivante

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}.\nu = 0 \text{ sur } \omega \times]0,T[\tag{2.1.4}$$

Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω, ce frottement est modélisé par la loi non linéaire de Tresca [1]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_{\tau}^{\varepsilon}| < k^{\varepsilon} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} = 0 \\ |\sigma_{\tau}^{\varepsilon}| = k^{\varepsilon} \Rightarrow \exists\ \beta \geq 0 \text{ tel que } \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} = -\beta\sigma_{\tau}^{\varepsilon} \end{array}\right\} \text{sur } \omega \times]0,T[\tag{2.1.5}$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, et k^{ε} est une fonction donnée.

Le problème consiste donc à trouver un champ de vitesse de déplacement u^{ε} vérifiant les équations et les conditions aux limites suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d^2u^{\varepsilon}}{dt^2} = 2\mu Div\ (D(u^{\varepsilon})) + \lambda div u^{\varepsilon} + f^{\ \varepsilon} & \text{dans } \ \Omega_{\varepsilon} \times]0,T[\,, \\ \sigma_{ij}^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) = 2\mu d_{ij}(u^{\varepsilon}) + \lambda d_{kk}(u^{\varepsilon})\,\delta_{ij} & \text{dans } \ \Omega_{\varepsilon} \\ u^{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_1^{\varepsilon} \times]0,T[\,, \\ u^{\varepsilon} = g & \text{sur } \ \Gamma_L^{\varepsilon} \times]0,T[\,, \\ \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}.\nu = 0 & \text{sur } \ \omega \times]0,T[\,, \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_{\tau}^{\varepsilon}| < k^{\varepsilon} \Longrightarrow \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} = 0 \\ |\sigma_{\tau}^{\varepsilon}| = k^{\varepsilon} \Longrightarrow \exists\beta > 0 \ tel\ que\ \left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} = -\beta\sigma_{\tau}^{\varepsilon} \end{array}\right\} & \text{sur } \omega \times]0,T[\,, \\ u^{\varepsilon}(0) = u_0 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(0) = u_1. & (2.1.6) \end{array}\right.$$

Lemme 2.1.1. *La condition (2.1.5) sur* $\omega \times]0,T[$ *est équivalente à la condition suivante* :

$$\frac{\partial u_{\tau}^{\varepsilon}}{\partial t} \cdot \sigma_{\tau}^{\varepsilon} + k^{\varepsilon} \cdot \left|\frac{\partial u_{\tau}^{\varepsilon}}{\partial t}\right| = 0. \tag{2.1.7}$$

Preuve.

- Supposons que u^ε vérifie la condition aux limites de tresca (2.1.5).
  - ▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors $\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = 0$, d'où (2.1.7)
  - ▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$ alors il existe $\beta \geq 0$ tel que $\left(\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$, d'où

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = -\beta\left|\sigma_\tau^\varepsilon\right|^2 + \beta\left|\sigma_\tau^\varepsilon\right|^2 = 0.$$

- Réciproquement, on suppose que $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0.$
  - ▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| = k^\varepsilon$, alors de (2.1.7) on a

$$\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon = -\left|\sigma_\tau^\varepsilon\right| \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right|$$

d'où l'existence d'un $\beta \geq 0$ tel que $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = -\beta\sigma_\tau^\varepsilon$

▷ Si $|\sigma_\tau^\varepsilon| < k^\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \cdot \sigma_\tau^\varepsilon + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| = 0 \quad &\geq -\left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \cdot \left|\sigma_\tau^\varepsilon\right| + k^\varepsilon \cdot \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \\ &\geq \left|\frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}\right| \left(k^\varepsilon - \left|\sigma_\tau^\varepsilon\right|\right)\end{aligned}$$

et comme $k^\varepsilon - |\sigma_\tau^\varepsilon| > 0$, d'où $\dfrac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} = 0.\square$

3.2 Formulation variationnelle du problème

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)^3 = \left\{v \in \left(L^2\left(\Omega_\varepsilon\right)\right)^3 : \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2\left(\Omega_\varepsilon\right),\ \forall i, j = 1, 2, 3\right\}.$$

Nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)^3$, par :

$$K^\varepsilon = \left\{\varphi \in \left(H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)\right)^3 : \varphi = 0 \ sur\ \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \text{ et } \varphi.\nu = 0 \ sur\ \omega\right\}.$$

On note par $H^1_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}\left(\Omega_\varepsilon\right)$ le sous espace vectoriel de $H^1\left(\Omega_\varepsilon\right)$:

$$H^1_{\Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon}\left(\Omega_\varepsilon\right) = \left\{\varphi \in H^1\left(\Omega_\varepsilon\right) : \varphi = 0 \quad sur\ \Gamma_L^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon\right\}.$$

On introduit également les notations suivantes :

$$a(T,u,v)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^{\varepsilon}}2u^{\varepsilon}(T)\,d_{ij}(u)\,d_{ij}(v)\,dxdx_3+\int_{\Omega^{\varepsilon}}\lambda^{\varepsilon}(T)\,div(u).div(v)\,dxdx_3; \quad (3.2.1)$$

$$(f^{\varepsilon},v)=\int_{\Omega_{\varepsilon}}f^{\varepsilon}v\,dxdx_3=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}}f_i^{\varepsilon}v_i\,dxdx_3; \quad (3.2.2)$$

$$J^{\varepsilon}(v)=\int_{\omega}k^{\varepsilon}\left|v_{\tau}\right|dx; \quad (3.2.3)$$

$$b(T,\psi)=\int_{\Omega_{\varepsilon}}K^{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial x_i}.\frac{\partial \psi}{\partial x_i}dxdx_3; \quad (3.2.4)$$

$$C(u;T,\psi)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega_{\varepsilon}}2u^{\varepsilon}(T)\,d_{ij}^{2}(u)\,\psi dxdx_3+\int_{\Omega^{\varepsilon}}\lambda^{\varepsilon}(T)\,div(u).div(u)\,\psi dxdx_3+\int_{\Omega_{\varepsilon}}r^{\varepsilon}(T)\,\psi dxdx_3. \quad (3.2.5)$$

Lemme 3.2.1. *Si u^{ε} et T^{ε} sont les solution du problème* (pb^{ε})*, alors elles vérifient le problème variationnel* :

$$\left\{\begin{array}{l}
\textit{Trouver } u^{\varepsilon} \text{ où } \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\in K^{\varepsilon}(\Omega_{\varepsilon}) \text{ et } T^{\varepsilon}\in H^{1}_{\Gamma_1^{\varepsilon}\cup\Gamma_L^{\varepsilon}}(\Omega_{\varepsilon}) \textit{ telle que} \\
\qquad\left(\dfrac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t),\varphi-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+a\left(T^{\varepsilon};u^{\varepsilon},\varphi-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+J^{\varepsilon}(\varphi)- \\
\qquad -J^{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)\geq\left(f^{\varepsilon},\varphi-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right),\ \forall\varphi\in K^{\varepsilon} \\
u^{\varepsilon}(0)=u_0 \text{ et } \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(0)=u_1 \\
\qquad b(T^{\varepsilon},\psi)=C(u^{\varepsilon};T^{\varepsilon},\psi),\quad \forall\psi\in H^{1}_{\Gamma_1^{\varepsilon}\cup\Gamma_L^{\varepsilon}}.
\end{array}\right. \quad (3.2.6)$$

Preuve. En multipliant l'équation (3.1.1) par $\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)$, où $\varphi\in K^{\varepsilon}$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{array}{c}\left(\dfrac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t),\varphi-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+\int_{\Omega_{\varepsilon}}\sigma_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)dxdx_3- \\
-\int_{\Gamma^{\varepsilon}}\sigma_{ij}^{\varepsilon}\nu_j\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)ds=\int_{\Omega_{\varepsilon}}f_i^{\varepsilon}\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)dxdx_3.\end{array}$$

D'après les condition aux limites, on a :

$$\begin{array}{c}\left(\dfrac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t),\varphi-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)+\int_{\Omega_{\varepsilon}}\sigma_{ij}^{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)dxdx_3- \\
-\int_{\omega}\sigma_i^{\varepsilon}\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)ds=\int_{\Omega_{\varepsilon}}f_i^{\varepsilon}\left(\varphi_i-\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right)dxdx_3\end{array}$$

En utilisant le lemme (3.1.1), on trouve :

$$\begin{array}{c}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \varphi - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3 + \\ + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \int_{\Omega_\varepsilon} f_i^\varepsilon \left(\varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) dx dx_3\end{array}.$$

En remplaçant σ_{ij}^ε par l'expression (3.1.3), on voit que :

$$a\left(T; u^\varepsilon(t), \varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) + J^\varepsilon(\varphi) - J^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \geq \left(f^\varepsilon, \varphi_i - \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \ \forall \varphi \in K^\varepsilon. \quad (3.2.7)$$

En multipliant l'équation (3.1.4) par $\psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3 = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} 2u^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon) \psi dx dx_3 + \int_{\Gamma^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial \nu_i} \psi ds +$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} r^\varepsilon(T^\varepsilon) \psi dx dx_3 +$$

Maintenant les conditions aux limites (3.1.9) et (3.1.10), nous donnons :

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} K^\varepsilon \frac{\partial T^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dx_3 = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} 2u^\varepsilon(T^\varepsilon) d_{ij}^2(u^\varepsilon) \psi dx dx_3 + 3.2.8$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} r^\varepsilon(T^\varepsilon) \psi dx dx_3 + + \int_{\Omega^\varepsilon} \lambda^\varepsilon(T^\varepsilon)\, c$$

c'est-à-dire

$$b(T^\varepsilon, \psi) = C(u^\varepsilon; T^\varepsilon, \psi), \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon}. \quad \square$$

3.3 Analyse asymptotique du problème

Pour l'analyse asymptotique du problème, nous utilisons le changement d'échelle $z = \dfrac{x_3}{\varepsilon}$, et donc le domaine Ω_ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε définit par :

$$\Omega = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3, (x,0) \in \omega \; et \; 0 < z < h\left(x\right)\right\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_1$, sa frontière.

À la suite de ce changement d'échelle, nous notons par $\hat{u}^\varepsilon$ et $\hat{T}^\varepsilon$, les inconnues définies sur Ω.

De plus, on définit sur Ω les fonctions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{c} u_i^\varepsilon\left(x, x_3, t\right) = \hat{u}_i^\varepsilon\left(x, z, t\right), \quad i = 1,2 \\ \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon\left(x, x_3, t\right) = \hat{u}_3^\varepsilon\left(x, z, t\right), \\ T^\varepsilon\left(x, x_3\right) = \hat{T}^\varepsilon\left(x, z\right). \end{array}\right. \tag{3.3.1}$$

Pour les données, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{gathered} \hat{u} = u^\varepsilon, \; \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \quad \hat{f}\left(x, z, t\right) = \varepsilon^2 f^\varepsilon\left(x, x_3, t\right) \text{ et } \hat{g}\left(x, z, t\right) = g\left(x, x_3, t\right), \\ \left(\hat{u}_0\right)_i\left(x, z\right) = \left(u_0\right)_i\left(x, x_3\right), \; \left(\hat{u}_0\right)_3\left(x, z\right) = \varepsilon^{-1}\left(u_0\right)_3\left(x, x_3\right) \end{gathered} \tag{3.3.2}$$

$$\hat{K} = K^\varepsilon \text{ et } \; \hat{r} = \varepsilon^2 r^\varepsilon \tag{3.3.3}$$

avec $\hat{u}$, $\hat{f}$, $\hat{K}$, $\hat{k}$ et $\hat{g}$ indépendant de ε.

Ainsi le relèvement G^ε de g est défini par

$$\begin{gathered} \hat{G}_i\left(x, z, t\right) = G_i^\varepsilon\left(x, x_3, t\right), \; i = 1,2 \\ \varepsilon \hat{G}_3\left(x, z, t\right) = G_3^\varepsilon\left(x, x_3, t\right). \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Nous introduisons maintenant le cadre fonctionnel sur Ω. Pour cela, on note :

$$K = \left\{v \in \left(H^1\left(\Omega\right)\right)^3 : v = \hat{G} \; sur \; \Gamma_L \cup \Gamma_1, \; v.\nu = 0 \; sur \; \omega\right\}.$$

$$\Pi\left(K\right) = \left\{\varphi \in H^1\left(\Omega\right)^2 : \varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2\right), \; \varphi_i = \hat{G}_i \; sur \; \Gamma_L \cup \Gamma_1, \; i = 1,2\right\}.$$

$$V_z = \left\{v = \left(v_1, v_2\right) \in L^2\left(\Omega\right)^2 : \frac{\partial v_i}{\partial z} \in L^2\left(\Omega\right), \; i = 1,2; \; v = 0 \; sur \; \Gamma_1\right\}.$$

Il est clair que V_z est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\left\|v\right\|_{V_z} = \left(\sum_{i=1}^{2} \left\|v_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial v_i}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avec le changement d'échelle défini dans (3.3.1) et (3.3.2) le problème (3.2.6) devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver le champ de vitesse } \hat{u}^\varepsilon \text{ dans } K \text{ et la température } \hat{T}^\varepsilon \text{ dans } H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega) \text{ tels que} \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_i - \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \varepsilon^4 \left(\dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}(t), \hat{\varphi}_3 - \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + a\left(\hat{T}^\varepsilon; \hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \\ \quad + J(\hat{\varphi}) - J\left(\dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \geq \left(\hat{f}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right), \quad \forall \hat{\varphi} \in K \qquad (3.3.5) \\ b\left(\hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi} \right) = C\left(\hat{u}^\varepsilon; \hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi} \right), \quad \forall \hat{\psi} \in H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega) \qquad (3.3.6) \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} J(\hat{\varphi}) &= \textstyle\int_\omega \hat{k}\,|\hat{\varphi}_\tau|\,dx\ , \\ a\left(\hat{T}^\varepsilon; \hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \hat{u}^\varepsilon \right) &= \varepsilon^2 \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \hat{u}\left(\hat{T}^\varepsilon \right) \left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{\varphi}_i - \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz + \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{u}\left(\hat{T}^\varepsilon \right) \left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left[\dfrac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) + \varepsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{\varphi}_i - \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \right] dxdz + \\ &+ 2\varepsilon^2 \textstyle\int_\Omega \hat{u}\left(\hat{T}^\varepsilon \right) \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} . \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_3 - \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz + \varepsilon^2 \int_\Omega \widehat{\lambda} \left(\hat{T}^\varepsilon \right) div\left(\hat{u}^\varepsilon \right) .div \left(\hat{\varphi} - \dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{f}^\varepsilon, \hat{\varphi} - \dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) &= \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i^\varepsilon \left(\hat{\varphi} - \dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz + \varepsilon \int_\Omega \hat{f}_3^\varepsilon \left(\hat{\varphi}_3 - \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) dxdz \\ b\left(\hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi} \right) &= \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \hat{K} \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i} \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_i} dxdz + \int_\Omega \hat{K} \dfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z} \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} dxdz \\ C\left(\hat{u}^\varepsilon; \hat{T}^\varepsilon, \hat{\psi} \right) &= \textstyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{1}{2} \int_\Omega \varepsilon^2 \hat{u} \left(\hat{T}^\varepsilon \right) \left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \psi dxdz + \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{1}{2} \int_\Omega \hat{u} \left(\hat{T}^\varepsilon \right) \left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right)^2 \psi dxdz + \\ &+ \textstyle\sum_{j=1}^{2} \dfrac{1}{2} \int_\Omega \hat{u} \left(\hat{T}^\varepsilon \right) \left(\varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \psi dxdz + \\ &+ \textstyle\int_\Omega 2\varepsilon^2 \hat{u} \left(\hat{T}^\varepsilon \right) \left(\dfrac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega r\left(\hat{T}^\varepsilon \right) \psi dxdz + \\ &+ \textstyle\int_\Omega \varepsilon^2 \hat{\lambda}^\varepsilon \left(\hat{T}^\varepsilon \right) div\left(\hat{u}^\varepsilon \right) .div \left(\hat{u}^\varepsilon \right) \psi dx_3 dz. \end{aligned}$$

3.3.1 Estimations à priori

Nous allons établir des estimations sur la vitesse $\hat{u}^{\varepsilon}$, puis sur la température $\hat{T}^{\varepsilon}$ solution de notre problème variationnel.

a)Estimation à priori sur la vitesse

Lemme 3.3.1. *Supposons que $f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$, le coefficient de frottement $k > 0$ dans $L^{\infty}(\omega)$ et qu' il existe les constantes μ_*, μ^*, λ_* et λ^* telles que*

$$\begin{aligned} &0 < \mu_* \leq \mu(a) \leq \mu^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \\ &0 < \lambda_* \leq \lambda(b) \leq \lambda^*, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

alors, il existe une constante strictement positive C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \left\| \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{2} \left(\left\| \dfrac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \dfrac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i,j=1}^{2} \left\| \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^{2} \left(\left\| \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i \partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \varepsilon \dfrac{\partial^2 \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Preuve. Soit u^{ε} la solution du problème $(3.2.6)$, donc :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right) + a\left(T^{\varepsilon}; u^{\varepsilon}(t), \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right) \leq \left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t), \varphi \right) + a\left(T^{\varepsilon}; u^{\varepsilon}(t), \varphi \right) + \\ &+ J^{\varepsilon}(\varphi) - \textstyle\int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i^{\varepsilon} \varphi_i dx dx_3 + \textstyle\int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i^{\varepsilon} \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) dx dx_3, \ \forall \varphi \in K^{\varepsilon} \end{aligned}$$

car $J^{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right)$ est positive.
Alors

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|^2 + a\left(T^{\varepsilon}; u^{\varepsilon}(t), \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) \right) \right) \leq \left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}(t), \varphi \right) + a\left(T^{\varepsilon}; u^{\varepsilon}(t), \varphi \right) + \\ &+ J^{\varepsilon}(\varphi) - \textstyle\int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i^{\varepsilon} \varphi_i dx dx_3 + \textstyle\int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i^{\varepsilon} \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t) dx dx_3, \ \forall \varphi \in K^{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

En intégrant (3.3.10) en temps pour $s \in [0,t]$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2 + a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon(t), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2 + a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon(0), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)\right)\right) +$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s), \varphi\right) ds + \int_0^t a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon(s), \varphi\right) ds + tJ^\varepsilon(\varphi) -$$
$$- \int_0^t \left(f_i^\varepsilon(s), \varphi_i\right) ds + \int_0^t \left(f_i^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds$$

et comme

$$\sum_{i,j=1}^{2} |d_{ij}(u^\varepsilon)|^2 \leq |\nabla u^\varepsilon|^2 \quad et \quad |div(u^\varepsilon)|^2 \leq |\nabla u^\varepsilon|^2$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2 + a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon(t), \partial u^\varepsilon(t)\right)\right) \;\; \leq \;\; & \frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2 + (2\mu_* + \lambda_*)\|\nabla u_0\|^2\right) + \\ & + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s), \varphi\right) ds + \int_0^t a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon(s), \varphi\right) ds + \\ & + tJ^\varepsilon(\varphi) - \int_0^t \left(f_i^\varepsilon(s), \varphi_i\right) ds + \int_0^t \left(f_i^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Korn, il existe C_K indépendant de ε telle que :

$$a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)\right) \geq 2\mu_* C_K \|\nabla u^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.11}$$

En appliquant les inégalités de Hölder et de Yong, on obtient :

$$\begin{aligned} a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon, \varphi\right) \;\; \leq \;\; & \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu^\varepsilon(T^\varepsilon)\,|d_{ij}(u^\varepsilon)|\,.\,|d_{ij}(\varphi)|\,dxdx_3 + \lambda^\varepsilon(T^\varepsilon)\int_{\Omega_\varepsilon} |div(u^\varepsilon)|\,.\,|div(\varphi)|\,dxdx_3 \\ \leq \;\; & \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu^*\,|d_{ij}(u^\varepsilon)|\,.\,|d_{ij}(\varphi)|\,dxdx_3 + \int_{\Omega_\varepsilon} \lambda^*\,|div(u^\varepsilon)|\,.\,|div(u^\varepsilon)|\,dxdx_3 \\ \leq \;\; & \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_* C_K}{2}}\,|d_{ij}(u^\varepsilon)|\right)\left(\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{2\sqrt{2}\mu^*}{\sqrt{\mu_* C_K}}\,|d_{ij}(\varphi)|\,dxdx_3\right) + \\ & + \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\sqrt{\mu_* C_K}}{2}\,|div(u^\varepsilon)|\right)\left(\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{2\lambda^*}{\sqrt{\mu_* C_K}}\,|div(\varphi)|\,dxdx_3\right)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\mu_* C_K}{4} \left\| d_{ij}\left(u^\varepsilon\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{4\left(\mu^*\right)^2}{\mu_* C_K} \left\| d_{ij}\left(\varphi\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ + \frac{\mu_* C_K}{8} \int_{\Omega_\varepsilon} \left| div\left(u^\varepsilon\right)\right|^2 dx dx_3 + \frac{2\left(\lambda^*\right)^2}{\mu_* C_K} \int_{\Omega_\varepsilon} \left| div\left(\varphi\right)\right|^2 dx dx_3.$$

donc :

$$\int_0^t a\left(T^\varepsilon; u^\varepsilon\left(s\right), \varphi\right) ds \leq \frac{3\mu_* C_K}{8} \int_0^t \left\| \nabla u^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds + t\left(\frac{4\left(\mu^*\right)^2}{\mu_* C_K} + \frac{2\left(\lambda^*\right)^2}{\mu_* C_K}\right) \left\| \nabla\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.3.12}$$

$$\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\left(s\right), \varphi\right) ds = \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right), \varphi\right) - \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(0\right), \varphi\right) \leq \tfrac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \tfrac{1}{2}\left\| u_1\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.3.13}$$

comme

$$\int_0^t \left(f^\varepsilon\left(s\right), \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right) ds = \left(f^\varepsilon\left(t\right), u^\varepsilon\left(t\right)\right) - \left(f^\varepsilon\left(0\right), u^\varepsilon\left(0\right)\right) - \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon\left(s\right)}{\partial t}, u^\varepsilon\left(s\right)\right) ds \tag{3.3.14}$$

En utilisant $(3.3.11) - (3.3.14)$, on a :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\| \nabla u^\varepsilon\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\| u_1\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ + \left(\frac{1}{2} + 2\mu_* + \lambda\right) \left\| u_0\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + t\left(\frac{\mu_* C_K + 4\mu^{*2} + 2\left(\lambda^*\right)^2}{\mu_* C_K}\right) \left\| \nabla\varphi\right\|^2_{L^\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} + \\ + \left\|\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + tJ\left(\varphi\right) + \tfrac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2} \left\| f^\varepsilon\left(0\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_* C_K} \left\| f^\varepsilon\left(t\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2\mu_* C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds + \frac{\left(\varepsilon h^*\right)^2}{2} \int_0^t \left\| f^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds + \\ + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\| \nabla u^\varepsilon\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\right) ds. \tag{3.3.15}$$

En multipliant (3.3.15) par ε et en utilisant les égalités :

$$\varepsilon^2 \left\| f^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} \left\| \hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_3}\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

on obtient:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^{2}+\varepsilon\mu_{*}C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega_{\varepsilon})}^{2}\leq A+$$
$$+\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{L^{2}(\Omega_{\varepsilon})}^{2}+\varepsilon\mu_{*}C_{K}\left\|\nabla u^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{\varepsilon}(\Omega_{\varepsilon})}^{2}\right)ds$$

avec :

$$A=\left\|\hat{u}_{1}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\left(\tfrac{1}{2}+2\mu_{*}+\lambda\right)\left\|\hat{u}_{0}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+t\left(\frac{\mu_{*}C_{K}+4\mu^{*2}+2\left(\lambda^{*}\right)^{2}}{\mu_{*}C_{K}}\right)\left\|\nabla\hat{\varphi}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+$$
$$+\left\|\hat{\varphi}\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+t\hat{J}\left(\hat{\varphi}\right)+\frac{\left(h^{*}\right)^{2}}{2}\left\|\hat{f}^{\varepsilon}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+\frac{\left(h^{*}\right)^{2}}{2\mu_{*}C_{K}}\left\|\hat{f}^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+$$
$$+\frac{\left(h^{*}\right)^{2}}{2\mu_{*}C_{K}}\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial\hat{f}^{\varepsilon}}{\partial t}(s)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}ds+\frac{\left(h^{*}\right)^{2}}{2}\int_{0}^{t}\left\|\hat{f}^{\varepsilon}(s)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}ds.$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right\|^{2}+\varepsilon\left\|\nabla u^{\varepsilon}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega_{\varepsilon})}^{2}\leq C$$

Donc la première estimation est démontrée. □

Pour montrer l'estimation à priori (3.3.9), on régularise la fonctionnelle J^{ε}, en posant

$$J_{\xi}^{\varepsilon}(u)=\int_{\omega}k^{\varepsilon}(x,t)\,\varphi_{\xi}\left(\left|u_{\tau}\right|^{2}\right)dx,\ \ ou\ \varphi_{\xi}(\lambda)=\frac{1}{1+\xi}\left|\lambda\right|^{(1+\xi)}\qquad\xi>0.$$

On considère l'équation approchée suivante

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^{2}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t),\varphi\right)+a\left(T^{\varepsilon};u_{\xi}^{\varepsilon},\varphi\right)+\left(\left(J_{\xi}^{\varepsilon}\right)'\left(\frac{\partial u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right),\varphi\right)=\left(f^{\varepsilon},\varphi\right),\ \forall\varphi\in K^{\varepsilon}\\ u_{\xi}^{\varepsilon}(0)=u_{0},\ \frac{\partial u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t}(0)=u_{1}\end{gathered}\tag{3.3.16}$$

maintenant en dérivant (3.3.16) en t et on prend $\varphi=\dfrac{\partial^{2}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t)$

$$\left(\frac{\partial^{3}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{3}}(t),\frac{\partial^{2}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t)\right)+a\left(T^{\varepsilon};\frac{\partial u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t}(t),\frac{\partial^{2}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t)\right)+$$
$$+\left(\left(J_{\xi}^{\varepsilon}\right)''\left(\tfrac{\partial u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t}(t)\right),\frac{\partial^{2}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t)\right)=\left(f^{\varepsilon},\frac{\partial^{2}u_{\xi}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}(t)\right),$$

et comme $\left(\left(J_\xi^\varepsilon\right)''\left(\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right), \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) > 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + a\left(T^\varepsilon; \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) \leq \left(f^\varepsilon, \frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right) \tag{3.3.17}$$

En intégrant (3.3.17) et en utilisant l'inégaalité de Korn, on trouve

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + 2\mu_* C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq a\left(T^\varepsilon; \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) + \\ &+ \left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + 2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right) - \\ &-2\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right) - 2\int_0^t \left(\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial t^2}(s), \frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(s)\right) ds\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + 2\mu_* C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ &+ (2\mu_* + \lambda_*)\left\|\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \mu_* C_K \left\|\nabla\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\int_0^t \left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds + \mu_* C_K \int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u_\xi^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds.\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Maintenant, nous cherchons une estimation de $\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)$. On a

$$\left(\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi\right) = \left(f^\varepsilon(0), \varphi\right) - a\left(T^\varepsilon; u_\xi^\varepsilon(0), \varphi\right)$$

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0), \varphi\right)\right| &\leq \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} . \|\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (2\mu_* + \lambda_*)\left\|u_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \varepsilon h^* \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} . \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (2\mu_* + \lambda_*)\left\|u_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \left(\varepsilon h^* \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (2\mu_* + \lambda_*)\left\|u_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}\end{aligned}$$

en multipliant cette inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$ et comme

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \left\|\hat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}; \quad \sqrt{\varepsilon}\left\|u_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left\|\hat{u}_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

on déduit que :

$$\sqrt{\varepsilon}\left\|\frac{\partial^2 u_\xi^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C$$

où

$$C = h^*\left\|\hat{f}^\varepsilon(0)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (2\mu + \lambda_*)\left\|\hat{u}_\xi^\varepsilon(0)\right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

En passant à la limite en ξ dans (3.3.18) on obtient

$$\begin{gathered}
\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + 2\mu_* C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\
+ (2\mu_* + \lambda_*)\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \mu_* C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\
+\frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \mu_* C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\
+\frac{(\varepsilon h^*)^2}{\mu_* C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds + \mu_* C_K\int_0^t\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} ds.
\end{gathered} \tag{3.3.19}$$

En multipliant maintenant (3.3.19) par ε, on trouve

$$\begin{gathered}
\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon\mu_* C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq B+ \\
+\int_0^t\left(\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon\mu_* C_K\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\right) ds
\end{gathered}$$

où B est une constante ne dépend pas de ε donnée par

$$\begin{gathered}
B = (2\mu_* + \lambda_* + \mu_* C_K)\left\|\nabla\hat{u}_1\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{(h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \\
\frac{(h^*)^2}{\mu_* C_K}\left\|\frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{(h^*)^2}{\mu_* C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial \hat{f}^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + C^2
\end{gathered}$$

par l'inégalité de Gronwel, on obtient:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C' \quad (C' \text{ est une constante ne dépand pas de } \varepsilon).$$

Donc la deuxième estimation est démontrée.

3.3.2 Estimation sur la température

Dans cette section, on cherche des estimations à priori sur la température $\hat{T}^\varepsilon$, pour cela nous avons besoin d'établir le lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *La température $\hat{T}^{\varepsilon}$ est majorée par :*

$$\left\|\hat{T}^{\varepsilon}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq h^{*}\left\|\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.20}$$

Lemme 3.3.3. *Supposons que les hypothèses du lemme 3.3.1 sont vérifiées, de plus supposons qu'il existe :*

- deux constantes strictement positives K_* et K^*, telle que

$$0 < K_* \leq K(x,z) \leq K^*, \quad \forall (x,z) \in \Omega \tag{3.3.21}$$

- une constante positive $\hat{r}^*$, telle que

$$\hat{r}(a) \leq \hat{r}^*. \tag{3.3.22}$$

Alors, il existe une constante positive C_2 indépendante de ε, telle que :

$$\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2. \tag{3.3.23}$$

Preuve. Dans l'inéquation variationnelle (3.2.8), on choisit $\varphi = \hat{T}^{\varepsilon}$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{3} I_i = \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2 \hat{K}\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial x_i}dxdz + \int_{\Omega}\hat{K}\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}\frac{\partial \hat{T}^{\varepsilon}}{\partial z}dxdz,$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 \hat{T}^{\varepsilon}dxdz + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^{\varepsilon}}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 \hat{T}^{\varepsilon}dxdz + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_j^{\varepsilon}}{\partial z}\right)^2 \hat{T}^{\varepsilon}dxdz + \\
&\quad + \int_{\Omega}2\varepsilon^2\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_3^{\varepsilon}}{\partial z}\right)^2 \hat{T}^{\varepsilon}dxdz;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Omega} r\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\hat{T}^{\varepsilon}dxdz; \\
I_3 &= \int_{\Omega}\varepsilon^2\hat{\lambda}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right) div\left(u^{\varepsilon}\right).div\left(u^{\varepsilon}\right)\hat{T}^{\varepsilon}dxdz.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$
\begin{aligned}
|I_1| \;\leq\;& \frac{\varepsilon^2\hat{\mu}^*}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\\
&+\frac{\hat{\mu}^*}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\\
&+\frac{\hat{\mu}^*}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\|\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}+\frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\\
&+2\varepsilon^2\hat{\mu}^*\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité $\|a+b\|^2 \leq 2\left(\|a\|^2+\|b\|^2\right)$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
|I_1| \;\leq\;& 2\varepsilon^2\hat{\mu}^*\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+2\hat{\mu}^*\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+\\
&+2\hat{\mu}^*\varepsilon^4\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon^2\hat{\mu}^*\left\|\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Maintenant l'inégalité (3.3.8), nous donnons :

$$
|I_1| \leq 2\hat{\mu}^* C\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Donc, en utilisant le lemme (3.3.2), on obtient :

$$
|I_1| \leq 2\mu^* h^* C\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3.24}
$$

De même, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme (3.3.2) , on obtient :

$$
\begin{aligned}
&|I_2| \leq r^*\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq r^* h^*\left\|\tfrac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&|I_3| \leq \varepsilon^2\hat{\lambda}^*\left\|div\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \hat{\lambda}^*\varepsilon^2\left\|\nabla\left(\hat{u}^\varepsilon\right)\right\|^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\hat{\lambda}^* C\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.3.25}
$$

D'autre part, les hypothèses (3.3.21) et (3.3.22), nous donnent :

$$
\begin{aligned}
b\left(T^\varepsilon, T^\varepsilon\right) &= \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\hat{K}\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}dxdz+\int_\Omega \hat{K}\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}.\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}dxdz\\
&= \sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \varepsilon^2\hat{K}\left|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right|^2 dxdz+\int_\Omega \hat{K}\left|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right|^2 dxdz.
\end{aligned}
$$

ce qui implique:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_*\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\hat{K}_*\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq b\left(\hat{T}^\varepsilon,\hat{T}^\varepsilon\right)\\
&\leq 2\hat{\mu}^*h^*C\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}+\hat{r}^*h^*\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}+\hat{\lambda}^*C^2\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Il déduit que

$$K_*\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\hat{K}_*\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C_1\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.26}$$

où, C_1 est une constante indépendante de ε donnée par :

$$C_1=2\hat{\mu}^*h^*C+\hat{r}^*h^*+\hat{\lambda}^*C$$

donc :

$$\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq \hat{K}_*^{-1}C_1. \tag{3.3.27}$$

De plus, en injectant cette dernière estimation dans (3.3.26) on trouve :

$$\varepsilon^2\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial \hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C_2,$$

où

$$C_2=\hat{K}_*^{-1}C_1^2.\quad\square$$

3.3.3 Résultats de convergence et problème limite

Dans ce paragraphe, on va énoncer le théorème de convergence.

Théorème 3.3.1. *Sous les mêmes hypothèses des lemmes* (3.3.1) *et* (3.3.3), *il existe* $\hat{u}^*=(\hat{u}_1^*,\hat{u}_2^*)$ *dans* $L^2(0,T,V_z)$ *et* $\hat{T}^*$ *dans* V_z, *tel que pour des sous suites de* $\hat{u}^\varepsilon$ $\left(\text{resp } \hat{T}^\varepsilon\right)$ *notée encore* $\hat{u}^\varepsilon$ $\left(\text{resp. } \hat{T}^\varepsilon\right)$, *on a les résultats de convergence suivants :*

$$\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_i^*\ ;\ \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial t}\quad 1\leq i\leq 2\ \ \textit{faiblement dans } L^2(0,T,V_z) \tag{3.3.28}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\rightharpoonup 0\ \ ,\ \varepsilon\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j\partial t}\rightharpoonup 0\ ,\ 1\leq i,j\leq 2\ \ \textit{faiblement dans } L^2(0,T,V_z) \tag{3.3.29}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\rightharpoonup 0\ ,\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z\partial t}\rightharpoonup 0\ ,\ \varepsilon^2\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}\rightharpoonup 0,\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup 0\ \ \textit{faiblement dans}\ L^2\left(0,T,V_z\right) \quad (3.3.30)$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j}\rightharpoonup 0\ ,\varepsilon^2\frac{\partial^2\hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_j\partial t}\rightharpoonup 0\quad 1\leq i\leq 2\ \ \textit{faiblement dans}\ L^2\left(0,T,V_z\right) \quad (3.3.31)$$

$$\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup 0,\varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}\rightharpoonup 0\ \ \textit{faiblement dans}\ L^2\left(0,T,V_z\right) \quad (3.3.32)$$

$$\hat{T}^\varepsilon\rightharpoonup\hat{T}^*\ \ \textit{faiblement dans}\ L^2\left(V_z\right) \quad (3.3.33)$$

$$\varepsilon\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\rightharpoonup 0\ \ \textit{faiblement dans}\ L^2\left(V_z\right) \quad (3.3.34)$$

Preuve. D'après (3.3.8), nous obtenons (3.3.28) − (3.3.32) .

Grâce à l'estimation (3.3.23) , il existe une constante positive C ne dépend pas de ε telle que:

$$\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C.$$

En utilisant le lemme (3.3.2), on en déduit que :

$$\left\|\hat{T}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\leq h^*\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq h^*C,$$

donc $\hat{T}^\varepsilon$ est bornée dans V_z, ce qui implique l'existence d'un élément $\hat{T}^*$ dans V_z tel que $\hat{T}^\varepsilon$ converge faiblement vers $\hat{T}^*$ dans V_z.

De plus l'estimation (3.3.23), montre que $\varepsilon\left\|\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\leq C$, donc $\varepsilon\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}$ converge vers $\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial x_i}$, et comme $\hat{T}^\varepsilon$ converge vers $\hat{T}^*$ dans V_z, alors $\varepsilon\frac{\partial\hat{T}^\varepsilon}{\partial x_i}$ converge ver 0 dans V_z. □

Théorème 3.3.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.3.1 les solutions $\hat{u}^*$ et $\hat{T}^*$ vérifient les relations suivantes :*

$$\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\frac{\partial\hat{u}_i^*}{\partial z}(t)\,.\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\hat{u}_i^*}{\partial t}(t)\right)dxdz+J\left(\hat{\varphi}\right)-J\left(\frac{\partial\hat{u}_i^*}{\partial t}(t)\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_i,\hat{\varphi}_i-\frac{\partial\hat{u}_i^*}{\partial t}\right); \quad (3.3.35)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{K}\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial z}(t)\right)=\sum_{i=1}^{2}\hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_i^*}{\partial z}(t)\right)^2+\hat{r}\left(\hat{T}^*\right)\ \ \textit{dans}\ L^2\left(\Omega\right). \quad (3.3.36)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\frac{\partial\hat{u}_i^*}{\partial z}(t)\right)=\hat{f}_i\qquad \textit{pour}\ i=1,2\ \ \textit{dans}\ L^2\left(\Omega\right); \quad (3.3.37)$$

Preuve. L'inéquation variationnelle (3.3.5) s'écrit sous la forme:

$$\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^{2}\left(\frac{\partial^{2}\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\left(t\right),\hat{\varphi}_{i}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+\varepsilon^{4}\left(\frac{\partial^{2}\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t^{2}}\left(t\right),\hat{\varphi}_{3}-\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{4}e_{i}\left(\varepsilon\right)+\varepsilon^{2}\int_{\Omega}\widehat{\lambda}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)div\left(\hat{u}^{\varepsilon}\right).div\left(\hat{\varphi}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)dxdz+\int_{\omega}\hat{k}\left|\hat{\varphi}\right|dx-$$

$$-\int_{\omega}\hat{k}\left|\frac{\partial\hat{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right|dx\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_{i},\hat{\varphi}_{i}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)+\varepsilon\left(\hat{f}_{3},\hat{\varphi}_{3}-\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right),$$

avec

$$\begin{aligned}
e_{1} &= \varepsilon^{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial x_{j}}+\frac{\partial\hat{u}_{j}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\hat{\varphi}_{i}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)dxdz;\\
e_{2} &= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{i}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)dxdz;\\
e_{3} &= \sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\varepsilon^{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{\varepsilon}}{\partial z}+\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial x_{i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\hat{\varphi}_{3}-\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)dxdz;\\
e_{4} &= 2\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)\varepsilon^{2}\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{3}-\frac{\partial\hat{u}_{3}^{\varepsilon}}{\partial t}\left(t\right)\right)dxdz.
\end{aligned}$$

En passant à la limite et en utilisant les résultats de convergence du théorème 3.3.1, il existe une sous suite $\hat{T}^{\varepsilon}$ qui converge presque partout vers $\hat{T}^{*}$, et comme $\mu\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)$ est continue, alors $\mu\left(\hat{T}^{\varepsilon}\right)$ converge presque partout vers $\hat{\mu}\left(\hat{T}^{*}\right)$.
Le fait que J est semi-continue inférieurement, alors:

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{*}\right)\frac{\partial\hat{u}_{i}^{*}}{\partial z}\left(t\right).\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{\varphi}_{i}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{*}}{\partial t}\left(t\right)\right)dxdz+J\left(\hat{\varphi}\right)-J\left(\frac{\partial\hat{u}_{i}^{*}}{\partial t}\right)\geq\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_{i},\hat{\varphi}_{i}-\frac{\partial\hat{u}_{i}^{*}}{\partial t}\left(t\right)\right).\tag{3.3.38}$$

On choisit $\varphi\in H_{0}^{1}\left(\Omega\right)$ dans (1.3.38) par

$$\begin{aligned}
\varphi_{i} &= \frac{\partial\hat{u}_{i}^{*}}{\partial t}\pm\psi,\ i=1,2\\
\varphi_{3} &= \hat{u}_{3}^{*},
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\hat{\mu}\left(\hat{T}^{*}\right)\frac{\partial\hat{u}_{i}^{*}}{\partial z}\left(t\right).\frac{\partial\psi}{\partial z}dxdz=\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{f}_{i},\psi_{i}\right).$$

En utilisant la formule de Green et en choisissant $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in H_0^1(\Omega)$, puis $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$, on trouve :

$$-\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}\right)\psi_i dxdz = \int_\Omega \hat{f}_i\psi_i dxdz$$

donc

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}\right)\right] = \hat{f}_i \quad \text{pour } i = 1,2 \quad dans\ H^{-1}(\Omega) \tag{3.3.39}$$

et comme $\hat{f}_i \in L^2(\Omega)$ et $t \in [0,T]$, alors (3.3.39) est vraie dans $L^2(\Omega)$.

D'autre part, en passant à la limite dans (3.3.6) et en utilisant les résultats de convergence du théorème 3.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_\Omega \hat{K}\frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z}.\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}dxdz = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\left(\frac{\partial \hat{\mu}_i^*}{\partial z}\right)^2\psi dxdz + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^\varepsilon\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_j^*}{\partial z}\right)^2\psi dxdz + \\ &+\textstyle\int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^*\right)\psi dxdz = \sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}\right)^2\psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^*\right)\psi dxdz,\ \forall \psi \in H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega).\end{aligned}$$

Maintenant la formule de Green, nous donne :

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{K}\frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z}\right).\psi dxdz = \sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}\right)^2\psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^*\right)\psi dxdz.\forall \psi \in H^1_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega).$$

Par conséquent :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{K}\frac{\partial \hat{T}^*}{\partial z}\right) = \sum_{i=1}^2 \hat{\mu}\left(\hat{T}^*\right)\left(\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial z}\right)^2 + \hat{r}\left(\hat{T}^*\right) \text{ dans } H^{-1}_{\Gamma_L\cup\Gamma_1}(\Omega). \tag{3.3.40}$$

La formule (3.3.40) est valable dans $L^2(\Omega)$, puisque $\hat{\mu}$ et $\hat{r}$ sont deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ et $\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z}\right)^2$ est un élément de $L^2(\Omega)$. □

Théorème 3.3.3. *La solution* $\left(\hat{u}^*, \hat{T}^*\right)$ *du problème limite (3.3.35)-(3.3.36) est unique dans* $L^2(0,T,V_z) \times V_z$ *pour tout* $0 < c < \min(c_0, c_1)$, *avec :*

$$\begin{aligned} c_0 &= \left[2\alpha^4 C_{\hat{\mu}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left(K_*\left[1+(h^*)^2\right]^{-1} - C_{\hat{r}}\right) \\ c_1 &= \left(1 + 8\mu_*^{-1}\mu^* T\right)^{-1} c_0^2 \end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$W_z = \left\{v \in V_z : \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \in L^2(\Omega)\right\}$$

$$B_c = \left\{ v \in W_z \times W_z : \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{V_z} \leq c \right\}.$$

Supposons qu'il existe $\left(\hat{u}^1, \hat{T}^1\right)$ et $\left(\hat{u}^2, \hat{T}^2\right)$ solutions du problème limite (3.3.35) et (3.3.36).
* Pour tout $\psi \in H^1_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)$ on a

$$-\int_\Omega \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \psi dxdz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right) \left(\frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^1\right) \psi dxdz \tag{3.3.43}$$

$$-\int_\Omega \hat{K} \frac{\partial \hat{T}^2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dxdz = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right) \left(\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \hat{r}\left(\hat{T}^2\right) \psi dxdz \tag{3.3.44}$$

Par soustraction de (3.3.43) et (3.3.44) on obtient

$$\begin{gathered}\int_\Omega \hat{K} \tfrac{\partial}{\partial z}\left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right) \tfrac{\partial}{\partial z}\psi dxdz = \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\left(\tfrac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z}\right)^2 - \hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\left(\tfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right)^2\right] \psi dxdz + \\ + \int_\Omega \left[\hat{r}\left(\hat{T}^1\right) - \hat{r}\left(\hat{T}^2\right)\right] \psi dxdz.\end{gathered} \tag{3.3.45}$$

Dans (3.3.45) on ajoute et on retranche le terme $\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z}\right)^2$, on obtient

$$\begin{gathered}\int_\Omega \hat{K} \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right) \frac{\partial}{\partial z}\psi dxdz = \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right) \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\hat{u}_i^1 + \hat{u}_i^2\right)\left(\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2\right)\right] \psi dxdz + \\ \textstyle\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right) - \hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\right] \left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right)^2 \psi dxdz + \int_\Omega \left[\hat{r}\left(\hat{T}^1\right) - \hat{r}\left(\hat{T}^2\right)\right] \psi dxdz\end{gathered}$$

En choisissant $\psi = \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \in H^1_{\Gamma_L \cup \Gamma_1}(\Omega)$ on obtient

$$\int_\Omega \hat{K} \frac{\partial}{\partial z} \left|\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right|^2 dxdz = \sum_{k=1}^{3} R_k \tag{3.3.46}$$

avec

$$\begin{gathered}R_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{2} R_1^i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right) \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\hat{u}_i^1 + \hat{u}_i^2\right)\left(\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2\right)\right]\left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right) dxdz \\ R_2 = \textstyle\sum_{i=1}^{2} R_2^i = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right) - \hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\right] \left(\dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right)^2 \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right) dxdz \\ R_3 = \int_\Omega \left[\hat{r}\left(\hat{T}^1\right) - \hat{r}\left(\hat{T}^2\right)\right]\left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right) dxdz\end{gathered}$$

et comme

$$\int_\Omega \hat{K} \frac{\partial}{\partial z} \left|\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right|^2 dxdz \geqslant K_* \left[1 + (h^*)^2\right]^{-1} \left\|\hat{T}^1 - \hat{T}^2\right\|_{V_z} \tag{3.3.47}$$

on a

$$
\begin{aligned}
|R_1^i| &\leqslant \mu^* \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 + \hat{u}_i^2) \right|^4 dxdz \right)^{1/4} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right|^2 dxdz \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right|^4 \right)^{1/4} dxdz \\
&\leqslant \mu^* \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 + \hat{u}_i^2) \right\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{L^4(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, et comme l'injection compact de V_z dans $L^4(\Omega)$ est continue, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$
\begin{aligned}
|R_1^i| &\leqslant \mu^* \alpha^2 \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 + \hat{u}_i^2) \right\|_{V_z} \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \\
&\leqslant \mu^* \alpha^2 \left\| \frac{\partial}{\partial z} (\hat{u}_i^1 + \hat{u}_i^2) \right\|_{V_z} \left\| (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{V_z} \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}
\end{aligned}
$$

et puisque $\hat{u}_i^1$ et $\hat{u}_i^2$ sont deux éléments de B_c alors

$$
\left| R_1^i \right| \leqslant 2\mu^* \alpha^2 c \left\| (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{V_z} \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}.
$$

Par l'inégalité de Young, on a:

$$
\begin{aligned}
|R_1| &\leq 2\mu^* \alpha^2 c \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \textstyle\sum_{i=1}^2 \left\| (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{V_z} \\
&\leq 2\sqrt{2} \mu^* \alpha^2 c \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \left(\textstyle\sum_{i=1}^2 \left\| (\hat{u}_i^1 - \hat{u}_i^2) \right\|_{V_z}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq 2\sqrt{2} \mu^* \alpha^2 c \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \left\| (\hat{u}^1 - \hat{u}^2) \right\|_{V_z \times V_z}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
|R_1| \leq 2\sqrt{2} \mu^* \alpha^2 c \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \left\| (\hat{u}^1 - \hat{u}^2) \right\|_{V_z \times V_z} \tag{3.3.48}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|R_2^i| &\leq C_\mu \int_\Omega \left| \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right|^2 \left| \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \right|^2 dxdz \\
&\leq C_\mu \left(\int_\Omega \left| \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right|^4 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \right|^4 \right)^{1/2} dxdz \\
&\leq C_\mu \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{L^4(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \right\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq C_\mu \alpha^4 \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}^2 \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} \right\|_{V_z}^2 \\
&\leq C_\mu \alpha^4 \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}^2 \left\| \hat{u}_i^2 \right\|_{W_z}^2 \\
&\leq C_\mu \alpha^4 c^2 \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}^2
\end{aligned}
$$

donc

$$|R_2| \leq 2C_\mu \alpha^4 c^2 \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}^2 . \tag{3.3.49}$$

Comme la fonction $\hat{r}$ est lipshitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport $C_{\hat{r}}$ alors

$$\begin{aligned} |R_3| &\leq C_{\hat{r}} \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C_{\hat{r}} \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z}^2 \end{aligned} \tag{3.3.50}$$

En injectant (3.3.45) – (3.3.50) dans (3.3.44) on trouve

$$\begin{aligned} K_* \left[1 + (h^*)^2 \right]^{-1} \left\| \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right\|_{V_z} &\leq (2C_{\hat{\mu}} \alpha^4 c^2 + C_{\hat{r}}) \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} + \\ &+ 2\sqrt{2} \mu^* \alpha^2 c \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \| (\hat{u}^1 - \hat{u}^2) \|_{V_z \times V_z} \end{aligned}$$

donc

$$\left(K_* \left[1 + (h^*)^2 \right]^{-1} - 2C_{\hat{\mu}} \alpha^4 c^2 + C_{\hat{r}} \right) \left\| \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right\|_{V_z} \leq 2\sqrt{2} \mu^* \alpha^2 c \left\| \left(\hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right) \right\|_{V_z} \left\| \left(\hat{u}^1 - \hat{u}^2 \right) \right\|_{V_z \times V_z}$$

supposons que

$$c < c_0 = \left[2\alpha^4 C_{\hat{\mu}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left(K_* \left[1 + (h^*)^2 \right]^{-1} - C_{\hat{r}} \right)$$

à condition que

$$K_* > \left[1 + (h^*)^2 \right]^{-1} . C_{\hat{r}}$$

alors

$$\left\| \hat{T}^1 - \hat{T}^2 \right\|_{V_z} \leq 2\sqrt{2} \mu^* \alpha^{-2} C_{\hat{\mu}}^{-1} c \left(c_0^2 - c^2 \right)^{-1} \left\| \left(\hat{u}^1 - \hat{u}^2 \right) \right\|_{V_z \times V_z} \tag{3.3.51}$$

* Nous avons aussi les deux inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu} \left(\hat{T}^1 \right) \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z} (t) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i^1 - \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial t} (t) \right) dxdz + J \left(\hat{\varphi}^1 \right) - J \left(\frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i^1 - \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial t} (t) \right) \tag{3.3.52}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{\mu} \left(\hat{T}^2 \right) \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} (t) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i^2 - \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial t} (t) \right) dxdz + J \left(\hat{\varphi}^2 \right) - J \left(\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial t} \right) \geq \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i^2 - \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial t} (t) \right) . \tag{3.3.53}$$

On suppose que $\varphi^1 = \dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial t}(t)$ dans (3.3.52) et $\varphi^2 = \dfrac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial t}(t)$ dans (3.3.53) et en sommant les deux inéquations, on obtient pour $W = \hat{u}^1 - \hat{u}^2$

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left[\hat{\mu} \left(\hat{T}^1 \right) \frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z} (t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) - \hat{\mu} \left(\hat{T}^2 \right) \frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z} (t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right] dxdz \geqslant 0 \tag{3.3.54}$$

on ajoute et on retranche le terme $\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}(t)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)$ dans l'equation (3.3.54) on déduit que

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{i=1}^2\int_\Omega\left[\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\dfrac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial z}(t)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)-\hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}(t)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)\right]dxdz+\\ +\textstyle\sum_{i=1}^2\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}(t)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz-\sum_{i=1}^2\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\dfrac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}(t)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\geqslant 0\end{gathered}$$

donc

$$\sum_{i=1}^2\int_\Omega-\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\frac{\partial W}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz+\sum_{i=1}^2\int_\Omega\left(\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)-\hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\right)\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\geqslant 0$$

$$\sum_{i=1}^2\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\frac{\partial W}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\leq\sum_{i=1}^2\int_\Omega\left(\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)-\hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\right)\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz \tag{3.3.55}$$

et comme

$$\sum_{i=1}^2\int_\Omega\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)\frac{\partial W}{\partial z}.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\geq\frac{\mu_*}{2}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z}^2 \tag{3.3.56}$$

l'inégalité de Hölder nous donnons

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\left(\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)-\hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\right)\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\right| &\leq C_{\hat{\mu}}\int_\Omega\left|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right|\left|\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right|dxdz\\ &\leq C_{\hat{\mu}}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \alpha^2C_{\hat{\mu}}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\right\|_{V_z}\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq c\alpha^2C_{\hat{\mu}}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}\left\|\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)\right\|_{V_z}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young

$$\left|\sum_{i=1}^2\int_\Omega\left(\hat{\mu}\left(\hat{T}^1\right)-\hat{\mu}\left(\hat{T}^2\right)\right)\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdz\right|\leq\sqrt{2}c\alpha^2C_{\hat{\mu}}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z.V_z} \tag{3.3.57}$$

En substituant (3.3.56) et (3.3.57) dans (3.3.55) on obtient

$$\begin{gathered}\frac{\mu_*}{2}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z}^2\leq\sqrt{2}c\alpha^2C_{\hat{\mu}}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z.V_z}\\ \frac{\mu_*}{2}\frac{d}{dt}\|W\|_{V_z}\leq\sqrt{2}c\alpha^2C_{\hat{\mu}}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}\end{gathered} \tag{3.3.58}$$

Intégrant (3.3.58) entre 0 et T, avec $W(0)=0$ on trouve

$$\frac{\mu_*}{2}\|W\|_{V_z}\leq\sqrt{2}c\alpha^2C_{\hat{\mu}}T\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z} \tag{3.3.59}$$

En revenant à (3.3.51) on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z} &\leq 2\sqrt{2}\mu^*\alpha^{-2}c\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}\left\|(\hat{u}^1-\hat{u}^2)\right\|_{V_z\times V_z}\\ &\leq 8\mu_*^{-1}\mu^*C_{\hat{\mu}}^{-1}c^2\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}T\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}\end{aligned}$$

Alors

$$\left(1-8\mu_*^{-1}\mu^*c^2\left(c_0^2-c^2\right)^{-1}T\right)\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}\leq 0 \tag{3.3.60}$$

supposons que

$$0<c<c_1=\left(1+8\mu_*^{-1}\mu^*T\right)^{-1}c_0^2$$

l'inéquation (3.3.60), nous donne

$$\left\|\hat{T}^1-\hat{T}^2\right\|_{V_z}=0$$

donc $\hat{T}^1=\hat{T}^2$ presque partout dans V_z.

Et d'après (3.3.59), on déduit que $\hat{u}^1=\hat{u}^2$ presque partout dans $V_z\times V_z$. $\square$

Bibliographie

[1] A. Saad allah, *Analyse asymptotique d'un problème mathématique avec et sans frottement dans un domaine mince,* Thèse de Magister, Univ. F. Abbas, Sétif, 2010.

[2] B. Grec, *Fluides complexes en films minces*, Thèse de Doctorat, l'Ecole Centrale de Lyon, le 04 d'ecembre 2008.

[3] D. Bresh, J. Lemoine, J. Simon, *Ecoulement engendré par le vent et la force de Cariolis dans un domaine mince: I Gas stationnaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 325 (1997) 807–812.

[4] F. Saidi, *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2004).

[5] F. Saidi, M. Boukrouche, *Non-isothermal lubrication problem with Trisca Fluide-solide interface law*, Nonlinear Analysis: RealWorld Applications,Vol. 7, pp. 1145 – 1166, (2006).

[6] G. Bayada, L. Chupin and B.Grec, *Fluides viscoelastiques en film mince*, Institut carmille, Jordan, lyon, (2007).(math.univ-lyon1.fr/˜grec/pres_smai_grec.pdf).

[7] G. Bayada, L. Chupin and S. Martin, *Viscoelastic fluids in a thin domain*, Quart. Appl. Math.Vol. 65 , pp. 625–651, (2007).

[8] G. Bayada, M. Boukrouche, *On a free boundary for the Reynolds equation derived from the stokes system with Tresca boundary condition*, Journal of mathematical Analysis and Applications, vol. 282, pp. 212-213, (2003).

[9] G. Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equation and the Reynolds equation,* A mathematical proof, Appl. Math. Optim. 14 (1986) 73–93.

[10] G. Duvant, J.L. Lions, *Les inéquations en mé canique et en physique*, Dunod Paris (1972).

[11] H. Brezis, *Equation et inéquation non liné aire dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'institut Fourier, tome 18, pp.115-175, n 1(1968).

[12] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Volume (1), Dunod, Paris (1968).

[13] J.L. Lions, *Quelques méthodes de ré solution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[14] L. Chupin, *Modélisation et Analyse mathé matique en films minces*, Institut Camille Jordan - INSA de Lyon, (2009). (math.univ-lyon1.fr/˜chupin/FICHIERS.../chupin-hdr-soutenance.pdf).

[15] M. Boukrouche, G. Lukaszewicz, *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid–solid interface law*, International Journal of Engineering Science, Vol. 41, 521–537, (2003).

[16] M. DILMI, *Problèmes aux limites obtiques et non linéaires pour les équations de Lamé*, Thèse de Doctorat en sciences, Janvier (2009).

[17] M. Boukrouche, F. Boughanim, H. Smaoui, *Asymptotic behavior of a non-Newtonian flow with stick- stip condition*, Electronic Journal of Differential Equations, Conference 11, pp. 71–80, (2004).

[18] M. Boukrouche, R. Elmi, *Asymptotic of a non-Newtonian Fluide in a then domain with Trisca law*, Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applixations, vol.59, Issues 1-2, pp 85-105, (2004).

[19] M. Boukrouche, R. Elmir, *On a non-isothermal, non Newtonian lubrication problem with Tresca law: Existence and behavior of weak solution.* Nonlinear Analysis: RealWorld Applications, (2007).

[20] M.R Laydi, M. Lenczner, *Equation de Navier- Stokes dans un domaine mince avec viscosité évanescente*, C. R. Acad. sci. Paris, t. 326, séri I, p. 127-130, (1998).

[21] N. Benhaboucha, *Quelques problèmes mathé matiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon, (2003).

[22] N. BENHABOUCHA, M. CHAMBAT, *New models in micropolar fluid and their application to lubrication*, Insa de Lyon, Vol. 15, No. 3, (2005).

[23] O. Reynolds, *On the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 117:157–234, 1886.

[24] O. Reynolds, *On the slipperiness of ice,* Man. Lit. Phil. Soc., Memoirs and Proceedings, 43:199–220, 1898-99.

[25] R. Dautry et J.L.Lions, *Analyse mathé matique et calcul numérique pour les Sciences et les Techniques*, Volume (3), Masson, Paris (1984).

[26] R. El Mir, *Etude mathématique et analyse asymptotique de quelques problèmes de lubrification par des fluides non-newtoniens avec des conditions de non adhérence aux bords*, Thèse, Université Jean Monnet - Saint-Etienne, (2005).

[27] R. Kh. Zeytounian, *Les Modeles Asymptotiques de la Mecanique des Fluides 1.* LNP0245, Springer, (1986).

[28] S. Martien, *C*ontribution à la modélisation de phénomènes frontière libre en mécanique des films minces, Thèse de Doctorat, Lyon, le 21 novembre (2005).

[29] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations.* Springer (1979) .

Résumé

Dans ce mémoire nous sitéresse à l'étude du problème d'un croup homogéme élastique qui occupe une domain 3D avec frottement sur une partie fromtiére. nous prouvons d'abord les résultats d'existence et d'unicité pour la solutions fable. Puis on étudie la comportement asymptiotique de ces solitions lorsqu úne dimenions du domaise tendent vers zéro. Les 3D équations de conservations et la loi de frottement sont obtenue. L'existence et l'unicité de la solution du problèm limite est démontré, donc leproblème limite est bien défini et a un send.

isotherme..

Mots clés :Comportement asymptotique, problémes aux limites, double friction, d'élastié linéaire, non -

Abstract

In this thesis we are interested in studying a homogeneous flexible body that occupies a three- dimensional field with friction on a sharp part We first prove the existence and the results of

uniqueness of the weak solution .Then we study the converging behavior of these solutions when one of the dimensions of the field tends to zero.3D conservation equations and friction law obtained.The existence and uniqueness of the solution of the sharp problem have been proven, so the final problem is well defined and has the meaning of .

Key words converging behavior, Sharp conditions,Friction of stacking ,double frottement ,linear flexibility,equal uneven heat

ملخص

في هذه الأطروحة نحن، مهتمون بدراسة جسم مرن متجانس والذي يشغل مجالا ثلاثي الأبعاد مع الأحتكاك على جزء حد. نثبت أولا وجود ونتائج التفرد للحل الضعيف، ثم ندرس السلوك المتقارب لهذه الحلول عندما يميل احد أبعاد المجال إلى الصفر. تم الحصول على معادلات الحفظ ثلاثية الأبعاد وقانون الإحتكاك. تم إثبات وجود وتفرد حل مشكلة الحد وبالتالي فإن المشكلة النهائية محددة جيدا ولها معنى

الكلمات المفتاحية:

لوك مقارب ،الشروط الحدية. إحتكاك ثنائي ،المرونة الخطية،غير متساوي الحرارة.