



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ Echahid HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Schéma aux différences finies pour
l'équation des ondes**

Présenté par : Besseghir Safia

Hachani Assia

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dr. Bekkouche Moumen

MCA/Prof.

Président

Univ. El Oued

Dr. Beggas Mohammed

Prof.

Rapporteur

Univ. El Oued

Dr. Doudi Nadjat

MCA/MC

Examinatrice

Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Remerciements

Avant toute considération, nous remercions le Grand Dieu Allah le tout puissant pour nous avoir donné la force et la patience afin de continuer notre études.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements à notre encadreur de mémoire **Dr.Beggas Mohammed** maitre de conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'Eloued pour nos encadre, ses conseils précieux et avisés, ainsi pour sa supervision éclairée tout au long de la rédaction du mémoire, ses encouragements, aussi pour l'aide qu'il a fournie et les connaissances qu'il a su nous transmettre durant ce travail. Nous tenons à remercier également les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance, ainsi à nos professeurs.

Il est possible d'écrire ces lignes sans l'appui morales des membres de nos familles surtout à nos chers parents pour leur grand soutient.

Aussi nous adressons notre remerciements chaleureusement nos camarades de la promotion 2019 de Mathématiques et nos amis pour leur compagne, leur aide et leur humour .

Finalement, toute personne de prés ou de loin a contribué à la finalisation de ce travail.

Notations

$L^p(\Omega)$	espaces de Lebesgue.
∇	le gradient.
Δ	Laplacien.
A	matrice.
A^t	matrice transposé.
A^{-1}	matrice inverse.
λ	valeur propre.
$M_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices carrées.
$E.D.P$	les équations aux dérivées partielles.
$\rho(x)$	La densité de fluide.
$\varepsilon(x)$	la permittivité.
$\vec{E}(x, t)$	le champ électrique.
$\vec{H}(x, t)$	le champ magnétique.
$\vec{j}_s$	le courant.
$D.F$	différences finies.
Δx	le pas en espace.
Δt	le pas en temps.
P_c	problème continu.
P_h	problème discrét.

Table des figures

2.1	Domaines de dépendance et d'influence	21
3.1	Discrétisation par D.F en D1	26
3.2	Approximation de D.F	28
3.3	Calcule u^{n+1} par le schéma explicite	31
5.1	le graphe d'exemple étudié CFL vérifié	45
5.2	CFL non vérifié	45

Table des matières

Notations	ii
Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces fonctionnels	3
1.1.1 Espace $C^k([a, b])$	3
1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	3
1.2 Opérateurs différentiels	4
1.2.1 Gradient d'un vecteur	4
1.2.2 Divergence d'un vecteur	4
1.2.3 Laplacien	4
1.2.4 Fonction harmonique	5
1.3 Formules de Taylor et développements limités	5
1.3.1 Les formules de Taylor	5
1.3.2 Généralisation	6
1.4 Rappel sur les matrices	8
1.4.1 Norme matricielle	8
1.4.2 Matrices particulières	8
2 Les équations des ondes	12
2.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles	12
2.1.1 E.D.P linéaires du premier ordre	14
2.1.2 E.D.P linéaires de second ordre	14

2.1.3	Classification	14
2.1.4	Conditions aux limites	15
2.1.5	Conditions initiales	15
2.1.6	Problème bien posé	16
2.2	Les équations des ondes en dimension 1 (D1)	16
2.3	Les équations des ondes en dimension supérieure à deux	17
2.4	Type d'équations des ondes	18
2.4.1	Les ondes acoustiques	18
2.4.2	Les ondes élastiques	18
2.4.3	Les ondes électromagnétiques	19
2.5	Étude des équations des ondes acoustiques	19
2.5.1	L'existence et l'unicité : formule d'Alembert	19
2.5.2	Conséquences de la formule d'Alembert	20
2.5.3	Quelques propriétés de la solution	21
3	Principe de la méthode de différences finies	23
3.1	Définitions et propriétés	24
3.1.1	Maillage	24
3.1.2	Erreur de troncature	24
3.1.3	Ordre de schéma	24
3.1.4	Consistance de schéma numérique	25
3.1.5	Stabilité de schéma numérique	25
3.1.6	Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs -Lewy 1928 (CFL)	25
3.1.7	Convergence	26
3.2	Différences finies en dimension 1	26
3.2.1	Discrétisation de domaine	26
3.3	Construction de schémas	27
3.3.1	la dérivée première	27
3.3.2	La dérivée seconde	28
3.4	Différences finies en dimension 2	29
3.4.1	Discrétisation de domaine	29

3.5	Construction de schémas	29
3.5.1	Les dérivées premières	29
3.5.2	les secondes dérivées	31
3.5.3	Dérivée d'ordre supérieur	32
4	Résolution par D.F de l'équation des ondes	33
4.1	Problème continue	33
4.2	Première approche : problème discret	34
4.2.1	Discretisation	34
4.2.2	Le Schéma D.F explicite (en temps) et centré (en espace)	34
4.2.3	Schéma aux D.F implicite décentré (en temps) et centré (en espace) .	37
4.3	Seconde approche : système de premier ordre équivalent	37
5	Application	39
5.1	Le modèle de la corde vibrante finie :	39

Introduction

La plupart des équations différentielles et équations aux dérivées partielles de la physique et des sciences pour l'ingénieur sont telles qu'il n'est pas possible d'en déterminer des solutions par voie analytique. Le calcul scientifique est précisément la discipline qui propose des méthodes et des techniques afin de trouver des solutions approchées, en mettant en œuvre à l'aide d'ordinateurs des algorithmes numériques.

D'une manière générale on cherche à discrétiser les équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire on définit des approximations des dérivées de la solution en des points discrets par la méthode de différences finies. Ce procédé transforme l'équation en un système linéaire, ou non linéaire, suivant le type d'équations qu'on cherche à résoudre de dimension finie. Les phénomènes de propagation d'ondes se rencontrent dans de nombreuses applications.

On rencontre essentiellement trois types d'ondes : les ondes acoustiques c'est à dire les ondes qui se propagent dans un fluide (eau ou air par exemple). Les ondes élastiques c'est à dire les ondes qui se propagent dans un solide ; les ondes électromagnétiques, par exemple la lumière. Nous étudierons principalement l'équation des ondes acoustiques qui est le modèle le plus simple (modèle scalaire).

L'objectif de ce mémoire est la résolution d'un problème hyperbolique par la méthode de différences finies, on prend l'équation des ondes comme un modèle.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons

quelques définitions, propriétés d'analyse et un rappel sur les matrices.

Dans le deuxième chapitre, où on va présenter les différents types d'équations des ondes après avoir donné une généralité sur les EDP.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode de différences finies, où on va présenter le principe de cette méthode.

L'objectif du quatrième chapitre est la résolution de l'équation des ondes par la méthode de différences finies et on va vérifier tous les conditions de consistance, stabilité et la convergence.

la résultante de notre étude est la résolution numérique de l'équation des ondes discrétisé par la méthode de différences finies, où on va appliquer par Matlab.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à l'introduction d'analyse et un rappel sur les matrices que nous utiliserons par la suite.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace $C^k([a, b])$

Définition 1.1.1.

$(f \in C^k[a, b]) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable jusqu'à l'ordre } k \text{ et la dérivée d'ordre } k \text{ est continue})$.

1.1.2 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ l'espace des classes de fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable, est définie :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Pour $p = 1$

L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace de toute fonction intégrable sur Ω .

- Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \exists C > 0 : |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C \text{ tel que } |f(x)| < C \text{ p.p sur } \Omega\} = \sup \text{ess} f$$

1.2 Opérateurs différentiels

1.2.1 Gradient d'un vecteur

Soit u une fonction scalaire, $u = u(x, y, z)$, $\forall i, j, k \in \mathbb{N}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(u) = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

1.2.2 Divergence d'un vecteur

Soit U une fonction vectorielle de trois variables (x, y, z) définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs U_1, U_2, U_3 dans $\mathbb{R}$. On appelle divergence du vecteur U et on note $\text{div}(U)$ ou $\nabla \cdot U$ le scalaire :

$$\text{div}(U) = \nabla \cdot U = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}$$

1.2.3 Laplacien

On appelle Laplacien de u et on note Δu ou $\nabla^2 u$, le scalaire :

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad } u) = \nabla \cdot \nabla(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

1.2.4 Fonction harmonique

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction tq : $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω où f est de classe C^2 sur Ω si $\Delta f = 0$ sur Ω .

Exemple 1.2.1.

$f(x) = \ln(x^2 + y^2)$ est une fonction harmonique tel que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0\end{aligned}$$

1.3 Formules de Taylor et développements limités

1.3.1 Les formules de Taylor

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et elle est $(n + 1)$ fois dérivable.

• Formule de Mac-Laurin :

On se place dans le cas où l'intervalle $[a, b]$ est de la forme $[0, x]$, x étant une variable positive réelle quelconque. Alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n devient :

$$f(x) - f(0) = x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + \frac{1}{n+1} x^{n+1} f^{(n+1)}(c),$$

où $c \in]0, x[$.

• Formule de Taylor-Young :

Considérons maintenant le cas où f est une application d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soit a et x deux points de I . Alors on montre qu'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a telle que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x),$$

avec

$$\epsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ pour } x \longrightarrow a$$

Le terme $(x - a)^n \epsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n pour $x \rightarrow a$.

Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre n pour x tend vers a .

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) + (x)^n \epsilon(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + (x)^n \epsilon(x)$$

En utilisons les notations de Landau

$$(x)^n \epsilon(x) = O(x^n), \quad (x \rightarrow 0)$$

. et

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + O(x^n).$$

On dira que

$$f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0)$$

est le développement limité (noté D.L) d'ordre n de f au voisinage de 0.

Les D.L sont très utiles pour l'étude locale des fonctions car ils permettent :

- Une expression plus simple de f (au voisinage de point).
- Une recherche faciles de limites.
- Une trace plus précise de la courbe.

1.3.2 Généralisation

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad , f \in C^p(\Omega)$$

Pour $p = 1$:

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$$

Pour $p = 2$:

$$D^2 f(x_0)(h^2) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(h_{i_1}, h_{i_2})$$

Si on pose :

$$p = n = 2 \quad x_{i_1} = x, \quad x_{i_2} = y, \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$D^2 f(x_0, y_0)(h, h) = D^2 f(x_0)(h^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2$$

Formule de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} D^k f(x_0) h^k + O(\|h\|^p)$$

Si $p = n = 2$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)h_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)h_1 h_2 \right]$$

Si $p = 1, n = 3, h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)h_3 + O(\|h\|)$$

Exemple 1.3.1.

Si $p = n = 2, h = (h_1, h_2), (x_0, y_0) = (1, 1)$

$$f(x, y) = xy^2 - yx^3$$

$$f(1, 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 - 3yx^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y - 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = -1$$

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) = -2h_1 + h_2 - 3h_1^2 + h_2^2 - h_1 h_2$$

Combinaison convexe

Une combinaison convexe des x_i est un point P de la forme :

$$P = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels positifs des somme 1.

1.4 Rappel sur les matrices

1.4.1 Norme matricielle

Définition 1.4.1.

On appelle norme matricielle $\| \cdot \|$ définie de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) vérifiant les propriétés suivantes, $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
2. $\| \alpha A \| = \alpha \| A \|$.
3. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$, $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. (inégalité triangulaire)
4. $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$, $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

Exemple 1.4.1.

$$\| \cdot \|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n | a_{i,j} |$$
$$\| \cdot \|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n | a_{i,j} |$$

1.4.2 Matrices particulières

On appelle matrices m lignes et n colonnes ($m \times n$), on note dans $\mathbb{K}$:

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

- **Matrice carré**

Une matrice carré d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, autrement dit une matrice à un n lignes et n colonnes.

- **Transposé d'une matrice**

On appelle transposée d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type $p \times q$ La matrice $B = (b_{ij})$ de type $q \times p$. Obtenue en échangeant lignes et colonnes de A : $b_{ij} = a_{ji}$.

- **Matrice symétrique**

C'est une matrice A carré telle que : $A = A^t$.

- **Matrice unité**

La matrice unité noté I est définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- **Matrice diagonale**

C'est une matrice carré dont telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- **Matrice triangulaire**

Une matrice carré dont tous les termes au-dessous de la diagonale sont nuls est appelée matrice triangulaire supérieure.

Si (a_{ij}) est une matrice triangulaire supérieure d'ordre n on a donc :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \neq 0 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

De même, les matrices triangulaires inférieures sont telles que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \neq 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

• Matrice par blocs

Une matrice par blocs $A = A_{ij}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ est une matrice dont les entrées a_{ij} sont des matrices au lieu d'être des scalaires.

On doit toutefois respecter les deux règles suivantes :

1. Toutes les matrices d'un même ligne (A_{ij} avec $1 \leq j \leq n$) ont le même nombre de lignes.
2. Toutes les matrices d'un même colonne (A_{ij} avec $1 \leq i \leq m$) ont le même nombre de colonnes. Ainsi il existe des nombres entiers n_j et m_i tel que $A_{ij} \in \mathbb{C}^{m_i \times n_j}$.

• Matrice tridiagonale (bande)

On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$ est une matrice bande si elle n'admet pas des éléments non nuls que sur un certain nombre de diagonales autour de la diagonale principale.

Plus précisément :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{quand } i < j + p \text{ c'est une matrice bande-} p \text{ inférieure} \\ 0 & \text{quand } j > i + q \text{ c'est une matrice bande-} q \text{ supérieure} \end{cases}$$

• Matrice tridiagonale par blocs

Soit A une matrice tridiagonale tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On définit la matrice tridiagonale par blocs tel que :

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & 0 \\ A_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & A_{n-1,n} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des sous-matrices de B .

• **Forme quadratique, matrice définie positive**

On appelle forme quadratique associée à la matrice A la forme :

$$Q(x) = X^t A X$$

Une matrice A est dite définie positive si :

$$X^t A X > 0, \quad \forall X \neq 0$$

Remarque 1.4.1.

- Une matrice A est positive mais non définie positive si :

$$X^t A X \geq 0, \quad \forall X \neq 0.$$

- Une matrice carré est définie positive si la forme quadratique qui lui est associée est définie positive.

Chapitre 2

Les équations des ondes

On appelle "onde" la phénomène de propagation dans un milieu sans transport de matière :

- Une onde se propage à partir d'une source dans toutes les directions de l'espace.
- La perturbation se transmet de proche en proche avec un transfert d'énergie sans transport de matière.
- Ce phénomène dépend du temps.

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles du second ordre décrivent les phénomènes de propagation d'ondes comme les ondes sonores, lumineuses ou les vagues Cette équation apparaît dans de nombreux domaines.

Dans ce chapitre on va présenter les types d'équations des ondes, l'existence, l'unicité et propriétés des solutions.

2.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles notée E.D.P (partial differential equation ou P.D.E en anglais) fait intervenir plusieurs variables indépendantes (souvent en temps et espace) ainsi que les dérivées partielles de la fonction inconnue (recherchée).

Une équation aux dérivées partielles pour la fonction $u(x_1, \dots, x_n)$ peut s'écrire sous la forme :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots) = f \quad (2.1)$$

Dans Ω qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f représente les données du problème, F est une fonction de plusieurs variables réelles.

L'ordre de l' E.D.P est l'ordre le plus élevé parmi toutes les dérivées partielles de l' E.D.P.

Remarque 2.1.1.

1- Si $n = 1$, alors l' E.D.P devient une équation différentielle ordinaire (E.D.O).

2- Si $f = 0$ on dit que l'équation (2.1) est homogène.

Définition 2.1.1.

Les E.D.P linéaires ne contiennent aucun produit de variable avec elle même ou une de ses dérivées. Si u n'est pas linéaire en au moins une dérivé dans l' E.D.P, alors l' E.D.P est non linéaire.

Exemple 2.1.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Cette équation est linéaire, homogène et d'ordre 1.

Exemple 2.1.2.

L'équation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

non linéaire est d'ordre 2.

2.1.1 E.D.P linéaires du premier ordre

On a la forme générale d' E.D.P linéaire du premier ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y)$$

Exemple 2.1.3.

l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

2.1.2 E.D.P linéaires de second ordre

Elles sont sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (2.3)$$

où les trois premiers termes A, B, C sont des constantes.

2.1.3 Classification

Le type de l' E.D.P (1.2) dépend de signe de Δ (le discriminant) tel que $\Delta = B^2 - 4AC$:

- Si $\Delta > 0$, alors l' E.D.P est hyperbolique.
- Si $\Delta = 0$, alors l' E.D.P est parabolique.
- Si $\Delta < 0$, alors l' E.D.P est elliptique.

Exemple 2.1.4.

1) L 'exemple le plus simple d' E.D.P hyperbolique est l'équation de propagation d'une onde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0; \quad C > 0 \\ \Delta = B^2 - 4AC &= 4C^2 > 0 \end{aligned}$$

2) Une E.D.P parabolique est celui de la diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0; \quad d > 0 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

3) Une E.D.P elliptique est l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.1.4 Conditions aux limites

Soient u et une E.D.P sur Ω , où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, en imposant des conditions aux limites sur le bord du domaine noté $\partial\Omega$. On va citer trois types de conditions aux limites :

- **Dirichlet** : si on impose u sur une partie de $\partial\Omega$.
- **Neumann** : si on impose $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur une partie de $\partial\Omega$; $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \overrightarrow{\text{grad}}(u), n \rangle$ avec n normale extérieure unitaire à Ω .
- **Conditions mixtes** : Si on impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$.

Remarque 2.1.2.

Si l' E.D.P est valide dans tout l'espace, on impose souvent des conditions à l'infini.

2.1.5 Conditions initiales

Si l' E.D.P modélise un problème d'évolution, on ajoute la condition initiale qui dépend du temps.

Exemple 2.1.5.

On considère "le problème de Cauchy" :

Soit f une application continue dans $\mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy revient à chercher une fonction y dans $\mathbb{R}^m$ continue et dérivable, telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T] \text{ avec } T \in]0, +\infty[\\ y(0) = y^{(0)} \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Remarque 2.1.3.

(E.D.P + conditions aux limites) $\Rightarrow$ (problème aux limites)

2.1.6 Problème bien posé

Proposition 2.1.1.

Un problème aux limites (P) est dit bien posé si :

1. Il existe une solution de (P) satisfaisant les conditions aux frontières .
2. La solution doit -être unique.
3. La solution doit -être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées.

Remarque 2.1.4.

On dit qu'un problème est mal posé s'il n'est pas bien posé.

Exemple 2.1.6.

On prend (P) :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= 0 & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$$

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x = 0 \text{ et } y \in [0, 1]\}$$

Toute fonction $u(x, y) = a(e^x - e^{-x})$, avec $a \in \mathbb{R}$ est une solution de (P) selon les valeurs de a .

Donc : (P) est mal posé, car l'unicité n'est pas vérifiée.

2.2 Les équations des ondes en dimension 1 (D1)

On appelle équation des ondes (linéaire) l' E.D.P d'évolution, du second ordre en temps (t) et en espace (x) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$$

où c est un nombre réel positif donné, homogène à vitesse de propagation de l'onde.

En dimension un (d'espace), les équations des ondes modélisent les équations des cordes vibrantes.

- La solution générale de cette équation est la somme de deux fonctions

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

2.3 Les équations des ondes en dimension supérieure à deux

On appelle équation des ondes (linéaire) en dimension d , l' E.D.P d'évolution du second ordre en temps (t) et en espace ($x \in \mathbb{R}^d$).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f(x, t). \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d.$$

où c est un nombre réel positif donnée, à une vitesse de propagation de l'onde par exemple pour le son c vaut environ 343 m/s , et f est une fonction donné, et Δ est le Laplacien en espace, défini par :

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}$$

Proposition 2.3.1. ([6])

- En dimension impaire, la solution $u(x_0, t_0)$ dépend seulement des conditions initiales

$$\phi = u(., 0) \quad \text{et} \quad \psi = \partial_t(., 0)$$

sur la sphère

$$\{x, \|x - x_0\| = ct_0\}$$

- En dimension paire, la solution $u(x_0, t_0)$ dépend seulement des conditions initiales

$$\phi = u(., 0) \quad \text{et} \quad \psi = \partial_t(., 0)$$

sur la boule

$$\{x, \|x - x_0\| \leq ct_0\}$$

2.4 Type d'équations des ondes

2.4.1 Les ondes acoustiques

Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (borné ou non) rempli de fluide, la propagation d'ondes acoustiques dans ce fluide dépend de $\rho(x)$ la densité de fluide au point x , $c(x)$ la vitesse locale des ondes acoustiques.

L'équation qui régit les variations de la pression $P(x, t)$ du fluide en un point x et à l'instant t est l'équation des ondes :

$$\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho(x)} \nabla P \right) = g, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

où

$$\mu(x) = \rho(x)c^2(x)$$

En milieu homogène, cette équation devient simplement :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \Delta P = g, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

La fonction $g(x, t)$ est la source.

Application

Les ondes acoustiques interviennent par exemple en acoustique musicale, en acoustique de salle, en acoustique sous-marine, ou pour étudier les phénomènes de houle.

2.4.2 Les ondes élastiques

Les équations du mouvement sont :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\sigma) = \rho \vec{g} \quad (2.6)$$

où $\vec{u}(x, t)$ est un vecteur représentant le déplacement d'une particule du point x à l'instant t , σ est le tenseur des contraintes, relié au tenseur des déformations $\varepsilon(\vec{u})$ par la loi de comportement du matériau.

Application

Les ondes élastiques se rencontrent notamment lorsqu'on étudie des problèmes de sismique ou de géophysique, contrôle non destructif.

2.4.3 Les ondes électromagnétiques

Dans un milieu que nous supposons diélectrique linéaire isotrope, un champ électromagnétique dans un domaine Ω est décrit par le champs électrique $\vec{E}(x, t)$ et le champ magnétique $\vec{H}(x, t)$ qui vérifient les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} &= 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} - \text{rot} \vec{H} + \vec{j}_s &= 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\varepsilon(x) > 0$ est la permittivité diélectrique du milieu, $\mu(x) > 0$ est la perméabilité magnétique du milieu, $\sigma(x) \geq 0$ est la conductivité du matériaux, $\vec{j}_s$ est un courant source.

La vitesse des ondes du milieu est donnée par la relation :

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}.$$

Applications

Les ondes électromagnétiques sont beaucoup utilisées pour la détection d'objets volants. Elles interviennent bien sûr aussi dans tout ce qui concerne les télécommunications, en particulier dans l'étude des antennes ou en optique (fibres optiques, optique intégrée).

Remarque 2.4.1.

On va étudier l'équation des ondes acoustiques qu'on va la prendre comme modèle .

2.5 Étude des équations des ondes acoustiques

2.5.1 L'existence et l'unicité : formule d'Alembert

Théorème 2.5.1. ([1])

Soient $g \in C^2(\mathbb{R})$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ du problème de Cauchy suivante avec le caractère bien posé :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

et pour les conditions initiales :

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), x \in \mathbb{R}$$

alors u est donnée par la formule d'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

Remarque 2.5.1.

La factorisation d'opérateurs suivante permet également de conclure, et sera utilisée plus pleinement pour obtenir la formule de d'Alembert :

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x)$$

2.5.2 Conséquences de la formule d'Alembert

La formule d'Alembert permet d'observer la propriété suivante de stabilité, caractérisée par la dépendance continue de la solution par rapport aux données de Cauchy en norme $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ pour tout $T > 0$ fixé.

Corollaire 2.5.1. ([1])

Soit $T > 0$ fixé et $\epsilon > 0$ donné, soient (g_1, h_1) et (g_2, h_2) deux couples de fonctions dans $C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$ tels que :

$$\|g_1 - g_2\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|h_1 - h_2\|_\infty \leq \epsilon.$$

Soient u_1, u_2 les solutions respectivement obtenues pour ces données de Cauchy. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+, t \leq T$ on a :

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon(1 + T)$$

Domaine de dépendance et domaine d'influence :

Comme on le voit dans la formule de d'Alembert, il y a propagation à vitesse finie de l'information. C'est une propriété typique des E.D.P hyperboliques. Plus précisément, le domaine de dépendance de (x, t) est le triangle :

$$\Delta_{x,t} = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid t_q : 0 \leq \tau \leq t, -c(t - \tau) \leq y - x \leq c(t - \tau)\}.$$

Réciproquement, le domaine d'influence du point (x, t) est le cône :

$$\Gamma_{x,t} = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mid t_q : \tau \geq t, -c(\tau - t) \leq y - x \leq c(\tau - t)\}$$

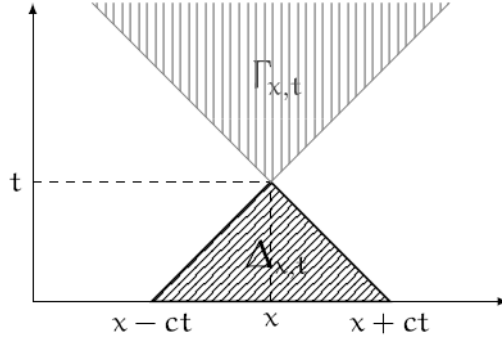


FIGURE 2.1 – Domaines de dépendance et d'influence

Proposition 2.5.1. (*Problème de Cauchy non-homogène*) ([1])

Soit $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, on considère le problème de Cauchy non-homogène suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

et pour les conditions initiales :

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), x \in \mathbb{R}$$

avec $g \in C^2(\mathbb{R})$ et $h \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il y a une existence et unicité de solution $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \frac{1}{2c} \int_{\Delta_{x,t}} f(y, r) dy dr$$

2.5.3 Quelques propriétés de la solution

On considère à présent l'équation des ondes D1 posée sur le domaine d'espace normalisé $[0, 1]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, x \in]0, 1[$$

et pour les conditions initiales :

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), x \in]0, 1[$$

et par exemple les conditions de bord de Dirichlet homogène

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

De manière plus générale, si les conditions initiales g et h admettent des développements en série de Fourier de la forme

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(n\pi x), h(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n\pi c) b_n \sin(n\pi x)$$

alors la solution du problème de Dirichlet est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x),$$

Chapitre 3

Principe de la méthode de différences finies

Les mathématiques utilisent couramment les notions d'infini et de continu.

Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. En vue du passage d'un problème exacte (continu) au problème approchée (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes : les différences finies, les éléments finis et volumes finies.

Mais sachez que nous n'utiliserons ici que la méthode différences finies (on note par D.F). La méthode des D.F consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

- **Avantages :**

grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Elle est couramment pratique et facile d'accès.

- **Inconvénients :**

Limitation de la géométrie des domaines de calculs, difficultés de prise en compte des conditions aux limites et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Maillage

Puisqu'on a évoqué le mot maillage dans le paragraphe précédent et qu'on en aura tout le temps besoin, définissons-le ici.

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer D.F. Pour une application définie sur un segment de $\mathbb{R}$, on ajoutera en général les deux extrémités du segment ; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir éventuellement des points du contours du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins.

3.1.2 Erreur de troncature

On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant les dérivées par les différences divisées. Le calcul des erreurs de troncature est usuellement basé sur les développements de Taylor.

L'erreur de troncature est une erreur qui indique comment l'équation est approchée par le schéma. Ce n'est pas une erreur entre la solution exacte et la solution approchée (erreur de convergence), mais c'est une erreur qui quantifie à quel ordre la solution exacte vérifie le schéma.

3.1.3 Ordre de schéma

On dit qu'un schéma de discrétisation à N points de discrétisation est d'ordre p s'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de la solution exacte, tel que l'erreur de consistance satisfait :

$$\max_{i=1,\dots,N} (R_i) \leq Ch^p$$

Où R_i est l'erreur de troncature et h est le pas de maillage (c'est à dire le maximum de $x_{i+1} - x_i$).

3.1.4 Consistance de schéma numérique

Un schéma aux différences finies est consistant si :

$$\max_{i=1,\dots,N} (R_i) \rightarrow 0$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, où N est le nombre de points de discrétisation.

3.1.5 Stabilité de schéma numérique

Par définition, un schéma numérique est stable si les erreurs (d'arrondi, de troncature,...) ne peuvent pas croître pendant la procédure numérique d'un pas de temps au suivant :

Un schéma peut être :

- Inconditionnellement instable : Quels que soient Δt et Δx les erreurs s'amplifient au fil des itérations. Ceci cause des résultats complètement faux.
- Inconditionnellement stable : Quels que soient $\Delta t, \Delta x$ les erreurs causées par le schéma numérique n'explose pas au fil des itérations.
- Conditionnellement stable : On doit poser une condition sur Δt et Δx pour que la solution n'explose pas par exemple la condition de Courant-Friedrichs -Lewy qu'on va définir dans la paragraphe suivante.

3.1.6 Interprétation de la condition de Courant-Friedrichs -Lewy 1928 (CFL)

C'est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du schéma, ce qui montre que la stabilité d'un schéma ne peut pas nécessairement être assurée quelle que soit la manière dont Δt et Δx tendent vers à zéro. C'est une condition très contraignante d'un point de vue pratique, puisque si l'on souhaite avoir une bonne précision en espace, il est nécessaire de choisir Δx petit ce qui impose un choix de Δt nettement plus petit.

3.1.7 Convergence

Théorème 3.1.1. (*Lax*)

Dans un problème bien posé, une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'un schéma est la stabilité et la consistance.

3.2 Différences finies en dimension 1

Toutes les méthodes numériques présupposent les discrétisations du domaine géométrique pour passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

3.2.1 Discrétisation de domaine

Dans ce cas on discrétise l'intervalle continu $[a, b]$ on approche les dérivées aux points de discrétisation par des opérateurs aux différences. Plus précisément, on se donne un entier N à partir duquel on définit le pas de discrétisation

$$h = \Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

On introduit les $N + 1$ points $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N$ qui forment alors une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ (manière uniforme). On remplace ainsi le problème continu par celui de la recherche de valeurs approchées u_i des solutions $u(x_i)$ aux points x_i de la discrétisation.

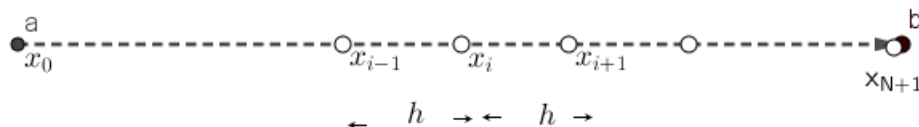


FIGURE 3.1 – Discrétisation par D.F en D1

3.3 Construction de schémas

3.3.1 la dérivée première

Soit u une fonction d'une variable de classe C^2 . Si h tend vers 0, en utilisant le développement limite de Taylor de la fonction u jusqu'à l'ordre 2 au point $(x_i + h), (x_i - h)$ on obtient :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2) \quad (3.1)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^2) \quad (3.2)$$

• **indicielle cas D1 :**

Le schéma aux D.F d'ordre 1 en "avant" ou "décentré avant" ou "décentré à droite" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.3)$$

Le schéma aux D.F d'ordre 1 en "arrière" ou "décentré à gauche" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.4)$$

on note $u_i = u(x_i)$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = u'_i$.

• **Schéma centré :**

Effectuant d'abord un développement de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 3.

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3) \quad (3.5)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^3) \quad (3.6)$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3) \quad (3.7)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.8)$$

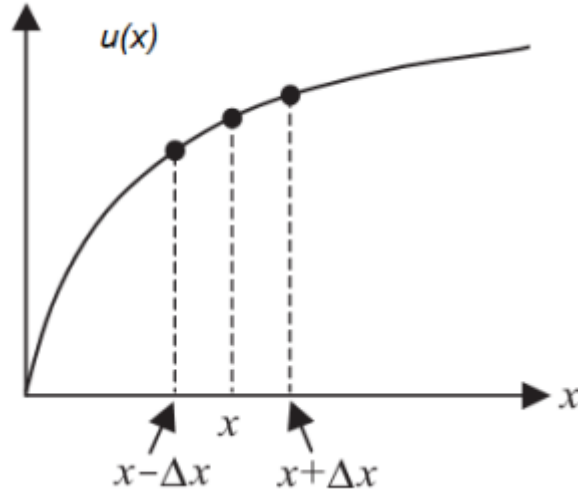


FIGURE 3.2 – Approximation de D.F

Remarque 3.3.1.

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle stencil.

3.3.2 La dérivée seconde

Effectuant d'abord un développement de Taylor au voisinage de x_i à l'ordre 4.

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (3.9)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (3.10)$$

En faisant la somme de deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (3.11)$$

Ce que permet d'obtenir le schéma d'ordre 2 dit "centré" pour approximation la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.12)$$

3.4 Différences finies en dimension 2

3.4.1 Discrétisation de domaine

On a recours à la discrétisation en temps et en espace de façon uniforme pour se ramener à un système d'équations de dimension finie. Il est souhaitable pour la validité du calcul que la solution approchée obtenue par la résolution de ce système. La discrétisation consiste donc à se donner un ensemble de points t^n , $n = 0, \dots, M$ de l'intervalle $[0, T]$, et un ensemble de points x_i , $i = 0, \dots, N$ de l'intervalle $[a, b]$.

Pour simplifier, on considère un pas constant en temps et en espace. Soit $h = \frac{b-a}{N} = \Delta x$ le pas de discrétisation en espace, et $k = \frac{T}{M} = \Delta t$ le pas de discrétisation en temps. On pose alors $t^n = nk$ pour $n = 0, \dots, M$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, \dots, N$.

Dans le cas de D2 $u(x, t)$ est décomposé en $N \times P$ les couples de points (x_i, t^n) forment une grille espace-temps sont appelés les nœuds de grille.

On notera u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au nœuds (x_i, t^n) (ie : $u_i^n \simeq u(x_i, t^n)$).

3.5 Construction de schémas

3.5.1 Les dérivées premières

Par le développement limité de Taylor par rapport à le variable de temps (x_i étant fixé) on obtient :

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^+) \quad , \xi^+ \in [t^n, t^{n+1}] \quad (3.13)$$

$$u(x_i, t^{n-1}) = u(x_i, t^n) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \xi^-) \quad , \xi^- \in [t^{n-1}, t^n] \quad (3.14)$$

De la même manière on obtient :

- Différentielle progressive (en avant) d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.16)$$

Par ce schéma on obtient un schéma explicite et d'ordre 1 en temps.

Explicite : calcul direct de u^{n+1} en fonction de u^n . En particulier, aucune inversion de matrice ou résolution de système linéaire n'est nécessaire pour le calcul, le plus simple mais stable sous condition.

- Différentielle régressive (en arrière) d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.18)$$

Par ce schéma on obtient un schéma implicite et d'ordre 1 en temps.

Implicite : on doit passer par un système linéaire pour trouver u^{n+1} en fonction de u^n , plus compliquée mais inconditionnellement stable.

- Schéma centré :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (3.20)$$

Ce schéma appelé schéma saute-mouton est à la fois explicite et d'ordre 2 en temps. Cependant, comme on le verra, il est toujours instable, et donc numériquement inutilisable.

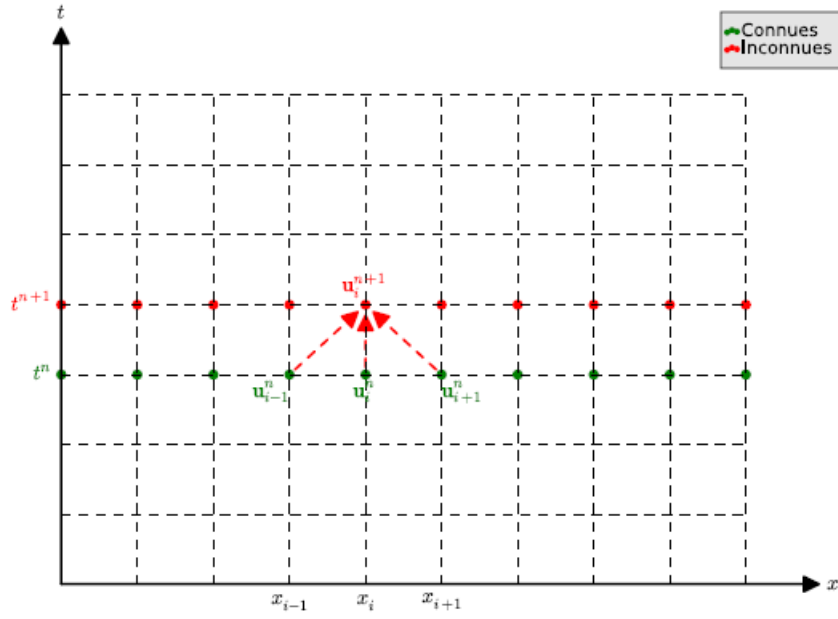


FIGURE 3.3 – Calcul de u^{n+1} par le schéma explicite

3.5.2 les secondes dérivées

De la même manière on obtient :

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.21)$$

C'est un schéma centré et d'ordre 2 en espace.

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial t^2} \right)_n = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \quad (3.22)$$

C'est un schéma centré et d'ordre 2 en temps.

3.5.3 Dérivée d'ordre supérieur

On va citer quelques résultats d'approximation de dérivées d'ordre supérieur où l'ordre d'erreur de troncature est 2 dans le tableau suivant :

	u_i	u_{i-1}	u_{i-2}	u_{i-3}	u_{i-4}	u_{i-5}
$\Delta x^2 u_i''$	2	-5	4	0	0	0
$2\Delta x^3 u_i^{(3)}$	5	-18	24	14	3	0
$\Delta x^{(4)} u_i^{(4)}$	3	-14	26	-24	11	-2

$+ O(\Delta x^2)$

Chapitre 4

Résolution par D.F de l'équation des ondes

Dans ce chapitre, on va étudier quelques schémas aux différences finies, pour notre problème du ondes. Dans le but de faire une comparaison entre ces schémas, du point de vue consistance, stabilité et convergence.

4.1 Problème continue

Dans un domaine non borné ce problème consiste à chercher :

$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & = & f \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) & = & u_0(x) \quad \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

On suppose que le paramètre c (vitesse d'onde) est positive.

Si le domaine est borné, en temps et espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f \quad x \in [0, L], t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v^0 \quad \text{données : conditions initiales,} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{condition aux limites.} \end{array} \right.$$

4.2 Première approche : problème discret

4.2.1 Discrétisation

Une première méthode pour résoudre numériquement ce problème d'évolution consiste à discrétiser l'équation du second ordre par différences finies. Plaçons nous dans le cas mono-dimensionnel d'une corde de longueur L pour simplifier. On choisit une discrétisation régulière de $[0, L]$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = M\Delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = N\Delta t$. Notons x_i le point $i\Delta x$ et t^n le temps $n\Delta t$. Notons u_i^n la valeur de la solution approchée au point x_i et au temps t^n .

4.2.2 Le Schéma D.F explicite (en temps) et centré (en espace)

En prend $f = 0$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_i^0 = u^0(x_i) \text{ et } u_i^1 = u_i^0 + \Delta t v_i^0 \text{ tel que } i = 1, \dots, M-1 \text{ conditions initiales} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N \text{ conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ce schéma est un schéma explicite car il donne une formule explicite de calcul de la solution au temps t^{n+1} en fonction des valeurs de la solution au temps précédent. Il n'y a pas d'équation à résoudre pour obtenir la valeur au nouvel instant t^{n+1} .

C'est un schéma explicite alors :

$$u_i^{n+1} = 2\left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)u_i^n + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1}$$

• **Erreur de troncature :** On a $E_i^n = (E_i + E^n)$ tel que E_i l'erreur de l'espace et E^n l'erreur de temps

$$|E_i^n| \leq c(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

Démonstration 4.2.1.

Par le développement limité de Taylor pour la solution exacte u supposée suffisamment régulière, on trouve par rapport à la variable de temps (x_i étant fixé) on obtient :

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \xi^+), \xi^+ \in [t^n, t^{n+1}] \quad (4.2)$$

$$u(x_i, t^{n-1}) = u(x_i, t^n) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \xi^-), \xi^- \in [t^{n-1}, t^n] \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4}(u(x_i, \xi^+), u(x_i, \xi^-))$$

De même manière pour l'espace alors on obtient :

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u(\xi_+, t^n), u(\xi_-, t^n)) \quad (4.4)$$

Puisque u est solution, les premiers termes disparaissent ; il reste alors une erreur de troncature

$$|E_i^n| = |E^n + E_i| = \left| \frac{\Delta t^2}{12} M + \frac{\Delta x^2}{12} M' \right| \leq \frac{\Delta t^2}{12} |M| + \frac{\Delta x^2}{12} |M'| \quad (4.5)$$

$$|E_i^n| \leq C(\Delta t^2 + \Delta x^2)$$

et $C = \frac{1}{12} \max(M, M')$ tels que :

$$M = \sup \left| \frac{\partial^4}{\partial t^4}(u(x_i, \xi^+), u(x_i, \xi^-)) \right|$$

$$M' = \sup \left| \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u(\xi_+, t^n), u(\xi_-, t^n)) \right|$$

.

• Consistance :

Le schéma est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace, et consistant pour l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0 .

• Ordre :

Ce schéma explicite est d'ordre deux en temps et en espace tels que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t^n) = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}(x_i, t^n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

• **Stabilité :**

Dans le cas de schémas numériques appliqués à des problèmes hyperboliques nous choisirons comme condition de stabilité, d'imposer au vecteur des solutions approchées d'être conservé ou de décroître en norme au cours du temps.

$$u_i^{n+1} = 2 \left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_i^n + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1}$$

Pour avoir la combinaison convexe :

$$2 \left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - 1 = 1$$

et

$$0 < \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

et

$$0 < 2 \left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) < 1$$

pour l'inégalité :

$$2 \left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) > 0$$

est vérifiée pour $\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1$.

Il nous reste la deuxième inégalité c.à.d :

$$2 \left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) < 1 \Rightarrow \frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

Donc : la condition CFL de stabilité est :

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1$$

• **Convergence :**

D'après le théorème de Lax, on obtient la convergence (consistance et stabilité implique la convergence).

4.2.3 Schéma aux D.F implicite décentré (en temps) et centré (en espace)

On considère le schéma implicite suivant directement déduit du schéma explicite précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ u_i^0 = u^0(x_i) \text{ et } u_i^1 = u^0(x_i) + \Delta t v^0(x_i) \text{ tel que } i = 1, \dots, M-1 \text{ conditions initiales} \\ u_0^n = u_M^n = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N \text{ conditions aux limites de Dirichlet homogènes} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Remarque 4.2.1.

Pour l'erreur de troncature, consistance et l'ordre sont les même dans le schéma explicite.

• Stabilité :

Le schéma est inconditionnellement stable (au sens de Von Neumann). [8]

4.3 Seconde approche : système de premier ordre équivalent

On a l'équation des ondes du second ordre :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.7)$$

On introduit v et w deux fonctions indépendantes telles que :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{et} \quad w = c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.8)$$

alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

C'est un système de deux équations du premier ordre, pour lequel on doit se donner les deux conditions initiales suivantes au temps zéro pour v et w :

$$v(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v^0(x) \quad (4.10)$$

et

$$w(x, 0) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = c \frac{d}{dx} u^0(x) \quad (4.11)$$

ceci peut également s'écrire :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (4.12)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

On retrouve sous cette forme un système conservatif généralisant, dans le cas d'une inconnue vectorielle ($\vec{u}$), on obtient l'équation de transport.

Remarque 4.3.1.

Pour la discrétisation de temps et l'espace est comme dans la première approche.

Chapitre 5

Application

5.1 Le modèle de la corde vibrante finie :

On considère une corde de longueur L ($L = 5m$) fixée aux extrémités. L'équation de déplacement transversal au cours de temps s'écrit :

$$(P_c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad x \in [0, 5], t \in [0, 2] \\ u(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_i^0 = 1 \quad \text{données : conditions initiales,} \\ u(0, t) = u(5, t) = 0 \quad \text{condition aux limites.} \end{array} \right.$$

D'après le théorème (2.5.1) le (P_c) admet une solution unique.

Discrétisation :

Prendre $c = 1m/s$, $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = 0.4$:

$$(P_h) \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \\ u_i^0 = 0 \quad \text{et} \quad u_i^1 = u_i^0 + \Delta t v_i^0 = 0.4, i = 1, \dots, 9 \quad \text{conditions initiales,} \\ u_0^n = u_{11}^n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

La condition initiale : $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1$

On va utiliser D.F en avant

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} = v_i^0 = 1 \Rightarrow u_i^1 = \Delta t = 0.4$$

Consistance :

Le schéma est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace.

Stabilité :

Le schéma est stable sous la condition de CFL ($c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$).

Car : $c \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 < 1$ alors le schéma est stable.

La convergence :

D'après le théorème de Lax on obtient la convergence.

Remarque 5.1.1.

Notre schéma est à deux pas, car pour calculer U^{n+1} , il faut utiliser les valeurs de U^n et U^{n-1} .

Forme matricielle :

On a :

$$u_i^{n+1} = 2 \left(1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_i^n + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1}$$

On pose :

$$r = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

alors :

$$u_i^{n+1} = 2(1 - r^2)u_i^n + r^2(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1} \quad (5.1)$$

$$\Downarrow$$

$$U^{n+1} = BU^n - U^{n-1}$$

tel que :

$$B = \begin{pmatrix} 2(1-r^2) & r^2 & \dots & 0 \\ r^2 & 2(1-r^2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & r^2 \\ 0 & \dots & r^2 & 2(1-r^2) \end{pmatrix}$$

où bien :

$$U^{n+1} = (2I - r^2 A)U^n - U^{n-1},$$

tel que :

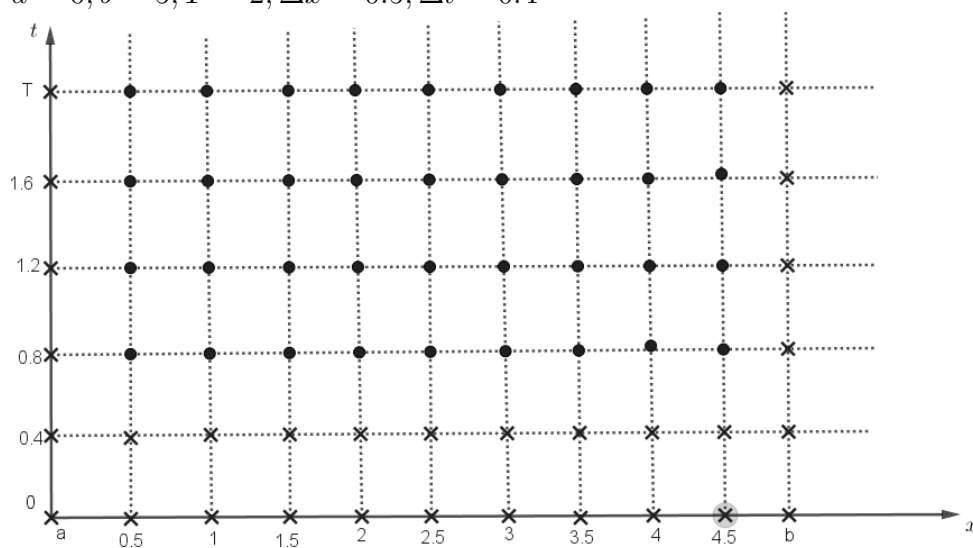
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice tridiagonale symétrique et définie positive, alors la matrice B l'est aussi. Donc le système admet une solution unique.

Résolution numérique :

Les composantes de vecteur solution U est donné à partir le schéma suivant et on prend :

$$a = 0, b = 5, T = 2, \Delta x = 0.5, \Delta t = 0.4$$



• $\longrightarrow$ Nœuds intérieures où on cherche u_i^n .

× $\longrightarrow$ Nœuds où la valeur de u_i^1 est connue à partir des conditions initiales et aux limites.

Remarque 5.1.2.

Numération du bas vers haut et de la gauche vers la droite.

On a :

$$U = \begin{pmatrix} u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tel que : } u^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \\ u_7^2 \\ u_8^2 \\ u_9^2 \end{pmatrix} ; \quad u^3 = \begin{pmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \\ u_7^3 \\ u_8^3 \\ u_9^3 \end{pmatrix} ; \quad u^4 = \begin{pmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \\ u_6^4 \\ u_7^4 \\ u_8^4 \\ u_9^4 \end{pmatrix} ; \quad u^5 = \begin{pmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \\ u_3^5 \\ u_4^5 \\ u_5^5 \\ u_6^5 \\ u_7^5 \\ u_8^5 \\ u_9^5 \end{pmatrix}$$

On utilise maintenant un programme Matlab pour la résolution de (5.1) sous les conditions aux limites et initiales données.

• Le programme :

```
clc
clear all;
Nx = 11; x
dx = 0.5; % delta x
x=0 :0.5 :5;
Nx=length(x);
dt=0.4;
t=0 :0.4 :2;
T = length(t); % Total number of time steps
```

```

c = 1 ; % Wave velocity
r= c*(dt/dx) ; % CFL condition
U = zeros(Nx,T) ; % U(x,t) = U(space,time)
% Initial condition
U(:,1)=0 ;
U(:,2)=0.4 ;
% conditions aux limites
U(1, :)=0 ;
U(11, :)=0 ;
for i = 2 :Nx-1
for j = 2 :T-1

$$U(i, j + 1) = 2 * U(i, j) - U(i, j - 1) + r^2 * (U(i - 1, j) - 2 * U(i, j) + U(i + 1, j)) ;$$

end
end
surf(U,'line','none') ;
x label('X')
y label('time ')
U

```

Les résultats

$\begin{array}{c} t \\ \backslash \\ x \end{array}$	$u^2 \ (t^2 = 0.8)$	$u^3 \ (t^3 = 1.2)$	$u^4 \ (t^4 = 1.6)$	$u^5 \ (t^5 = 2)$
$x_1=0.5$	0.5440	-0.0083	-0.5500	-0.3877
$x_2=1$	0.8000	0.5242	-0.4279	-1.1843
$x_3=1.5$	0.8000	0.6880	0.0308	-0.9397
$x_4=2$	0.8000	0.6880	0.1375	-0.5706
$x_5=2.5$	0.8000	0.6880	0.1357	-0.5035
$x_6=3$	0.8000	0.6880	0.1357	-0.5035
$x_7=3.5$	0.8000	0.6880	0.1357	-0.5035
$x_8=4$	0.8000	0.6880	0.1357	-0.5035
$x_9=4.5$	0.5440	0.5037	0.2590	-0.2304

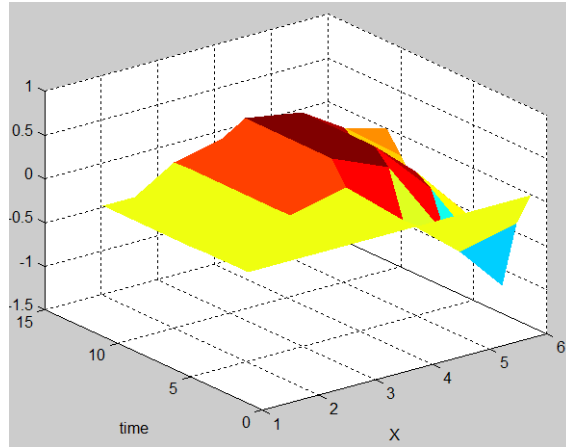


FIGURE 5.1 – le graphe d'exemple étudié CFL vérifié

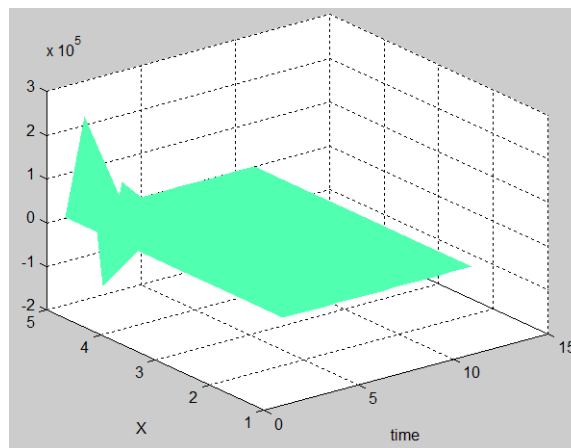


FIGURE 5.2 – CFL non vérifié

Bibliographie

- [1] Benjamin. Boutin, *Eq des ondes calcul scientifique*, Univ de Rennes 1, Mars 2012.
- [2] Eliane. Béchar, *Schéma numérique pour la résolution de l'équation des ondes*, Master Simulaion et Modélisation, Janvier 2009.
- [3] Francois. Cuvelier, *Méthodes numériques*, Notes de cours, Univ Paris XIII.
- [4] Sébastien. Charnoz et Adrian. Daer, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*, Univ Paris 7.
- [5] Gérard. Debeaumarché, *Introduction aux équations aux dérivées partielles linéaires*.
- [6] Robert Dautray, Jacques-Louis Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1988.
- [7] Dr Harnane. Yamina, *Méthodes numériques I-Méthode des différences finies*, Cours, Univ- Larbi Ben M'hidi- Oum Elbouaghi, 2015-2016.
- [8] Raphael. Herbin, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles* , Université Aix Marseille 1, 26 oct 2011.
- [9] Franck. Jedrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition*, Springer-Verlag France, Paris 2005.
- [10] Reisser. Laurant, *Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides* , 4 février 2006.
- [11] David. Morceau, *Résolution pratique des équations aux dérivées partielles*.
- [12] Nelly. point et Jacques. Hervé, *Équation aux dérivées partielles, Mathématiques et Méthodes numériques*, 22 juin 2009.
- [13] Alfio. Quarteroni, Riccardo. Sacco, Fausto. Saleri, *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*, Springer-Verlag Italia, Milano 2004.

- [14] Sandro SALSA, *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*, Springer-Verlag Italia, 2008.
- [15] Walter A. STRAUSS, *Partial differential equations. An introduction*, John Wiley Sons, 1992.
- [16] JF. Scheid, *Méthode numérique pour la dynamique des fluides*, Univ Lorraine Master 2 IMoi, 2011-2012.

Résumé

Le but de ce travail est l'étude de la méthode de différences finies et ses applications sur problème aux limites hyperbolique, où on a pris comme un modèle l'équation des ondes.

Mots clés:

Équations aux dérivées partielles - méthode de différences finies - équation des ondes

Abstract

In this work, we study the method of finite differences and her applications on hyperbolic boundary problem, we took wave equation as a model.

Keys words:

Partial differential equation - finite differences method - wave equation

ملخص

هذا العمل يتمثل في عرض طريقة الفروق المنتهية وتطبيقاتها على مسألة حدية زائدية والتي أخذنا منها معادلة الأمواج كنموذج.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الجزئية - طريقة الفروق المنتهية - معادلة الأمواج