

Polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Rehouma Abdelhamid.

Département de mathématiques, faculté de Sciences exactes,
Université de Hama Lakhdar d'Eloued .Algérie
E-mail : rehouma-abdelhamid@univ-eloued.dz

RESUME

Soit μ une mesure positive finie définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{C}$ et concentré sur le cercle unité $T = \{z, |z| = 1\}$. μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta$ sur $[-\pi, +\pi]$, i.e.

$$d\mu(\theta) = \rho(\theta)d\theta, \quad \rho \geq 0, \quad \rho \in L^1([-\pi, +\pi], d\theta). \quad (1.1)$$

Soit $\{L_n\}$ le système de polynômes orthogonaux sur le cercle unité in brief **POCU** i.e. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_0^{2\pi} L_n(z) (\bar{z})^k \rho(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad z = e^{i\theta}. \quad (1.2)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, que nous appellerons pôle, définissons les deux suites des polynômes polaires respectivement de premier ordre et de seconde ordre notés $P_n(z)$, $Q_n(z)$ associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité (POCU) $L_n(z)$, comme suit. $P_n(z) = z^n + \dots$, $Q_n(z) = z^n + \dots$,

$P_n(z)$ est un polynôme unitaire (monique)) est solution de l'équation différentielle suivante:

$$(n+1) L_n(z) = ((z - \alpha) P_n(z))' \quad (1.3)$$

$Q_n(z)$ est un polynôme unitaire (monique)) est solution de l'équation différentielle suivante:

$$(n+2)(n+1) L_n(z) = ((z - \alpha)^2 Q_n(z))'' \quad (1.4)$$

On étudie dans cet manuscrit les propriétés structurelles des polynômes polaires P_n , et Q_n de premier et seconde ordre respectivement.

Pour assurer l'unicité des polynômes polaires P_n , et Q_n de premier et seconde ordre évidemment on doit supposer les deux conditions :

$$[(z - \alpha) P_n(z)]_{z=\alpha} = 0$$

et

$$\left[((z - \alpha)^2 Q_n(z))' \right]_{z=\alpha} = 0$$

1 Définition et propriétés générales des polynômes orthogonaux et polynômes associés sur le cercle unité

Notons que $\Phi_n(z) = (z - \alpha) P_n(z)$ est un polynôme monique, primitive de $(n + 1) L_n(z)$, normalisé par la relation $\Phi_n(\alpha) = 0$. Une conséquence directe des relations précédentes est que $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_0^{2\pi} ((z - \alpha) P_n(z))' (\bar{z})^k \rho(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (z = e^{i\theta}). \quad (1.5)$$

et

$$\int_0^{2\pi} ((z - \alpha)^2 Q_n(z))'' (\bar{z})^k \rho(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (z = e^{i\theta}) \quad (1.6)$$

Ce type d'orthogonalité généré par des opérateurs différentiels a été introduit initialement par Aptekarev, Cachafeiro, Marcellán, (voir: [2]) et Alfaro et Marcellán, (voir:14). Une étude similaire a été effectuée par A. Fundora, H. Pijera et W. Urbina, (voir:[22,49]), dans le cas où la mesure est concentrée sur le segment $[-1, +1]$, au lieu du cercle $T = \{z, |z| = 1\}$. Une étude autre similaire a été effectuée par Ya. Laskri, A. Rehouma (voir:[26,27,28]), dans le cas où la mesure de surface (planar measure) est concentrée sur le disque unité (polynômes polaires des polynômes orthogonaux de type de **Bergman**). En anglais (Polar Bergman polynomials on domains with corners) (voir:[26,27,28]).

Le chapitre I de ce manuscrit est consacré à l'étude des propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur le cercle unité, **POCU**. On définit dans ce chapitre aussi les polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité. On donne quelques propriétés générales de ces polynômes.

Le chapitre II est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur le cercle unité, (**POCU**).

le chapitre III de ce manuscrit contient une partie importante des résultats originaux de cet exposé. Il est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité, (**POCU**). On y trouve aussi quelques notions et résultats concernant la localisation des zéros des polynômes polaires.

1.1 Généralités sur les polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Soit μ une mesure positive, finie, non discrète et définie sur la tribu Borélienne $B(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ étant muni de sa topologie usuelle. μ est supportée sur le cercle unité $\partial D = T = \{z, |z| = 1\}$. On suppose dans tout ce qui suit que, (voir:[47,21,40,55,57])

$$z^n \in L^2(\mu, \mathbb{C}); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Notons par $\{L_n(z)\}_{n=0}^\infty$ la suite des polynômes orthogonaux sur le cercle unité T par rapport à la mesure μ , $\{L_n(z)\}_{n=0}^\infty$ vérifient donc les relations d'orthogonalité suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_n(z) \overline{L_m(z)} d\mu(\theta) = \delta_{n,m} \|L_n\|_{L^2(\partial D, d\mu)}^2, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (z = e^{i\theta}) \quad (1.7)$$

et

$$\|L_n\| = \|L_n\|_{L^2(\partial D, d\mu)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_n(z)|^2 d\mu(\theta)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (z = e^{i\theta})$$

Pour l'unicité, posons

$$L_n(z) = z^n + \xi_{n,1} z^{n-1} \dots + \xi_{n,n-1} z + \xi_{n,n}$$

Remarquons que

$$\xi_{n,n-1} = L'_n(0) \quad \text{et} \quad \xi_{n,n} = L_n(0)$$

Notons par **OPUC** l'ensemble des polynômes orthogonaux sur le cercle unité. (in short abbreviation **O**rtogonal **P**olynomial **o**n the **U**nit **C**ircle).

Définition 1.1. Soit $\{L_n(z)\}_{n=0}^\infty$ le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure μ sur le cercle unité. On appelle polynômes réciproques des polynômes les polynômes notés $\{L_n^*(z)\}$ et reliés aux polynômes orthogonaux $\{L_n(z)\}$ par la relation

$$L_n^*(z) = \overline{z^n L_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad (1.8)$$

Donnons dans le théorème suivant quelques propriétés de ces polynômes

Théorème 1.1. (voir :[47,21,40,55,57])

. Les polynômes $\{L_n^*(z)\}$ et $\{L_n(z)\}$ vérifient les relations suivantes

$$L_{n+1}(z) = zL_n(z) - \overline{\alpha_n} L_{n+1}(0) L_n^*(z) \quad (1.9)$$

où $\alpha_n = -\overline{L_{n+1}(0)}$, α_n s'appellent les constantes des Verblansky, (voir:[47,21,40,55,57,59]), Et

$$L_n^*(z) = \overline{L_n(0)} z^n + \overline{L_n'(0)} z^{n-1} \dots \overline{\xi_{n,n}} z + 1$$

encore

$$\|L_{n+1}\|_{L^2(\partial D, d\mu)}^2 = (1 - |L_{n+1}(0)|^2) \|L_n\|_{L^2(\partial D, d\mu)}^2 = \quad (1.10)$$

et, (voir :[47,21,40,55,57])

$$\|L_{n+1}\|_{L^2(\partial D, d\mu)}^2 = \prod_{k=0}^n (1 - |\alpha_k|^2)$$

Aussi, on a

$$\langle L_n, z^n \rangle_{L^2(\partial D, d\mu)} = \|L_n\|_{L^2(\partial D, d\mu)}^2 \quad (1.11)$$

dans le même contexte

$$\left\langle L_n(z), \frac{1}{z} \right\rangle_{L^2(\partial D, d\mu)} = L_{n+1}(0) \langle L_n^*(z), 1 \rangle_{L^2(\partial D, d\mu)}$$

et

$$L_n^*(z) = L_{n-1}^*(z) + z \overline{L_n(0)} L_{n-1}(z) \quad (1.12)$$

par suite

$$\left| \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} - z \right| = \left| \frac{L_{n+1}^*(z)}{L_n^*(z)} - 1 \right| = |L_{n+1}(0)|, \text{ pour } |z| = 1.$$

et

$$L_n^*(z) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{L_{k+1}(0)} L_k(z).$$

Si, (voir:[56,59,55,57])

$$d\mu = \rho(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$$

$\rho(\theta)$ est une fonction poids absolument continue et positive sur $[0, 2\pi]$, $d\mu_s$ est une mesure singulière. La formule de **Szegö**, (voir :[55,56,55,57,59])

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - |\alpha_n|^2) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\rho(\theta)) d\theta \right)$$

1.2 Polynômes noyaux

Définition 1.2 Soit $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure μ sur le cercle unité. On appelle polynômes noyaux associés aux polynômes $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ la suite des polynômes notés $\{k_n(z, w)\}_{n=0}^{\infty}$ définies par la relation suivante:

$$k_n(z, w) = \sum_{k=0}^n \frac{\overline{L_k(w)} L_k(z)}{\|L_k\|^2} \quad (1.13)$$

Ceci étant, on obtient la relation dite de **Christoffel-Darboux** suivante:

Lemme 1.1 (lemme de **Christoffel-Darboux**, (voir:[14,23,43,44,57,59])

$$k_n(z, w) = \frac{L_{n+1}^*(z) L_{n+1}^*(w) - L_{n+1}(z) L_{n+1}(w)}{\|L_{n+1}\|^2 (1 - z\bar{w})} \quad (1.14)$$

Définition 1.3 Les polynômes orthogonaux noyaux à l'origine sont définis par

$$k_n(z, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{\overline{L_k(0)} L_k(z)}{\|L_k\|^2} \quad (1.15)$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur le cercle unité par rapport à la même mesure, (voir:[4,14,23,43,44,57,59]).

Parmi les propriétés des polynômes orthogonaux noyaux à l'origine, nous avons le lemme suivant:

Lemme 1.3 (voir:[4,14,23,43,55])

$$k_n(z, 0) = \frac{L_n^*(z)}{\|L_n\|_{\mu}^2}$$

si Q_n est un polynôme de degré $\leq n$ alors $k_n(., 0)$ satisfait la relation suivante:

$$\int_{|z|=1} \overline{D^s k_n(z, 0)} Q_n(z) d\mu(\theta) = Q_n^{(s)}(0) \quad (1.16)$$

Et

$$k'_n(z, 0) = \frac{L_n^{*'}(z)}{\|L_n\|_{\mu}^2}$$

i.e

$$zk'_n(z, 0) = \frac{nL_n^*(z) - (L_n'(z))^*}{\|L_n\|_{\mu}^2}$$

1.3 Propriétés générales des polynômes polaires primitives des POCU

L'intégration de deux propriétés structurelles (1.3) ,(1.4) implique que les polynômes polaires P_n, Q_n vérifient les relations suivantes:

$$P_n(z) = (n+1) \frac{\int_{\alpha}^z L_n(t) dt}{z - \alpha}, \quad (z \neq \alpha), n = 1, 2, 3... \quad (1.17)$$

avec la condition

$$[(z - \alpha) P_n(z)]_{z=\alpha} = 0$$

et

$$Q_n(z) = (n+1)(n+2) \frac{\int_{\xi}^z \int_{\xi}^t L_n(u) du dt}{(z - \alpha)^2}, \quad (z \neq \alpha), n = 1, 2, 3.. \quad (1.18)$$

avec la condition

$$[(z - \alpha)^2 Q_n(z)]'_{z=\alpha} = 0$$

Le pole α est regulier pour les deux polynômes polaires P_n, Q_n . En effet d'après la règle de l'Hôpital, (1.17) et (1.18) impliquent

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} P_n(z) = \lim_{z \rightarrow \xi} \frac{(n+1) \int_{\xi}^z L_n(t) dt}{z - \xi} = (n+1) L_n(\alpha) \quad (1.19)$$

et

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} Q_n(z) = \frac{(n+1)^2 (n+2)}{2} L_n(\alpha) \quad (1.20)$$

2 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et leurs polynomes reciproques

Le problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité a intéressé différents auteurs dans divers contextes. Ce problème a été étudié de façon approfondie par Szegő (voir:[56,55]), 1921), Krein (voir:[3]), 1945), Geronimus(voir:[23,26]), 1958), Nevai, ((voir:[4]), ,1979,et ((voir:[5]) , 1997), Li-Chien Shen ((voir:[26]), 2000) et Lubinsky ((voir:[16]), 2007).

2.1 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Notons par $\{L_n(z)\}$ la suite des polynômes orthogonaux associés au cercle unité et à la mesure μ . Le comportement asymptotique des polynômes $\{L_n(z)\}$ a été étudié par les auteurs cités auparavant sous plusieurs conditions. Citons les principaux cas

a) μ est absolument continue i.e. $d\mu = \rho(\theta)d\theta$; $\rho \in L^1([0, 2\pi], d\theta)$ et $\log(\rho) \in L_1([0, 2\pi], d\theta)$; $d\theta$ étant la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$

b) μ n'est pas absolument continue. La partie absolument continue de μ vérifie la condition suivante dite de Szego, (voir:[23,40,55,56,59])

$$\int_0^{2\pi} \log \mu' > -\infty \quad (2.1)$$

ou la condition dite de **Nevai** (voir:[47])

$$\mu' > 0 \text{ presque partout sur } [0, 2\pi] \quad (2.2)$$

La formule asymptotique obtenue est de la forme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(z)}{z^n} = \frac{1}{D_\rho\left(\frac{1}{z}\right)} \quad (2.3)$$

uniformément sur les compacts de $\{z, z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$, (voir : [23, 47, 55, 56, 57])

D_ρ est dite fonction de **Szegö** et dont les propriétés se trouvent dans le théorème suivant:

Théorème 2.1 (voir:[53,18,33,55,56]). Soit ρ une fonction non négative définie sur $[-\pi, \pi]$ tel que $\rho \in L_2([-\pi, \pi], d\theta)$ et $\log(\rho) \in L_1([-\pi, \pi], d\theta)$; $d\theta$ étant la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$, alors la fonction suivante

$$D_\rho(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \log(\rho(e^{i\theta})) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right\}, \quad (|z| < 1) \quad (2.4)$$

dite fonction de Szegö associée au domaine D et à la fonction f possède les propriétés suivantes:

- (i) $D_\rho \in H^p(D)$.
- (ii) $D_\rho(z) \neq 0$; $\forall z \in D$.
- (iii) $|D_\rho(e^{i\theta})|^p = f(\xi)$; presque partout sur Γ , où $D_f(e^{i\theta})$ est la limite radiale de D_f .
- (vi) $D_\rho(0) > 0$.

Définition 2.1 (voir:[22,49,49,46]) Soit Q_n polynôme de degré n . Notons par $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$ les zéros simples de Q_n et par $\nu_n(Q_n)$ la mesure suivante dite mesure de masse supportée par les zéros de Q_n

$$\nu_n(Q_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_{n,k}}$$

$\delta_{z_{n,k}}$ est la mesure de **Dirac** concentrée sur le point $z_{n,k}$.

Définition 2.2. Soit $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de mesures à support compact. On dit que $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ converge faiblement vers la mesure μ quand $n \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

pour toute fonction f continue sur $\mathbb{C}$ à support compact. Dans ce cas on écrit $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ ou $d\mu_n \xrightarrow{*} d\mu$ ou $d\mu_n(x) \xrightarrow{*} \mu'(x)dx$ si μ est absolument continue.

Notons par $\|\cdot\|_\Delta$ la norm sup sur l'ensemble Δ et $\text{Cap}(\Delta)$ la capacité logarithmique de Δ (voir : [22, 49, 49, 46, 37, 38, 50, 61]), sur la notion de capacité logarithmique). Ceci étant on a le résultat suivant

Lemme 2.1 (voir:[22,49,46,37,38,59]). Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact tel que

$$\text{int}(\Delta) = \emptyset, \quad \mathbb{C} \setminus (\Delta) \text{ est connexe et } \text{cap}(\Delta) > 0$$

Soit $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ une suite de polynômes moniques (i.e. $Q_n(z) = z^n + \dots$) tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Q_n\|_\Delta^{\frac{1}{n}} \leq \text{Cap}(\Delta) .$$

Alors

$$\nu_n(Q_n) \xrightarrow{*} \omega_\Delta$$

ω_Δ est la mesure équilibrée de Δ (voir:[22,49,46]), pour plus de détails sur la mesure équilibrée).

Théorème 2.2 (voir:[22,49,46])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{nQ_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{d\nu_n(x)}{z-x} = \int \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} d\nu_n(x)}{z-x} = \int \frac{d\omega_\Delta(x)}{z-x}. \quad (2.5)$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(x) = \omega$ (au sens de la convergence faible), ν_n est la mesure de masse supportée par les zéros de Q_n .

Lemme 2.2 (voir:[22,49,46]). Soit $\{Q_n(z)\}_{n=0}^\infty$ une suite de polynômes. Alors pour $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|Q_n^{(j)}\|_\Delta}{\|Q_n\|_\Delta} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

Théorème 2.3 (voir:[40,47]). Soit μ une mesure de Borel finie définie sur le cercle unité (sur $[0, 2\pi]$). Notons par $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le système de polynômes orthonormés associés à la mesure μ . $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient donc les relations suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta}) \overline{\varphi_m}(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = \delta_{mn}$$

On suppose aussi que μ vérifie la condition de **Nevai** (2.2) ou la condition de Szego (2.1). Alors on a pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^m \varphi_n^{(m)}(z)}{n^m \varphi_n(z)} = 1 \quad , \quad (z = e^{i\theta}). \quad (2.6)$$

2.2 Comportement asymptotique des polynômes dérivées

Considérons le système de polynômes orthogonaux moniques $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$, c-à-d tels que $(L_n(z) = z^n + \dots)$ orthogonaux associés à la mesure μ , $\mu(d\mu(\theta) = \rho(\theta)d\theta$, voir (1.1)). On s'intéresse à la limite du rapport $\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}$. **Rahmanov** (voir:[5]) a démontré que si $\mu' > 0$ presque partout sur $[0, 2\pi]$, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = z \quad (2.7)$$

Lubinsky (voir:[40]) démontrera le résultat suivant:

Théorème 2.4 (voir:[40]) Considérons le système de polynômes orthogonaux moniques $\{L_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($L_n(z) = z^n + \dots$) orthogonaux associés à la mesure μ . Supposons qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{z L_n(z)} = 1 \quad (2.8)$$

pour z tel que $|z| = 1$. Alors pour $m \geq 1$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}^{(m)}(z)}{z L_n^{(m)}(z)} = 1 \quad (2.9)$$

uniformément dans $\{z : |z| \geq 1\}$.

Les lemmes suivants nous seront utiles pour la suite:

Lemme 2.4 .(voir:[40]),(théorème de Lucas,(voir:[19,28]),(théorème de Badkov,(voir:[12]))

Soit P_n un polyôme de degré n . On suppose que tous les zéros de P_n sont situés dans le disque unité. Alors tous les zéros des polynômes dérivés $P_n^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \dots, k$, sont situés dans le disque unité. D'autre part Si $|z| = 1$, alors

$$|P'_n(z)| \geq \frac{n}{2} |P_n(z)|$$

Lemme 2.5 .(voir:[18])(théorème de Abdul Aziz)

Soit $P_n = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ un polynôme de degré n . Posons $M = \max_{0 \leq j \leq n-1} |a_j|$. Alors tous les zéros de P_n sont contenus dans le cercle $|z| \leq 1 + M$.

Lemme 2.6 .(voir:[18])(théorème de Abdul Aziz)

Soit $P_n = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ un polynôme de degré n . Posons $M = \max_{0 \leq j \leq n-1} |a_j|$, alors tous les zéros de P_n sont contenus dans la région

$$\frac{|a_0|}{2(1+M)^{n-1}(1+nM)} \leq |z| \leq 1 + \lambda_0 M$$

où λ_0 est la solution unique de l'équation:

$$x = 1 - \frac{1}{(1 + Mx)^n}$$

dans l'intervalle $[0 \quad 1]$.

Lemme 2.7.(voir:[54])(théorème de Q.I.Rahman)

Soit $P_n(z)$ un polynôme de degré n tel que tous les zéros de $P_n(z)$ sont contenus dans le disque unité $|z| \leq 1$. Si $|a| > \frac{n+2}{n}$, alors le polynôme :

$$((z - a) P_n(z))' \tag{2.10}$$

possède une seule racine dans le disque

$$|z - a| \leq \frac{|a| + 1}{n + 1} \tag{2.11}$$

toutes les autre $n - 1$ racines sont contenues dans le disque unité $|z| \leq 1$.

Ce chapitre contient Les principaux résultats originaux de la thèse. On définira et on étudiera les propriétés algébriques et le comportement asymptotique des polynomes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité.

2.3 Localisation des zeros des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Proposition 2.1. *Les polynômes polaires P_n en les comparant avec leur polynômes orthogonaux associés $L_{n,\mu}$ vérifient*

$$P_n^{(k)}(\alpha) = \frac{n+1}{k+1} L_n^{(k)}(\alpha) \quad , k = 0, 1, 2 \dots n. \quad (2.12)$$

Preuve Considérons (1.3). Remarquons que

$$((z - \alpha) P_n(z))^{(k)} = (z - \alpha) P_n^{(k)}(z) + k P_n^{(k-1)}(z) = (n+1) L_n^{(k-1)}(z)$$

Posons $z = \alpha$, dans la formule précédente on obtient l'assertion (2.12). ■

Le lemme suivant compare les coefficients du développement de **Taylor** de L_n et son polynôme polaire P_n .

Lemme 3.8 Si

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} (z - \alpha)^k \quad \text{et} \quad P_{n,\xi}(z) = \sum_{k=0}^n B_{n,k} z^k$$

alors

$$B_{n,k} = \frac{n+1}{k+1} A_{n,k}, \quad k = 0, 1, 2 \dots n \quad (2.13)$$

Preuve (2.13) est une conséquence de (2.12). ■

Lemme 3.9 (voir:[22,49,60]) Posons

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} C_k^n z^k, \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{k=0}^n \beta_{nk} C_k^n z^k, \quad \alpha_{nk}, \beta_{nk} \in \mathbb{C}, \quad (2.14)$$

Notons

$$h(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \beta_{nk} C_k^n z^k. \quad (2.15)$$

Supposons que tous les zéros de $f(z)$ appartiennent au disque fermé $\overline{\Delta}$. Notons par $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,n}$ les zéros de $g(z)$. Alors tout zéro de $h(z)$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_{n,k} \gamma_{n,k}$, où $\gamma_{n,k} \in \overline{\Delta}$.

Dans [?] , **Piçeira** a montré à l'aide de ce thèrème que tous les zéros des polynômes polaires dans le cas d'une mesure concentrée sur le segment (qui seront supposés moniques), appartiennent au disque fermé borné $\Delta = \{z, z \in C : |z| \leq b + c|\alpha|\}$, où b, c sont deux constantes convenablement choisies.

On va maintenant énoncer un lemme dont la démonstration est un peu compliquée mais son application est la base de la formule asymptotique à l'extérieur d'un contour. Ce résultat a été obtenu par **G.Szegô** en 1921.

Lemme 3.10 (voir:[50,55,56,61]) *Soit Ω un domaine simplement connexe, $\Gamma = \partial\Omega$ est un contour de Jordan rectifiable. Soit φ la transformation conforme de Ω vers l'extérieur du cercle unité, vérifiant les conditions suivantes:*

$$\varphi(\infty) = \infty \quad \text{et} \quad \varphi'(\infty) = \tau. \quad (2.16)$$

Soient $z_k^{(n)} \in \text{ext}(\Gamma)$, $k = 1, 2, \dots, n$ et $P_n(z)$ le polynôme d'interpolation vérifiant:

$$P_n(z_k^{(n)}) = f(z_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (z \in \Omega). \quad (2.17)$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{k=1}^n (z - z_k^{(n)})}{(\tau \cdot \varphi(z))^n} = 1. \quad (2.18)$$

Uniformément sur les compacts de Ω .

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = f(z). \quad (2.19)$$

Uniformément sur les compacts de Ω .

Lemme 3.11.(voir:[59])

Soit $(L_{n,\mu})_n$ la suite des polynômes orthogonaux sur le cercle unité associés à la mesure μ . Alors les zéros de $L_{n,\mu}(z)$ sont dans le disque fermé unitaire $\overline{\Delta} = \{|z| \leq 1\}$.

Lemme 3.12.(voir:[59]). *Soit $(L_n(z, \beta))_n$ la suite des polynômes paraorthogonaux sur le cercle unité associés à la mesure μ , i-e*

$$L_{n+1}(z, \beta) = zL_n(z) + \beta L_n^*(z), \quad , \quad |\beta| = 1. \quad (2.20)$$

Alors tous les zéros de $L_n(z, \beta)$ sont sur le cercle unité: $\partial\overline{\Delta} = \{|z| = 1\}$.

Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité et leur polynômes polaires constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Ce paragraphe contient les premiers résultats originaux de cet manuscrit.

3 Comportement asymptotique des polynômes polaires primitives de POCU et leurs polynômes dérivés.

3.1 Comportement asymptotique des polynômes polaires primitives des POCU

Théorème.3.1 (voir:[26,27,28]) Soit $\{L_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ le système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure μ . On suppose que la mesure μ vérifie la condition de **Nevai** suivante :

$$\mu' > 0 \text{ presque partout sur le cercle unité.}$$

Notons par $\{P_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ la suite des polynômes polaires unitaires de premier ordre associés à μ . dont le coefficient de z^n est égal à +1. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(z)}{P_n(z)} = \frac{z - \alpha}{z} \quad (3.1)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{z P_n(z)} = 1 \quad (3.2)$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z| \geq 1\}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)} = \frac{1}{z} \quad (3.3)$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z| \geq 1\}$.

Preuve: Rappelons que par définition les polynômes polaires $P_n(z)$ sont solutions de l'équation différentielle suivante:

$$(n+1) L_n(z) = ((z - \alpha) P_n(z))' = P_n(z) + (z - \alpha) P'_n(z).$$

Divisons les deux membres de (3.3) par $n P_n(z)$, on obtient

$$\frac{n+1}{n} \frac{L_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{n} + (z - \alpha) \frac{P'_n(z)}{n P_n(z)} \quad (3.4)$$

Remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{n P_n(z)}$$

existe (pour plus de détails,(voir:[22,49]) . Notons cette limite par $M(z)$. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(z)}{P_n(z)} = (z - \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{n P_n(z)}$$

implique

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{L_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)}}{\frac{L_n(z)}{P_n(z)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{P_{n+1}(z)} \frac{P_n(z)}{L_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} \frac{P_n(z)}{P_{n+1}(z)} \quad (3.5)$$

L'hypothèse $\mu' > 0$ p.p. sur le cercle implique (pour plus de détails, (voir: [22, 49, 51, 40, 47]))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = z, \quad (3.6)$$

uniformément sur les compacts de $|z| > 1$. Les deux assertions (3.14) et (3.15) impliquent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{P_{n+1}(z)} = \frac{1}{z}$$

On aura donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} = z,$$

uniformément sur les compacts de $|z| > 1$. Ecrivons,

$$\frac{(n+1) L_n(z)}{(z-\xi) P_n(z)} = \frac{1}{z-\xi} + \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{z-\xi} + \frac{d}{dz} (\log P_n(z))$$

La dérivée logarithmique et son interprétation dépend de l'ensemble des zéros du polynôme P_n . Remarquons que

$$\frac{((z-\xi) P_n(z))'}{(z-\xi) P_n(z)} = \frac{d}{dz} [\log(z-\alpha) P_n(z)] \quad (3.7)$$

et

$$((z-\alpha) P_n(z))' = P_n(z) + (z-\alpha) P'_n(z)$$

Donc (3.16) et (1.29) impliquent

$$\frac{d}{dz} [\log(z-\alpha) P_n(z)] = (n+1) \frac{L_n(z)}{(z-\alpha) P_n(z)}$$

L'intégration des deux membres de cette égalité de z_1 à z donne:

$$\frac{(z-\alpha) P_n(z)}{(z_1-\alpha) P_n(z_1)} = \exp \left((n+1) \int_{z_1}^z \frac{L_n(t)}{(t-\alpha) P_n(t)} dt \right).$$

ce qui donne

$$P_n(z) = \frac{z_1 - \alpha}{z - \alpha} P_n(z_1) \exp \left((n+1) \int_{z_1}^z \frac{L_n(t)}{(t-\alpha) P_n(t)} dt \right)$$

Par conséquent

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} = \quad (3.8)$$

$$\frac{P_{n+1}(z_1)}{P_n(z_1)} \exp \left[(n+2) \int_{z_1}^z \frac{L_{n+1}(t)}{(t-\alpha) P_{n+1}(t)} dt - (n+1) \int_{z_1}^z \frac{L_n(t)}{(t-\alpha) P_n(t)} dt \right]$$

ou encore

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \left(\frac{P_{n+1}(z_1)}{P_n(z_1)} \right)^{-1} = \exp \left[(n+2) \int_{z_1}^z \frac{L_{n+1}(t)}{(t-\alpha) P_{n+1}(t)} dt - (n+1) \int_{z_1}^z \frac{L_n(t)}{(t-\alpha) P_n(t)} dt \right]$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{z_1}^z \frac{L_n(t)}{(t-\alpha) P_n(t)} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{z_1}^z \frac{L_{n+1}(t)}{(t-\alpha) P_{n+1}(t)} dt.$$

(3.18) et (3.19) impliquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \left(\frac{P_{n+1}(z_1)}{P_n(z_1)} \right)^{-1} = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (n+2 - n-1) \int_{z_1}^z \frac{L_n(t)}{(t-\alpha) P_n(t)} dt \right)$$

Notons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(t)}{nP_n(t)} dt = M(t)$$

et

$$\Lambda(z) = \int_{z_1}^z M(t) dt$$

Ceci donnent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \left(\frac{P_{n+1}(z_1)}{P_n(z_1)} \right)^{-1} = e^{\Lambda(z)}$$

avec

$$e^{\Lambda(z)} = \frac{z}{z_1}$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{z P_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}(z)}{z L_n(z)}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Théorème 3.2. (voir: [26, 27, 28]) *Sous les mêmes hypothèses et notations du théorème 3.1, Notons par $\{Q_n(z)\}_{n=0,1,2,\dots}$ la suite des polynômes polaires unitaires de seconde ordre associés à μ . dont le coefficient de z^n est égal à +1. Alorson a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)} = \frac{1}{z} \quad (3.9)$$

uniformément sur les compacts de $\{|z| > 1\}$. et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{z Q_n(z)} = 1 \quad (3.10)$$

encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{z}{z - \alpha} \quad (3.11)$$

uniformément sur les compacts de $\{z : |z| > 1\}$.

Preuve : Rappelons que par définition les polynômes polaires $Q_n(z)$ sont solutions de l'équation différentielle suivante:

$$\left(\log((z - \alpha)^2 Q_n(z))' \right)' \left(\log((z - \alpha)^2 Q_n(z)) \right)' = \frac{(n+1)(n+2)}{(z - \alpha)^2} \frac{L_n(z)}{Q_n(z)}.$$

D'après (3.3) et (3.4), on remarquant que la dérivée logarithmique et son interprétation dépend de l'ensemble des zéros du polynôme Q_n , on a

$$\frac{d}{dz} \log(z - \alpha)^2 Q_n(z) = (n+2) \frac{P_n(z)}{(z - \alpha) Q_n(z)} \quad (3.12)$$

L'intégration des deux membres de cette égalité de z_1 à z donne:

$$(z - \alpha)^2 Q_n(z) = (z_1 - \alpha)^2 Q_n(z_1) \exp \left((n+2) \int_{z_1}^z \frac{P_n(t)}{(t - \alpha) Q_n(t)} dt \right)$$

Par conséquent

$$Q_n(z) = \frac{(z_1 - \alpha)^2}{(z - \alpha)^2} Q_n(z_1) \exp \left((n+2) \int_{z_1}^z \frac{P_n(t)}{(t - \alpha) Q_n(t)} dt \right)$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} \left(\frac{Q_{n+1}(z_1)}{Q_n(z_1)} \right)^{-1} = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{z_1}^z \frac{P_n(t)}{(t - \alpha) Q_n(t)} dt \right)$$

Il vient donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} \left(\frac{Q_{n+1}(z_1)}{Q_n(z_1)} \right)^{-1} = \exp \int_{z_1}^z F(t) dt$$

où

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{(z - \alpha) Q_n(z)}$$

D'après (1.3) et (1.4)

$$(z - \alpha)^2 Q'_n(z) + 2(z - \alpha) Q_n(z) = (n + 2)(z - \alpha) P_n(z)$$

par conséquent,

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{(z - \alpha) Q_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)}$$

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(z)}{z P_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{z Q_n(z)}$$

Ce qui achève la démonstration..

L'hypothèse $\mu' > 0$ p.p. sur le cercle implique (pour plus de détails, (voir:[22,49,51,40,47]))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} = z$$

uniformément sur les compacts de $|z| > 1$, et

$$\exp \int_{z_1}^z F(t) dt = \frac{z_1}{z}$$

Dérivons le deux membre de cette égalité, on obtient

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)} = \frac{1}{z}$$

uniformément sur les compacts de $|z| > 1$,

3.2 Comportement asymptotique des polynômes réciproques des polynômes polaires primitives des POCU

Que se passe t'il pour les polynômes réciproques. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 3.3. (voir:[26,27,28]) *Sous les mêmes hypothèses et notations du théorème 3.1, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*(z)}{P_n^*(z)} = (1 - \bar{\alpha}z) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{*'}(z)}{n P_n^*(z)} \quad (3.13)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^*(z)}{P_n^*(z)} = 1 \quad (3.14)$$

uniformément sur les compacts de $\{|z| < 1\}$.

Preuve: Il est utile de voir que

$$(n+1) L_n^*(z) = (1 - \bar{\alpha}z) P_n'^*(z) + P_n^*(z)$$

et

$$(n+1) L_n^*(z) = (1 + n(1 - \bar{\alpha}z)) P_n^*(z) - z(1 - \bar{\alpha}z) P_n'^*(z)$$

autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*(z)}{L_{n-1}^*(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n P_n^*(z)}{(n-1) P_{n-1}^*(z)} \frac{(1 - \bar{\alpha}z) - z(1 - \bar{\alpha}z) \frac{P_n'^*(z)}{n P_n^*(z)}}{(1 - \bar{\alpha}z) - z(1 - \bar{\alpha}z) \frac{P_{n-1}'^*(z)}{(n-1) P_{n-1}^*(z)}}$$

On combine avec (3.2), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^*(z)}{P_{n-1}^*(z)} = 1$$

uniformément sur les compacts de $\{|z| < 1\}$. Ce qui achève la démonstration de l'assertion (3.13). Maintenant, observons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*(z)}{P_n^*(z)} = (1 - \bar{\alpha}z) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n'^*(z)}{n P_n^*(z)}$$

uniformément sur les compacts de $\{|z| < 1\}$. D'où l'assertion (3.14). ■

3.3 Comportement asymptotique des polynômes dérivées

des polynômes polaires primitives des POCU

Théorème 3.4 (voir: [26, 27, 28]) *Sous les mêmes hypothèses et notations du théorème 3.2., on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n'(z)}{P_n'(z)} = \frac{z - \alpha}{z} \quad (3.15)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}'(z)}{z P_n'(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}'(z)}{z Q_n'(z)} = 1 \quad (3.16)$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z| \geq 1\}$.

Preuve: Dérivons les deux membres de (1.3), on obtient

$$(n+1) L_n'(z) = (z - \alpha) P_n'(z) + P_n(z)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n'(z)}{P_n'(z)} = (z - \alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n'(z)}{n P_n(z)}$$

On obtient (3.15) en utilisant (3.3). D'où la conclusion de (3.15) et (3.16).

$$(z - \alpha) Q'_n(z) + Q_n(z) = (n + 2)(z - \alpha) P_n(z)$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_n(z)}{n P_n(z)} = \frac{1}{z}$$

aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \text{ existe}$$

implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{P_n(z)} \left(\frac{Q'_n(z)}{n Q_n(z)} - \frac{P'_n(z)}{n P_n(z)} \right) = 0$$

En effet

$$\left(\frac{Q}{P} \right)' = \frac{Q}{P} \left(\frac{Q'}{Q} - \frac{P'}{P} \right)$$

1. **A. Adamoff**, *On the asymptotic expansion of the polynomials*

$U_n(x) = e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \frac{d^n \left[e^{\frac{-\alpha - x^2}{2}} \right]}{dx^n}$ for large values of n , Annals of the polytechnic institute of St Petersburg, Vol. 5 (1906), 127-143.

2. **M. Bello Hernandez, F. Marcellan and J. Minguez Cenicerros**, *Pseudo uniform convexity in H^p and some extremal problems on Sobolev spaces*, Complex variables, 2003, Vol. 48, No. 5, 429-440.

3. **M. Bello Hernandez, J. Minguez Cenicerros**, *Strong asymptotic behavior for extremal polynomials with respect to varying measures on the unit circle*, J. Approx. Theory **125(1)** (2003), 131-144.

4. **R. Benzine**, *Comportement asymptotique d'une classe de polynômes orthogonaux et approximants de Padé*, Thèse de doctorat d'état, Université de Annaba, (septembre 1995).

5. **R. Benzine**, *Asymptotic Behavior Of Orthogonal Polynomials Corresponding to a Measure With Infinite Discrete Part off a Curve*, J. Approx. Theory 89 (1997), 257-265.

6. **R Benzine and Y. Laskri**, *On The Asymptotic Behaviour Of Orthogonal Polynomials Or L_p Extremal Polynomials*, 2nd International Conference on Mathematics, Almeria, Spain, June 2005.

7. **S.N. Bernstein**, *Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini I, II*, J. Math. Pures Appl. **9** (1930), 127-177; **10** (1931), 219-286.
8. **H. Cartan**, *Théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris 1967.
9. **P. L. Chebyshev**, *Complete collected works*, vol 3. Izdat. Nauk SSSR, Moscow 1948. [Russian] MR 11, 150.
10. **J. B. Conway**, *Functions of one complex variable*. Springer Verlag. New-York, 1973.
11. **G. Darboux**, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, Journal de Mathématiques, (3), vol. 4 (1878), 5-56, 377-416.
12. **P.L. Duren**, " *Theory of H^p spaces*," Academic Press. New york. 1970.
13. **L. Fejer**, *Asymptotikus értékék meghatarozarasol*, *Mathematikai és Termesztudományi*, Ertesito, vol. 27 (1909), 1-33.
14. **M. Fekete and J. L. Walsh**, *On the asymptotic behaviour of polynomials with extremal properties, and their zeros*, J. Anal. Math. (1954/5), 49-87.
15. **J.S. Geronimo and K.M. Case**, *Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 467-494. MR **82:c**:81138.
16. **Ya. L. Geronimus**, *On some extremal problems in the space L^p_σ* , *Mat. Sb. (N.S.)* **31**(73) (1952), 3-26 (Russian).
17. **Ya. L. Geronimus**, *Polynomials orthogonal on the circle and on an interval*. Fizmatgiz, Moscow, 1958. English transl. Consultants Bureau, New York, 1961.
18. **A. A. Gonchar**, *On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions*. Mat.Sbornik.Tom 97 (139) (1975), N°4.
19. **G. H. Hardy**, *On the mean modulus of an analytic function*, Proc. London Mat. Soc. vol 14 (1915), 269-277.
20. **E. Heine**, *Handbuch der Kugel functionen*. Vols. I, II.2d edition. Berlin, 1878, 1881.

21. **K. Hoffman**, *Banach spaces of analytic functions*, Englewood Cliffs, N. J-Prentice-hall, Inc. 1962.V.
22. **V. Kalyagin and R. Benzine**, *Sur la formule asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur un contour plus une partie discrète finie*, [*An asymptotic formula for orthogonal polynomials associated with a measure concentrated on a contour plus a finite discrete part*], Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B 41, (1989), no1, 29-46 (French).
23. **V. Kalyagin**, *On Asymptotics of L^p extremal polynomials on a complex curve ($0 < p < \infty$)*, J. Approx. Theory, 74, (1993), 226-236.
24. **V. Kalyagin**, *A Note on the Asymptotics of Orthogonal Polynomials on a complex Arc: The case of a measure with a discrete Part*, J. Approx. Theory 80 (1995), 138-145.
25. **M. V. Keldysh**, *Select papers*, Academic Press, 1985. [in Russian].
26. **Yamina Laskri & Abdelhamid Rehouma**, *Polar Bergman polynomials over domains with corners*, IJOPCM, Vol. 4, no. 4, December 2011, pp 74-87.
27. **Abdelhamid Rehouma & Tedjani Hadj Ammar and Abdelaziz Azeb Ahmed**, *Asymptotic of second order polar polynomials*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 16, Number 5 (2020), pp. 675-685
28. **Abdelhamid Rehouma & Yamina Laskri & Rachid Benzine**, *Asymptotic properties of polar polynomials*, Applied Mathematical Sciences, Vol.8 ,no.14,2014, pp.685-691..
29. **A. Kolmogorov et S. Fomine**, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Editions Mir, Moscou, 1977.**P. Koosis**, *Introduction to H_p Spaces*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, Vol. 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
30. **P. Koosis**, *Introduction to H_p Spaces*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, Vol. 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
31. **P.P. Korovkine**, *On orthogonal polynomials on a closed curve. Math. Sbornik 9 (1941). 469-484.* [in Russian].

32. **M. G. Krein**, *On a generalization of some investigations of G. Szegő, V. Smirnoff and A. Kolmogorov*. C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS 46 (1945), 91-94. MR7, 156.
33. **Y. Laskri and R. Benzine**, *Asymptotic behavior for L_p ($1 \leq p \leq \infty$) extremal polynomials off a complex curve*, 5th International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Maratea, June 16-23, 2004.
34. **Y. Laskri and R. Benzine**, *Sur le comportement asymptotique des polynômes L_p extrémaux sur le contour*, Tunis, 01- 06 Pan African Congress of Mathematicians, September 2004
35. **Y. Laskri and R. Benzine**, *On Asymptotics of L_p Extremal Polynomials on a Complex Curve Plus an Infinite Number of Points*, Journal of Mathematics and Statistics 1(3): 212-216, Sciences Publications USA, 2005.
36. **Y. Laskri and R. Benzine**, *Asymptotic behavior of L_p extremal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points of the unit circle*. Int. J. Appl. Math, Academic Publications, Bulgaria , 2005 (to appear).
37. **X. Li and K. Pan**, *Asymptotics for L^p Extremal Polynomials on the unit circle*, J. Approx. Theory **67** (1991), 270-283.
38. **X. Li and K. Pan**, *Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part off the unit circle*. J. Approx. Theory 79, (1994), 54-71.
39. **D.S. Lubinsky**, *Strong Asymptotics for Extremal Error and polynomials associated with Erdős-type weights*, Pitman Research Notes in Mathematics series, Vol.202, Longman, London, 1989.
40. **D.S. Lubinsky and E.B. Saff**, *Strong Asymptotics for L_p Extremal Polynomials ($p > 1$) Associated with weight on $[-1,+1]$* , Lecture Notes in Math. **1287** (1987), 83-104.
41. **D.S. Lubinsky and E.B. Saff**, *Szegő asymptotics for non Szegő weights on $[-1,+1]$* , ICM 89-007.
42. **D.S. Lubinsky and E.B. Saff**, *Strong asymptotics for extremal polynomials associated with weights on $(-\infty, +\infty)$* , Lecture notes in Mathematics, Vol. 1305, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

43. **D.S. Lubinsky and E.B. Saff**, *Sufficient Conditions for asymptotics associated with weighted extremal problems on $\mathbf{R}$* , Rocky Mountain J. Math. **19** (1989), 261-269.
44. **A. AJ. Macintre and W. W. Rogosinski**, *Extremum problems in the theory of analytic functions*. Acta Math. vol 82 (1950), 275-325.
45. **F. G. Mehler**, *Ueber die vertheilung der statischen elektricitat in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Korper*. Ibid, vol. 68 (1868), 134-150.
46. **H. N. Mhaskar and E. B. Saff**, *On The distribution of zeros of polynomials orthogonal on the unit circle*, J. Approx. Theory **63** (1990), 30-38.
47. **H. N. Mhaskar and E. B. Saff**, *The distribution of zeros of asymptotically extremal polynomials*, J. Approx. Theory 65 (1991), 279-300.
48. **P. Nevai**, *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Soc. 213 (1979).
49. **P. Nevai and Géza Freud**, *Orthogonal polynomials and Christoffel functions. A case study*, J. Approx. Theory 48 (1986), 3-17.
50. **P. Nevai and V. Totik**, *Orthogonals polynomials and their zeros*, Acta sci math. (Szeged) **53** (1989), 99-104.
51. **E.M. Nikishin**, *The discrete Sturm-liouville operator and some problems of function theory*, Trudy Sem. Petrovsk. **10** (1984), 3-77 (Russian), English Transl. in Soviet Math., 35 (1987), 2679-2744. MR **92i**:30037.
52. **F. Peherstorfer and P Yuditskii**, *Asymptotics of orthonormal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points*, *Proceedings of the american mathematical society*, Vol.129, 11, (2001), 3213-3220.
53. **O. Perron**, *Uber das Verhalten einer ausgarteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem wachstum eines paramemeters*. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, vol. 151 (1921), 63-78.
54. **O. Perron**, *Die lehre von den Kettenbruchen*, Band II, 3rd ed, Teubner, Stuttgart, 1957. MR 19, 25.

55. **F. Riesz**, *Über die randwerte einer analytischen funktion*, Math. Zeit. vol. 18 (1923), 87-95.
56. **W. Rudin**, *Analytic functions of class H_p* , Transaction of the American Mathematical Society, t. 78, 46 (1955).
57. **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
58. **V.J. Smirnov**, *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe*, Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad, Vol.2 (1928), 155-179.
59. **V. I. Smirnov**, *Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent*, Bulletin de l'académie des sciences de l'U.R.S.S., 1932, 337-372.
60. **Smirnov and N. A. Lebedev**, "The Constructive Theory of Functions of a Complex Variable," Nauka, Moscow, 1964 [in Russian]; M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1968 [Engl. transl.].
61. **P. Souetine**, *Polynômes orthogonaux sur le contour*, (en russe). Russian Math Surveys, t.21, (1966).
62. **T. J. Stieljes**, *Sur les polynômes de Legendre*, Annales de la faculté des sciences de toulouse, vol 4 (1890), 17, Oeuvres complètes. vol2, 236-252.
63. **T. J. Stieljes**, *Recherches sur les fractions continues*, Annales de la faculté des sciences de toulouse, 9 (1895), A-1-47.
64. **G. Szegő**, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 23, 4th ed., American Math. Society, Providence, RI, 1975.
65. **G. Szegő**, *Über die entwicklung einer analytischen funktion nach den polynomen eines ortogonal systems*, Mathematische annalen, vol. 82, 1921, 188-212.
66. **G. Szegő**, *Über orthogonale polynome, die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen ebene gehören*, Mathematische Zeitschrift, vol 9 (1921), 218-270.
67. **G. Szegő**, *Über die entwicklung einer willkürlichen funktion nach den plynomen eines orthogonal systems*. Mathematische Zeitschrift, vol 12 (1921), 61-94

68. **J. P. Tiran and C. Demaille**, *Chebyshev polynomials on circular arc in the complex plane*, preprint, Namur university, Belgium, 1990.
69. **W. Van Assche**, *Asymptotics for orthogonal polynomials*. Lecture notes in mathematics 1265. Springer Verlag, 1987.
70. **W. Van Assche and J. S. Geronimo**, *Asymptotics for orthogonal polynomials on and off the essential spectrum*, J. Approx. Theory 55 (1988), 220-231.
71. **S. S. Walters**, The space H_p , with $0 < p < 1$, Proc. Amer. Mat. Soc. 1 (1950), 800-805.
72. **H. Widom**, *Extremal polynomials associated with a system of curves and arcs in the complex plane*, Adv. Math. **3** (1969), 127-232.
73. **P. Wynn**, *A general system of orthogonal polynomials*, Quart. J. Math. Oxford (2) 18 (1967), 81-96.
74. **A. Zygmund**, *Trigonometric series*, 2nd ed. New work. Cambridge University Press 1959.