

République Algérienne Démocratique et Populaire



**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique**



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El Oued

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

Thème

**EFFET DE LA NATURE DE FLUIDE SUR LES
CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE
THERMIQUE LAMINAIRE SUR UNE PAROI SOLIDE**

Devant le jury composé de :

Présenté par :

Dr. GHARBI M^{ed} Tahar Président

- LAMOURI Tidjani

Dr. BOUKHARI Ali Examineur

- SOUALAH Hayat

Mme. BERKANE Houda Encadreur

Année Universitaire 2017/2018

REMERCIEMENTS

Nous remercions tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce modeste mémoire.

Nous remercions également tous les professeurs de département de Génie mécanique pour leur effort et patience, en particulier notre enseignante **Mme. Houda Berkane**.

Aussi, nous aimerions remercier nos camarades et les invités.

TABLE DES MATIERES

Remerciements	i
Table des matières	ii
Liste des figures	iv
Liste des tableaux	v
Nomenclature	vi
Introduction.	01

Chapitre I**GÉNÉRALITÉS SUR LES MODES DE TRANSFERT ET COUCHES LIMITES****Introduction de chapitre****Recherche bibliographie**

I. Modes de transfert de la chaleur.....	02
I.1 La conduction thermique	02
I.2 La convection thermique	03
I.3 Le rayonnement thermique	03
I.4 Propriétés physique des fluides.....	04
I. 4.1 Définition	04
I. 4.2 Compressibilité.....	04
I. 4.3 Masse volumique	04
I. 4.4 Conductivité thermique	04
I. 4.5 Viscosité	04
I. 5 Définition des nombres adimensionnels ...	05
I. 5.1 Nombre de Reynolds.....	05
I. 5.2 Nombre de Nusselt	05
I. 5.3 Nombre de Prandtl.....	05
I. 6 Couche limite laminaire	06
I. 6.1 Concept de couche limite.....	06
I. 6.2 Couche limite thermique.....	06
I. 6.3 Couche limite dynamique.....	07
I.7 Paramètres caractéristiques de couche limite.....	08
I. 7.1 Epaisseurs.	08
I.7.1.1 Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique.....	08
I.7.1.2 Epaisseur conventionnelle de couche limite ..thermique.....	08
I.7.1.3 Epaisseur de déplacement	09
I.7.1.4 Epaisseur de quantité de mouvement	09
I.7.1.5 Epaisseur d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt.....	10
I. 7.2 Facteur de forme.....	10

Chapitre II
ETUDE DIMENSIONNELLE LA COUCHE LIMITE DYNAMIQUE ET
THERMIQUE

Introduction de chapitre

II. 1 Situation du problème.....	11
II. 2 Notion de couche limite.....	12
II. 3 couche limite dynamique.....	12
II. 4 Equations fondamentales	13
II. 5 Equation de Blasius.....	14
II. 6 Couche limite thermique.....	16
II. 6 .1 Présentation du problème.....	16
II. 6 .2 Convection forcée à grande vitesse.....	16
II. 6 .3 Equation d'énergie forme générale et adimensionnelle.....	16
II. 6 .4 Convection forcée isovolume à basse vitesse	17

Chapitre III
RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

Introduction de chapitre

III.1 La couche limite dynamique	19
III.2 Méthodes de résolution du problème	19
III.3 Calcul de la couche limite thermique en Convection forcée.....	22
III.4 Méthode de résolution.....	23
III.5 L'organigramme.....	26

Chapitre IV
RESULTATS ET COMMENTAIRES

Introduction de chapitre

IV.1 La distribution de température.....	27
IV.1 .1 Pour les fluides ayant $Pr \gg 1$	27
IV.1 .2 Pour les fluides ayant $Pr < 1$	28
IV.1 .3 Pour les fluides ayant $Pr \ll 1$	29
IV.1 .4 Distribution de température pour divers milieux fluides	29
IV .1. 5 Discussions des résultats	30
IV. 2 L'épaisseur thermique et l'épaisseur d'enthalpie	30
IV.2.1 En convection forcée à grandes vitesses	30
IV.2.2 En convection forcée à basses vitesses	32
IV.3 Discussions des résultats	33
Conclusion générale	34
Bibliographie.....	35
Résumé	36

LISTE DES FIGURES

	Page
I. 1 : Conduction à travers un fluide solide ou stationnaire.....	03
I. 2 : Convection d'une surface à un fluide en mouvement	03
I. 3 : Echange de chaleur par rayonnement net entre deux surfaces.....	04
I. 4 : les formes typiques des divers rhéogrammes des fluides homogènes	05
I. 5 : Couche limite thermique sur une plaque plane	07
I. 6 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane .	07
I. 7 : Déficit de débit et épaisseur de déplacement	08
III. 1 : Représentation de la méthode de Moitie intervalle	21
III. 2 : Solution numérique du problème ordinaire avec conditions aux limites	24
III. 3 : L'organigramme.....	26
IV. 1 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme	27
avec dissipation pour divers nombres de Prandtl $Pr \gg 1$.	
IV. 2 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme	28
avec dissipation pour divers nombres de Prandtl $Pr < 1$.	
IV. 3 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme.....	28
avec dissipation pour divers nombres de Prandtl $Pr < 1$	
IV. 4 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme	29
avec dissipation pour divers nombres de Prandtl $Pr \ll 1$.	
IV. 5 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme.....	29
avec dissipation pour divers nombres de Prandtl..	
IV. 6 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane avec un flux de	31
chaleur en convection forcée à grande vitesse pour divers nombres de Prandtl.	
IV. 7 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite.....	31
IV. 8 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite thermique...	32
le long d'une paroi avec flux de chaleur .	
IV. 9 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite.....	32
thermique le long d'une paroi isotherme.	

LISTE DES TABLEAUX

Page

I. 1 : Nombre de Prandtl de quelque fluides	06
---	----

NOMENCLATURE

Caractères usuels

a	diffusivité thermique	m^2 / s
c	célérité du son	m / s
C_p	chaleur spécifique à pression constante	$m^2 / s^2 k$
D	traînée visqueuse par unité d'envergure	kg / s^2
f	fonction de Blasius	
$\vec{f}$	vecteur des forces appliquées au fluide	kgm/s^2
H	facteur de forme	
h	enthalpie par unité de masse	m^2 / s^2
L	longueur de la plaque	m
m	La masse	kg
$\vec{n}$	vecteur unitaire normal à un élément de surface	
p	pression	kg/ms^2
r	facteur thermique	
ds	élément de surface	m^2
T	température dimensionnelle	k
k	coefficient de transfert de chaleur pariétal	$w/m^2.sk$
g	accélération de la pesanteur	m/s^2
η	coordonnée réduite	
T_f	température de frottement	k
t	le temps	s
U, V	composantes de vitesse	m/s
$\vec{v}$	vecteur unitaire tangent à un élément de surface	

Caractères grecs

δ	épaisseur de la couche limite dynamique	m
δ_1	épaisseur de déplacement	m
δ_2	épaisseur de quantité de mouvement	m
δ_3	épaisseur d'énergie cinétique	m
δ_T	épaisseur de la couche limite thermique	m

Δ	épaisseur d'enthalpie	m
λ	conductivité thermique	W/mK
μ	viscosité dynamique	kg/ms
ν	viscosité cinématique	m^2/s
η	coordonnée réduite	
θ	température adimensionnelle	
ρ	masse volumique	kg/m^3

Nombres sans dimensions

Nu	nombre de Nusselt
Pr	nombre de Prandtl
Re	nombre de Reynolds

Indices

E	relatif à l'interface
L	relatif à une valeur globale
x	relatif à une valeur locale
max	relatif à une valeur maximale
p	relatif à la paroi

INTRODUCTION

Le concept de la couche limite est introduit par "**Prandtl**" qui montre que les écoulements visqueux, pour la plupart, peuvent être découpés en deux zones :

- Une zone proche à la paroi où les forces visqueuses et d'inertie sont du même ordre de grandeur ; appelée région de couche limite,
- la région extérieure où les forces visqueuses sont négligeables devant les forces d'inertie.

Ce concept impose de regarder l'écoulement, et donc de le modéliser différemment en fonction de la région qu'on désire étudier, les ordres de grandeur des principaux termes étant différents.

Le transfert thermique entre le fluide et la paroi est d'une importance primordiale dans la couche limite ; il existe également une zone mince près de la paroi où les variations de température sont rapides ; c'est la couche limite thermique.

Dans cette étude on s'intéresse à l'influence de la nature de fluide sur les caractéristiques de la couche limite laminaire pour des fluides incompressibles sur une paroi lisse. La nature de fluide se traduit par la valeur du nombre de "Prandtl" qui permet de choisir le matériau le mieux approprié à une application faisant intervenir un transfert diffusif de chaleur dans un fluide en mouvement.

Pour arriver à cet objectif on propose les chapitres suivants :

Dans le premier chapitre on présente une étude théorique sur les modes de transfert de chaleur, et des différentes propriétés des fluides puis un rappel sur les couches limites dynamiques et thermiques et ces paramètres caractéristiques.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la couche limite laminaire tant au niveau de l'écoulement dynamique que thermique. Les idées de base sur lesquelles repose le concept de la couche limite sont exposées avec les simplifications des équations conduisant aux formes régissant les écoulements de type couche limite.

A partir du troisième chapitre nous résolvons les équations de la couche limite dynamique à l'aide de la méthode de "Blasius". Ensuite on va résoudre l'équation d'énergie en convection forcée aux grandes et basses vitesses, pour des différents nombres de "Prandtl".

Une conclusion générale est donnée pour commenter les résultats obtenus et pour proposer des perspectives à notre étude.

Chapitre I

GENERALITES SUR LES MODES DE TRANSFERT ET COUCHES LIMITES

Introduction de chapitre .

On présente une étude théorique sur les modes de transfert de chaleur, et des différentes propriétés des fluides puis un rappel sur les couches limites dynamiques et thermiques et ces paramètres caractéristiques.

Recherche bibliographie

A . Verschaere . Connaissez-vous les trois modes de transfert thermique ? Si oui, savez-vous différencier les termes ‘conduction’ et ‘convection’ ? Si ce n’est pas le cas, voici quelques explications [01].

Yann . Parler Les Différents Modes de Transfert Thermique Tous les trois C'est la conduction thermique, rayonnement (radiation) thermique et convection [07].

Jules Verne/Jacques Beauchamp . L'eau liquide est un fluide, substance déformable sans forme propre, Sa forme est conservée seulement si un corps solide les limite. Les liquides sont généralement considérés comme non compressibles, ils conservent le même volume quelque soit leur forme. Les gaz tendent à occuper tout l'espace disponible: ils n'ont pas de surface propre; ils sont compressibles [08].

jean-François devillers, Claude François, Bemard le FUR. Dans le chapitre « Couche limite laminaire » Dans le cadre des équations de Navier (cf. chap. 3), donc pour des écoulements laminaires de fluides newtoniens, le schéma de couche limite est accessible, sous certains de ses aspects, à la théorie pure. C'est le cas de la plaque plane, sans incidence, en présence d'un gradient de vitesse nul, problème auquel correspond la solution de Blasius, [09].

R. Askovic. On présente une universalisation des équations des deux couches limites, dynamique et thermique, Cette universalisation est faite en transférant les ensembles de paramètres de forme, exprimant l'influence tant du type de mouvement non uniforme du corps le long d'une trajectoire rectiligne dans un fluide initialement, en nouvelles variables. Les solutions des équations universelles de la couche limite sont ensuite représentées sous la forme de séries par rapport aux paramètres mentionnés [10].

Camille St-Louis . Présentation au sujet: "I Analyse dimensionnelle II Couche limite" [11].

I. Modes de transfert de chaleur

Pour comprendre fondamentalement le processus de transfert de l'énergie thermique produite vers un site, il faut en premier lieu décrire les différents modes de transmission de chaleur : conduction thermique, rayonnement (radiation) thermique et convection, également nommée flux thermique.

I.1 La conduction thermique

Est spécifique aux solides (bois, métaux, etc), elle est un transfert direct au sein d'un milieu matériel, qui se fait par propagation de proche en proche de la chaleur. Le mouvement d'agitation thermique (flux de chaleur) va toujours des zones chaudes vers les zones froides. Les mauvais conducteurs (gaz, laine de verre ou polystyrène) sont appelés isolants.

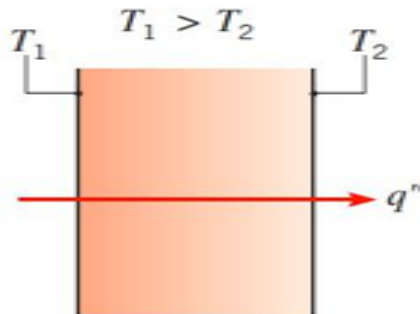


Fig. I.1 : Conduction à travers un solide [01].

I.2 La convection thermique

Est spécifique aux fluides (liquide, gaz, air), ainsi qu'aux éléments déformables (comme les roches à hautes pressions dans le manteau terrestre), elle est liée au mouvement du fluide, donc à un transport de matière. L'état fluide regroupe l'état gazeux et l'état liquide qui ont la faculté d'être déformables. Ils s'adaptent à la forme du récipient offert, et peuvent s'écouler.

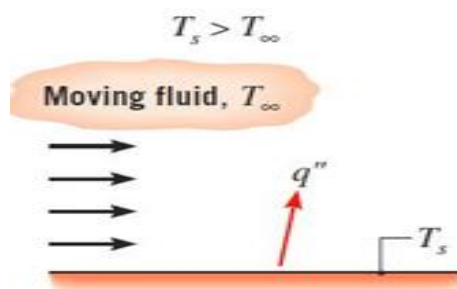


Fig. I.2: convection d'une surface à un fluide en mouvement [01].

I.3 Le rayonnement thermique

Est une émission de rayonnement électromagnétique par un corps chaud, le rayonnement a la particularité de se déplacer dans le vide (rayonnement solaire). L'énergie électromagnétique reçue par le système est absorbée et convertie en énergie thermique (chaleur). À titre d'information, la plupart des êtres vivants émettent essentiellement des longueurs d'onde situées dans l'infrarouge (pour des températures usuelles). Les longueurs d'onde de l'infrarouge sont comprises entre la fin du domaine visible).

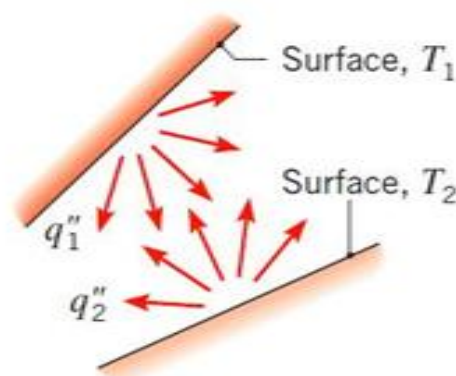


Fig. I.3 : échange de chaleur par rayonnement net entre deux surfaces [01].

I.4. Propriétés physique des fluides

I.4.1 Définition

Un fluide est un objet simple constitué d'un groupe d'atomes ou de molécules similaires dans une phase liquide ou gazeuse, de sorte que le fluide est un milieu continu qui peut être déformé.

I.4.2 Compressibilité

La compression du corps est le changement de la taille du corps en réponse aux changements de pression. L'unité de pression constante de la température est définie par la variation relative du volume et du changement de pression, les gaz sont très compressibles et les liquides sont peu compressibles.

I.4.3 Masse volumique

La masse volumique d'un corps est le rapport entre la masse et le volume occupé. Elle est fonction de la température et de la pression. Notée $\rho(T, P)$, elle s'exprime en kg/m^3 .

I .4 .4 Conductivité thermique

La conductivité thermique λ intervient dans l'analyse des transferts énergétiques dans les systèmes fluides. Ce coefficient joue, pour les transferts de chaleur, un rôle proche de celui de la viscosité pour les transferts de quantité de mouvement.

I .4 .5 Viscosité

La viscosité se définit comme la résistance opposée par le fluide à sa mise en mouvement. Nous mettons en évidence plusieurs types de comportement : fluide parfait, fluide newtonien, fluide épaississant, fluide plastique.

En un point $M(x,y)$, la viscosité dynamique se définit comme le rapport du cisaillement dans le plan (x,y) au gradient de la vitesse .

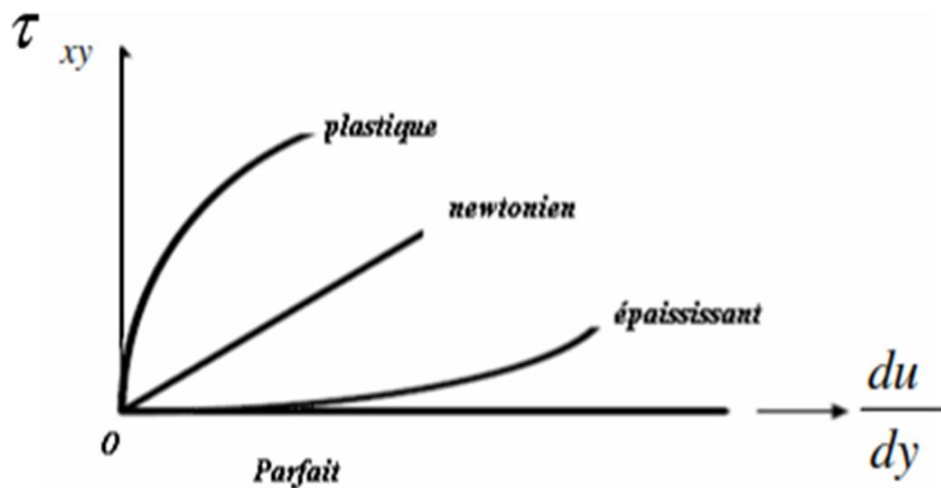


Fig I.4 : Les formes typiques des divers rhéogrammes des fluides homogènes [2].

I .5 Définition des nombres adimensionnels

I .5.1 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds (Re) est un nombre sans dimension liant la viscosité, la masse volumique, et une longueur de référence .

$$Re = \frac{\rho U_0 l}{\mu} \quad (I.1)$$

I .5.2 Nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt est défini comme :

$$Nu = \frac{hl}{\lambda} \quad (I.2)$$

(L) est la longueur selon laquelle se fait l'écoulement et (h) est la conductivité du fluide $[W/(m \cdot K)]$. Le nombre de Nusselt est, contrairement au nombre de Biot, un rapport de deux longueurs. Même si on retrouve la même écriture que pour le nombre de Biot, la signification physique est tout à fait différente.

I.5.3 Nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl (Pr) est un nombre sans dimension. Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν et la diffusivité thermique.

$$\text{L'équation :} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} \quad (\text{I.3})$$

Table I. 1 : Nombre de Prandtl de quelque fluides [3].

L'eau		Vapeur d'eau		L'air		Propane		Mercure	
T°C	Pr	T°C	Pr	T°C	Pr	T°C	Pr	T°C	Pr
0	13.6	100	1.03	2	0.713	0	0.757	0	0.029
5	11.2	125	0.996	27	0.707	5	0.755	20	0.025
10	9.6	150	0.978	52	0.701	10	0.753	50	0.021
20	6.99	175	0.965	77	0.697	20	0.751	100	0.016

I.6 couche limite laminaire

La couche limite est une zone particulière d'écoulements cisailés libre ou à paroi où se concentrent les gradients de vitesse, température (et concentration). On parle alors de couche limite dynamique, thermique. La couche limite est la zone d'interface entre un corps et le fluide environnant lors d'un mouvement relatif entre les deux, conséquence de sa viscosité. Elle est un élément important en mécanique des fluides, (aérodynamique, hydrodynamique), en météorologie, en océanographie, etc.

I.6.1 Concept de couche limite

Considérons l'écoulement d'un fluide avec une vitesse à l'infini amont U_∞ , et une température T_∞ sur une plaque plane à une température T_p . Au voisinage de la paroi, les valeurs de la vitesse et de la température sont différentes de celles de l'écoulement à potentiel et varient en fonction de la distance à la paroi y . Cette zone de gradients de vitesse et de température est appelée

couche limite. Elle résulte d'un échange de quantité de mouvement et de chaleur entre le fluide et la paroi. Son épaisseur est généralement petite par rapport à l'ensemble de l'écoulement. On distingue deux types de couche limite : la couche limite dynamique et la couche limite thermique.

I .6.2 Couche limite thermique

Lorsqu'un fluide, de température T_∞ , s'écoule sur une paroi à température T_p , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme.

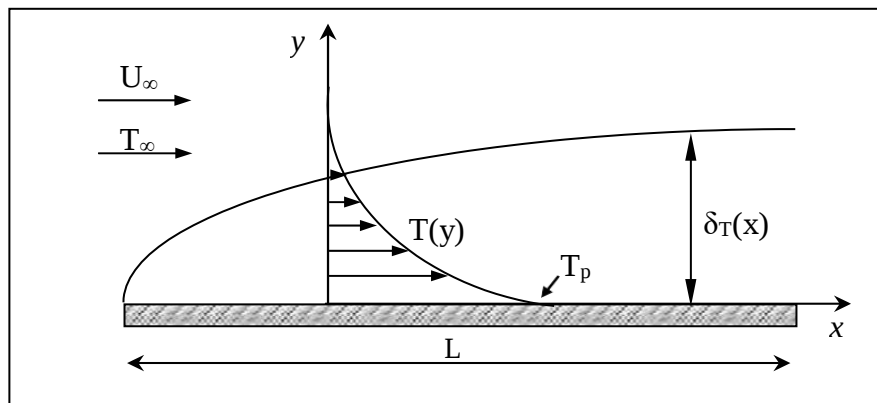


Fig. I .5 : Couche limite thermique sur une plaque plane [4].

I .6.3 Couche limite dynamique

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci.

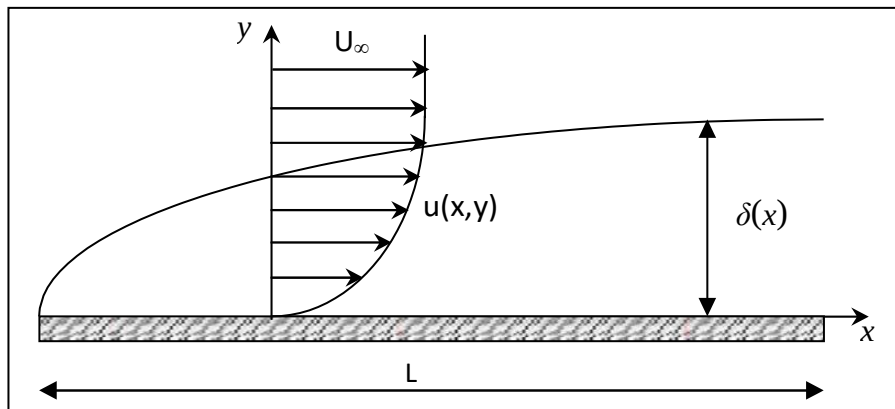


Fig. I .6 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane [5].

$$q_p - q_v = \int_0^\delta (\rho_E U_E - \rho U) dy \quad (\text{I.4})$$

Par convention, on l'exprime à partir d'une épaisseur δ_1 telle que

$$q_p - q_v = \rho_E U_E \delta_1 \quad (\text{I.5})$$

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_E U_E}\right) dy \quad (\text{I.6})$$

L'épaisseur δ_1 est appelée Epaisseur de déplacement. Comme l'illustre la figure ci-dessous, ce qualificatif fait référence à l'interprétation physique de cette grandeur qui correspond à la distance dont il conviendrait de déplacer la paroi pour conserver, en fluide parfait sur l'épaisseur $(\delta - \delta_1)$ le même débit qu'en fluide visqueux sur toute la section de couche limite .

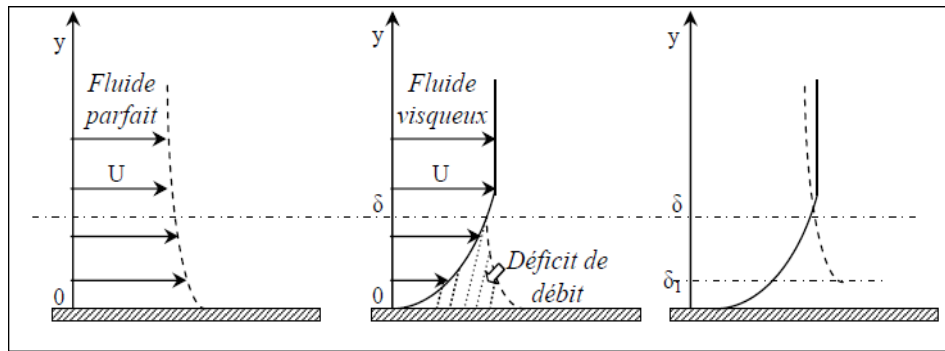


Fig I.7 : Déficit de débit et épaisseur de déplacement [06].

I.7 paramètres caractéristiques de couche limite

I.7.1 Epaisseurs.

I.7.1.1 épaisseur conventionnelle de couche limite dynamique

Nous désignerons désormais par $U_E(x)$ la vitesse obtenue en fluide parfait au point d'abscisse x sur l'obstacle. L'épaisseur conventionnelle de couche limite est égale à la distance transversale où la composante longitudinale de la vitesse atteint 99% de $U_E(x)$. Cette échelle varie en général avec

l'abscisse le long de l'obstacle. En la désignant par $\delta(x)$, on a donc .

$$U[x, \delta(x)] = 0.99 \times U_E(x) \quad (\text{I.7})$$

I .7.1.2 épaisseur conventionnelle de couche limite thermique

D'une façon analogue à l'épaisseur de couche limite dynamique, on définit l'épaisseur de la couche limite thermique δ_T . Soit le rapport adimensionnel.

$$\frac{T(x,y) - T_p(x)}{T_\infty - T_p(x)} \quad (I.8)$$

Où $T(x,y)$ est la température au point courant de la couche limite, $T_p(x)$ celle de la paroi et T_∞ celle de fluide au loin de la paroi. Par définition donc, l'épaisseur de couche limite thermique est la distance transversale au bout de laquelle l'écart de température atteint 99% de la différence

$(T_\infty - T_p)$. On a donc .

$$\frac{T(x,\delta_T) - T_p(x)}{T_\infty - T_p(x)} = 0.99 \quad (I.9)$$

I .7.1.3 épaisseur de déplacement

En raison du ralentissement du fluide à la paroi, le débit de fluide à travers l'épaisseur de couche limite est inférieur à ce qu'il serait, à distance égale, en fluide parfait, comme l'illustre la figure (2). En négligeant la variation des grandeurs en fluide parfait sur une distance transversale de l'ordre de l'épaisseur de couche limite, ce déficit peut être approximativement évalué par .

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_E}\right) dy \quad (I.10)$$

I .7.1.4 épaisseur de quantité de mouvement

Le ralentissement du fluide à la paroi se traduit également par un déficit de quantité de mouvement. Pour en rendre compte et de façon analogue à l'épaisseur de déplacement, on introduit une deuxième échelle appelée épaisseur de quantité de mouvement notée δ_2 telle que .

$$\delta_2(x) = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(1 - \frac{U}{U_E}\right) dy \quad (I.11)$$

Comme pour δ_1 cette nouvelle épaisseur permet d'exprimer la différence de flux de quantité de mouvement entre écoulements en fluide parfait et visqueux à même débit masse ρU sous la forme :

$$J_p - J_v \approx \int_0^\delta \rho U U_E dy - \int_0^\delta \rho U^2 dy \equiv \rho_E U_E^2 \delta_2 \quad (I.12)$$

I .7.1.5 épaisseur d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt

De façon similaire, on définit les épaisseurs caractéristiques suivantes :

$$\delta_3(x) = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(1 - \frac{U^2}{U_E^2}\right) dy \quad (\text{I.13})$$

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(\frac{h - h_E}{h_p - h_E}\right) dy \quad (\text{I.14})$$

$$\Delta_2 = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(\frac{h_i}{h_E} - 1\right) dy \quad (\text{I.15})$$

Ces expressions représentent respectivement les épaisseurs d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt.

I .7.2 Facteur de forme

Le rapport entre les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement est désigné sous le nom de facteur de forme :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (\text{I.16})$$

Cette grandeur prend des valeurs différentes selon la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement dans la couche limite. Pour une couche limite sur plaque plane, elle passe pratiquement du double au simple (d'environ 2,6 à 1,3). Le facteur de forme est également influencé par le gradient adverse, il permet de caractériser l'apparition du décollement qui correspond à une valeur de H voisine de 4.

Chapitre II

Etude dimensionnelle de la couche limite dynamique et thermique

Introduction de chapitre .

Une étude de la couche limite laminaire tant au niveau de l'écoulement dynamique que thermique. Les idées de base sur lesquelles repose le concept de la couche limite sont exposées avec les simplifications des équations conduisant aux formes régissant les écoulements de type couche limite.

II. 1 Situation du problème

Nous abordons ici l'aspect thermique en situation de couche limite. En évolution isovolume, cette question perd beaucoup de son intérêt dans la mesure où le rôle de la température est réduit à celui d'un simple contaminant passif. Ce résultat provient directement du découplage des problèmes dynamique et thermique propre à cette situation. Nous abandonnerons provisoirement l'hypothèse de fluide incompressible au profit de celle d'un comportement thermodynamique de gaz parfait. Nous supposerons cependant que les propriétés physiques du fluide restent constantes. Les hypothèses de mouvement permanent, bidimensionnel plan seront elles maintenues. Enfin les forces extérieures de volumes se réduiront aux seules forces de gravité.

Dans ces conditions, les équations générales s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \quad (\text{II.2})$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \quad (\text{II.3})$$

$$\rho C_P \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (\text{II.4})$$

Où Φ représente la fonction de dissipation mécanique égale ici à :

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.5})$$

La question que nous nous proposons est d'examiner et de savoir si le concept de couche limite dynamique peut être étendu dans ce cas au transfert thermique afin d'envisager une simplification des équations précédentes analogue à celle du modèle de Prandtl pour l'évolution isovolume.

II.2 Notion de couche limite

Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un objet :

- Relativement loin de l'objet , on peut négliger les effets de la viscosité si le nombre de Reynolds est suffisamment grand .

dans ces condition , le fluide peut être décrite par la cinématique .

- Mais : cette hypothèse n'a plus de sens lorsqu' on se rapproche de la paroi de l'objet : la vitesse du fluide devient progressivement nulle .

Proche de la paroi , la viscosité joue un rôle important : on doit y décrire l'écoulement au moyen de l'équation de Navier –Stokes .

Le domaine de transition où la vitesse devient progressivement nulle est appelée « couche limite ».

L'épaisseur de la couche limite dépende de Re .

Au sein de la couche limite ,l'écoulement peut être soit laminaire soit turbulent (cela dépend également de Re).

Au contact de la paroi ,quand le profil de vitesse présente une pente infinie ,on dit qu'il y a décollement de la couche limite .

II.3 Couche limite dynamique

Au sein de la couche limite , l'écoulement doit être décrit au moyen de l' équation de Navires-Stokes.

La résolution de cette équation S'avère difficile sans poser un certain nombre d'approximations :

Ces approximation doivent être validées sur les bases d'une analyse dimensionnelle.

Considérons alors, au sein de la couche limite, un écoulement : Stationnaire ;

où les effets de la pesanteur sont négligeables ; bidimensionnel (x, y) .

II.4 Equations fondamentales

Dans son ensemble, la mécanique des fluides est gouvernée par trois équations fondamentales : l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie.

- Equation de continuité.
- Equation de quantité de mouvement.
- Equation d'énergie.

Avec ces hypothèses, l'équation de **Navier –stokes** se résume à :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Et comme $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, on peut écrire :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

On peut ainsi poser que :

$$v \ll u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx 0$$

Analysons les différents ordres de grandeurs caractéristiques :

$u \approx U$: ordre de grandeur de la vitesse longitudinale (écoulement uniforme) .

$v \approx V$: ordre de grandeur de la vitesse transversale .

$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{x}$: où x peut représenter la distance au front de l'objet .

$\frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta}$: où δ peut représenter l'épaisseur de la couche limite .

On sait que l'équation de continuité doit être vérifiée : $\vec{\nabla} \vec{V} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ donc $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont nécessairement du même ordre de grandeur.

$\frac{U}{X} \approx \frac{V}{\delta} \rightarrow V \approx U \frac{\delta}{X}$ On peut alors en déduire que : $u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U^2}{X}$

et $v \frac{\partial u}{\partial y} \approx V \frac{U}{\delta} \approx \frac{U^2}{X}$

On sait alors que $U \frac{\partial u}{\partial x}$ et $V \frac{\partial u}{\partial y}$ sont du même ordre de grandeur $\frac{U^2}{X}$.

$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ donc : $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U^2}{X} \Rightarrow \nu \frac{U}{\delta^2} \approx \frac{U^2}{X}$

On a : $\frac{\partial y}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{U^2}{X}$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U^2}{X} \quad (\text{II.11})$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \nu \frac{U}{\delta^2} \quad (\text{II.12})$$

On en déduit l'épaisseur de la couche limite : $\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{U}} \sqrt{X}$

L'épaisseur de la couche limite croît en $\sqrt{X}$.

Bilan

L'analyse dimensionnelle nous a permis de montrer que :

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx 0 \delta^2 \approx \frac{\nu X}{U} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II.1})$$

$\delta^2 \approx \frac{\nu X}{U}$: Équation à résoudre avec comme Condition aux limites :

$$u(X, 0) = 0 \quad v(X, 0) = 0 \quad u(X, \infty) = U$$

II.5 Equation de Blasius

$$\text{Equation à résoudre : } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{II.13})$$

En dehors de la couche limite, on sait que sur une même ligne de courant, la vitesse reste à peu près constante, par conséquent :

$\frac{\partial P}{\partial x} \approx 0$ sur une ligne de courant en dehors de la couche limite or, on a vu que dans la couche limite, on a : $\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0$

Donc , comme il y a continuité des pression à la frontière de la couche limite , on peut en déduire que : $\frac{\partial y}{\partial x} \approx 0$ dans la couche limite par conséquent , il reste seulement à résoudre : $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

On peut alors raisonner en terme de lignes de courant au sein même de la couche limite :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad \text{où} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Donc $d\psi = -vdx + udy \approx udy$ on peut alors trouver $\psi(x, y)$

$$\text{En intégrant } d\psi: \psi(x, y) = \int_0^y u(x, y') dy'$$

Exprimons d'abord la vitesse u en fonction de U :

$$u = Ug(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \rightarrow \text{nombre sans dimension}$$

$\delta(X)$: Epaisseur de la couche limite en X

$$\delta(X) = \sqrt{\frac{\nu X}{U}} \psi = \int_0^\eta Ug(\eta') \delta d\eta' \quad (\text{II.14})$$

$$\psi = U\delta \int_0^\eta g(\eta') d\eta' \quad \text{avec} \quad f(\eta) = \int_0^\eta g(\eta') d\eta'$$

donc la fonction $f(\eta)$ est telle que : $f'(\eta) = \frac{df}{d\eta} = g(\eta)$.

$$\text{On peut alors : } \psi(X, Y) = U\delta(X)f(\eta) \quad \text{car} \quad \eta = \frac{y}{\delta(X)}$$

Donc il faut résoudre : $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sachant que :

$$u = Ug(\eta) = Uf'(\eta)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Uf(\eta) \frac{d\delta}{dx} - U\delta \frac{\partial \eta}{\partial x} f'(\eta) \quad (\text{II.15})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{\partial \eta}{\partial x} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{\partial \eta}{\partial x} f''(\eta) = \frac{U}{\delta} f''(\eta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial \eta}{\partial x} f'''(\eta) = \frac{U}{\delta^2} f'''(\eta) \quad (\text{II.16})$$

On obtient ainsi :

$$Uf' \cdot U \frac{\partial \eta}{\partial x} f'' - U \left(f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} f' \right) \cdot \frac{U}{\delta} f'' = \nu \frac{U}{\delta^2} f''' \quad (\text{II.17})$$

Soit, après simplification : $2f''' + ff'' = 0$ équation de Blasius

$$\text{On a : } f(\eta) \rightarrow f'(\eta) \rightarrow u = Uf'(\eta)$$

En considérant les conditions aux limites suivantes :

$$\eta = 0 \Rightarrow Y = 0 \rightarrow u = v = 0 \Rightarrow f(0) = f'(0) = 0$$

$$\text{et : } \eta \rightarrow \infty \Rightarrow Y \rightarrow \infty \Rightarrow u = U \Rightarrow f'(\eta \rightarrow \infty) = 1$$

II.6 Couche limite thermique

II.6.1 Présentation du problème

Le champ des vitesses étant connu. Nous nous intéressons au transfert de chaleur entre une plaque plane et un fluide en mouvement uniforme parallèle à la plaque à l'infini amont. L'influence des forces de flottabilité est négligeable, ce qui signifie que la mise en mouvement du fluide résulte de l'action des forces extérieures à l'échange de chaleur, on parle alors de convection forcée.

Nous allons examiner divers cas : celui d'une paroi isotherme (température de paroi imposée constante), adiabatique (flux de chaleur pariétal nul), et en fin avec flux de chaleur, en convection forcée à grande et basse vitesses.

Dans certains cas on va résoudre le problème numériquement, puis analytiquement afin de comparer les résultats obtenus à l'aide de la méthode numérique. L'écoulement du fluide est permanent, bidimensionnel plan et le fluide est à propriétés physiques constantes.

II.6.2 Convection forcée à grande vitesse

Dans cette situation, la vitesse de l'écoulement externe induit, par arrêt du fluide sur l'obstacle, un apport de chaleur en volume, par dissipation visqueuse. Pour autant, la variation de vitesse est supposée rester limitée à des valeurs telles que la compressibilité du fluide n'ait pas lieu d'intervenir.

II.6.3 Equation d'énergie forme générale et adimensionnelle.

Dans ces conditions, on retrouve l'équation.

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{II.18})$$

Avec les conditions aux limites thermiques suivantes :

$$\begin{cases} y = 0 & T_p = \text{cte} \\ y = \infty & T = T_\infty \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

A cause de la chaleur dissipée dans la couche limite, la plaque va prendre, en chaque point, une température T_f , supérieure à T_∞ appelée température pariétale de frottement.

Puisque, dans le cas de la plaque plane, la température et la vitesse de l'écoulement libre sont en tout point les mêmes et égales respectivement à T_∞ et à U_∞ , l'échauffement local d'arrêt est en tout point égal à :

$$\Delta T_0 = T_0 - T_\infty = \frac{U_\infty^2}{2c_p} \quad (\text{II.20})$$

Le facteur thermique pariétal ne dépend donc que de la température pariétale de frottement :

$$r = \frac{\Delta T_f}{\Delta T_0} = \frac{T_f - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{II.21})$$

Nous considérons ici la même variable adimensionnelle θ telle que :

$$\theta(\eta) = \frac{T(x,y) - T_\infty}{(U_\infty^2/2c_p)} \quad (\text{II.22})$$

On remarque que, à la paroi, la température $T(x,y)$ appelée la température pariétale de frottement T_f et la valeur de θ est alors égale au facteur thermique pariétal :

$$r = \theta_p \quad (\text{II.22})$$

Donc l'équation qui gouverne ce problème est l'équation.

$$\theta'' + \frac{1}{2} P_r f \theta' + 2 P_r f'' = 0 \quad (\text{II.23})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \eta = 0 & f = f' = 0 & \theta = 1 \\ \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

II .6. 4 Convection forcée isovolume à basse vitesse

Dans cette application, nous supposons que la dissipation par viscosité, résultant de l'arrêt du fluide sur la plaque, dégage une quantité de chaleur négligeable, ce qui est le cas pour des valeurs modérées de la vitesse de l'écoulement externe.

L'équation d'énergie s'écrit :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{II.25})$$

Si on garde la même variable adimensionnelle $\theta(\eta)$, l'équation différentielle (II.1) devient :

$$\theta'' + \frac{1}{2} Pr f \theta' = 0 \quad (\text{II.26})$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \eta = 0 & f = f' = 0 & \theta = 1 \\ \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Paroi isotherme :

Une paroi isotherme est une paroi qui est affectée par la température du fluide qu'elle utilise afin qu'elle puisse acquérir ou perdre la température résultant du fluide.

Les conditions aux limites associées au modèle précédent sont :

$$y = 0 : \quad U = V = 0 \quad \text{et} \quad \{ T = Cte = T_p \text{ (paroi isotherme)} \}$$

Chapitre III

RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

Introduction de chapitre .

Dans ce chapitre nous résolvons les équations de la couche limite dynamique à l'aide de la méthode de "Blasius". Ensuite on va résoudre l'équation d'énergie en convection forcée aux grandes et basses vitesses, pour des différents nombres de "Prandtl".

III. 1 La couche limite dynamique

Les conditions aux limites après transformation, imposent que :

$$\left. \begin{aligned} U = 0 &\leftrightarrow f' = 0 \\ V = 0 &\leftrightarrow (\eta f' - f) = 0 \leftrightarrow f = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{à la paroi}) \quad (\text{III.1})$$

$$f' = 1 \quad (\text{loin de la paroi})$$

Nous avons donc transformé le problème aux dérivées partielles initial en un problème différentiel ordinaire avec des conditions aux limites définies en deux points. La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils. La solution analytique de cette équation n'est pas possible, c'est donc à travers une résolution numérique qu'on obtient la solution de notre problème.

III. 2 Méthodes de résolution du problème

Des méthodes très variées permettant la résolution numérique des équations de la couche limite. Si l'on s'intéresse seulement à des problèmes différentiels avec des conditions aux limites spécifiées en deux points, comme celui défini par l'équation "Blasius" munie des conditions aux limites (III.1), les formules de type "Runge-Kutta" sont parmi les plus utilisées, elles sont faciles à programmer, en général stables, elles utilisent une largeur du pas peut être modifiée sans difficultés, en plus de ça la connaissance de la valeur initiale suffit à intégrer l'équation différentielle. Mais, elles demandent plus de temps de calcul que les autres méthodes de précision comparables. Si f , f' et f'' sont tous connues dans une certaine position (η_i) , la formule de "Runge-Kutta" du quatrième ordre est préférable à utiliser pour obtenir la solution à $(h_{i+1} = h_i +$

h) positions. Pour se préparer à l'utilisation de cette méthode, l'équation du troisième ordre (3.), doit être écrite en trois équations de premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = p \\ \frac{dp}{dx} = q \\ \frac{dq}{dx} = -\frac{1}{2}fq \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

En appliquant les formules de "**Runge-Kutta**" pour chacune des équations précédentes, on

obtient

$$\begin{cases} \Delta_1 f_i = h p_i \\ \Delta_1 p_i = h q_i \\ \Delta_1 q_i = -\frac{1}{2} h f_i q_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_2 f_i = h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_1 p_i \right) \\ \Delta_2 p_i = h \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_1 q_i \right) \\ \Delta_2 q_i = -\frac{1}{2} h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta_1 f_i \right) \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_1 q_i \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_3 f_i = h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_2 p_i \right) \\ \Delta_3 p_i = h \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_2 q_i \right) \\ \Delta_3 q_i = -\frac{1}{2} h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta_2 f_i \right) \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_2 q_i \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_4 f_i = h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_3 p_i \right) \\ \Delta_4 p_i = h \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_3 q_i \right) \\ \Delta_4 q_i = -\frac{1}{2} h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta_3 f_i \right) \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_3 q_i \right) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Finalement, les valeurs de f , f' et f'' sont calculées pour (η_{i+1}) :

$$\begin{cases} f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 f_i + 2\Delta_2 f_i + 2\Delta_3 f_i + \Delta_4 f_i) \\ p_{i+1} = p_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 p_i + 2\Delta_2 p_i + 2\Delta_3 p_i + \Delta_4 p_i) \\ q_{i+1} = q_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 q_i + 2\Delta_2 q_i + 2\Delta_3 q_i + \Delta_4 q_i) \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Il faut noter que, l'intégration numérique des équations (III.2) ne peut pas démarrer pour la valeur de $\eta = 0$ parce que q est inconnue en ce point. **Les conditions aux limites** (III.1) concernent seulement les valeurs de f et p' pour $\eta = 0$. La résolution par la méthode de "**Runge-Kutta**", exige de démarrer avec la méthode de "**Moitié intervalle**" présentée sur

l'équation (III.1), pour fixer la valeur de q à $\eta = 0$. La condition aux limites pour η tend vers l'infini est inapplicable, on va limiter notre ordre d'intégration numérique à une valeur maximale η_{max} . La condition : $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1$, de vient :

$$1 - p \leq \varepsilon \text{ pour } \eta = \eta_{max}$$

Au début du calcul, on choisit une valeur arbitraire de q_0 avec une incrémentation positive $\Delta_1 q_1$. Pour les conditions $f = p = 0$ et q_0 pour $\eta = 0$. Les équations (III.2) sont intégrées jusqu'à η proche de η_{max} . La dernière valeur calculée de p est notée p_{max} . Si ce point est inférieur à 1, on remplace q_0 par $q_0 + \Delta_1 q_0$ et on répète l'intégration à partir de $\eta = 0$.

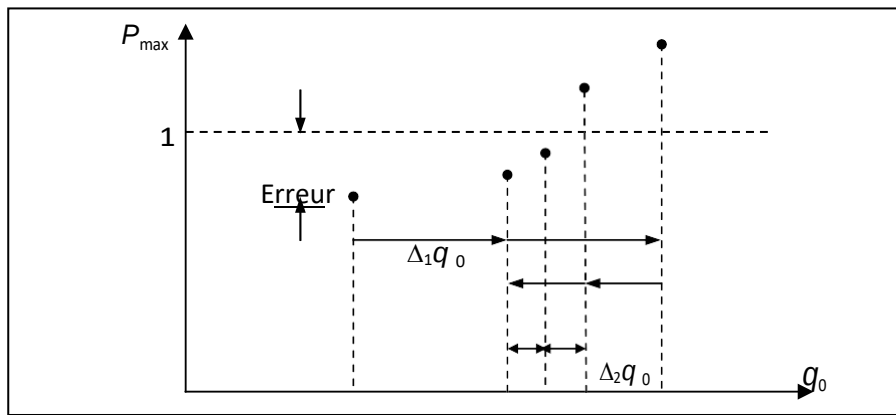


Fig.III.1 : Représentation de la méthode de Moitie intervalle [06].

Si la valeur de p_{max} est supérieure à 1, on prend pour $\Delta_2 q_0 = \frac{\Delta_1 q_0}{2}$ inverser la direction et on remplace q_0 par $(q_0 + \Delta_2 q_0)$. On répète le calcul avec cette valeur négative jusqu'à ce que p_{max} sera inférieur à 1 figure (III.1). Puis on inverse la direction, en mettant $\Delta_3 q_0 = -\frac{\Delta_2 q_0}{2}$ et en remplaçant q_0 par $(q_0 + \Delta_3 q_0)$ jusqu'à ce que la valeur de p_{max} sera supérieure à 1 tant que q_0 est positive, ou p_{max} sera inférieure à 1 lorsque q_0 est négative. A la fin de chaque itération on calcule $(1 - p_{max})$ comme l'erreur indiquée sur la figure (III.1) et on vérifie si l'erreur est positive et aussi si elle est inférieure ou égale à la valeur estimée de epsilon. Quand les deux conditions précédentes sont vérifiées, la condition aux limites est satisfaite, et l'itération est terminée.

III.3 Calcul de la couche limite thermique en Convection forcée

Dans ces conditions, les équations locales s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Les conditions aux limites associées au modèle précédent sont :

$$\text{à } y = 0 : U = V = 0 \text{ et } \{ T = Cte = T_p \text{ (paroi isotherme) } \}$$

$$\text{à } y \rightarrow \infty : U = U_\infty \text{ et } T = T_\infty \quad (\text{température de l'écoulement potentiel})$$

En raison du découplage des problèmes dynamique et thermique, le système formé des deux premières équations peut être résolu séparément de la dernière équation. On reconnaît les équations du problème de "**Blasius**" qui admet une solution affine telle que :

$$\begin{cases} U(x, y) = U_\infty f'(\eta) \\ V(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Avec $\eta = y \sqrt{U_\infty / \nu x}$, la fonction $f(\eta)$ étant solution de l'équation différentielle (III.3) avec les conditions aux limites, $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(\infty) = 1$.

En prolongeant l'hypothèse d'affinité au champ de température, on se propose de chercher sa solution sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\theta(\eta) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{(U_\infty^2 / 2 c_p)} \quad (\text{III. 7})$$

Si l'on porte, dans l'équation (III.5), les expressions (III.2) de U et de V et celles des dérivées de T tirées de l'expression (III.7), on arrive aisément à une relation simple, où ils ne figurent que des fonctions de la variable η :

$$\theta'' + \frac{1}{2} p_r f \theta' + 2 p_r f''^2 = 0 \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.8) montre que le champ de température est aussi auto similaire.

Le nombre de "**Prandtl**" est constant puisque les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes. Les conditions aux limites deviennent :

$$\text{A } \eta = 0 : f = f' = 0 \quad \text{et} \quad \theta = C^{et} = 1$$

$$\text{à } \eta \rightarrow \infty : f' = 1 \quad \text{et} \quad \theta = 0$$

Seule la condition à $\eta = 0$ change avec le type de paroi. La condition à $\eta = \infty$, est maintenue constante pour tous types de paroi. Nous avons donc un problème aux conditions aux limites, gouverné par une équation différentielle de second ordre, dont les coefficients contiennent les fonctions f et f'' .

Puisque $\eta \rightarrow \infty$, on prend la valeur maximale de η de sorte que la condition

($\eta \rightarrow \infty : f' = 1$ et $\theta = 0$) soit satisfaite :

$$\eta = \eta_{max} \theta = 0$$

III.4 Méthode de résolution

Considérons la résolution numérique de l'équation différentielle du second ordre de type :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + A(x) \frac{dF}{dx} + B(x)F = D(x) \quad (\text{III.9})$$

Nous résolvons cette équation, et nous verrons que la résolution de ce problème se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires à matrice tridiagonale. Le problème est reformulé comme un ensemble d'équations différentielles, chacune d'ordre inférieur à deux, en utilisant les formules de différences centrées d'ordre deux :

$$\begin{cases} F'_i = \frac{1}{2h} (F_{i+1} - F_{i-1}) \\ F''_i = \frac{1}{h^2} (F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

L'équation (III.9), s'écrit en $x = x_i$ pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$ comme suit :

$$\left(1 - \frac{h}{2} A_i\right) F_{i-1} + (-2 + h^2 B_i) F_i + \left(1 + \frac{h}{2} A_i\right) F_{i+1} = h^2 D_i \quad (\text{III.11})$$

c'est-à-dire :

$$C_{i1}F_{i-1} + C_{i2}F_i + C_{i3}F_{i+1} = C_{i4} \quad (\text{III.12})$$

avec :

$$\begin{cases} C_{i1} = 1 - \frac{h}{2}A_i \\ C_{i2} = -2 + h^2B_i \\ C_{i3} = 1 + \frac{h}{2}A_i \\ C_{i4} = h^2D_i \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Ecrivant l'équation (III.12) pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$, on aura un système de n équations à n inconnues $F_1, F_2, \dots, F_n$ tel qu'il est schématisé à la figure .

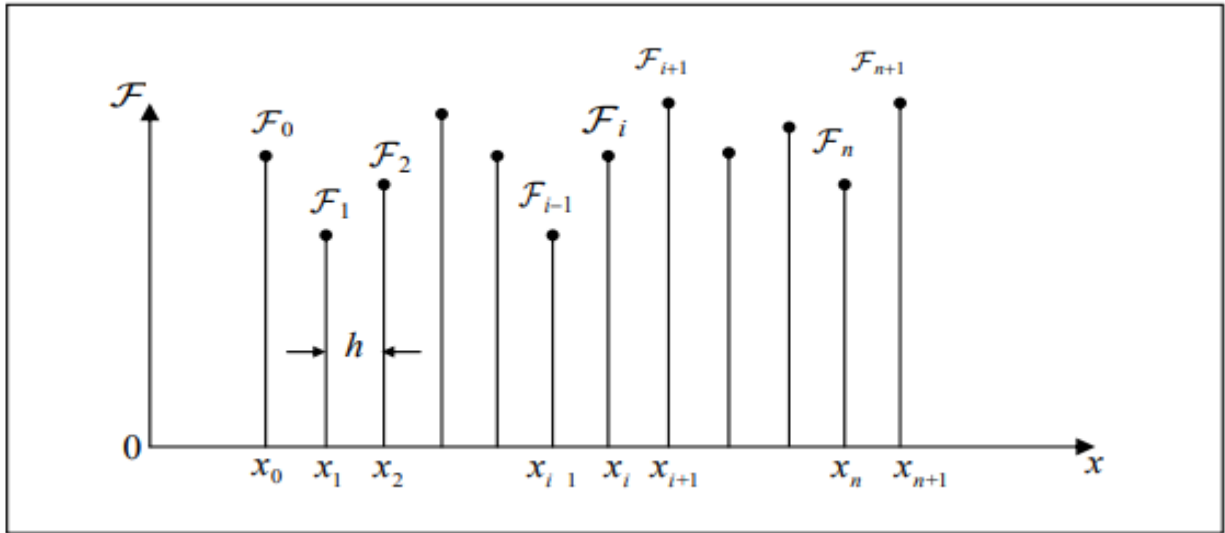


Fig.III.2: Solution numérique du problème ordinaire avec conditions aux limites[06].

En effet, les équations aux nœuds respectifs 1 et n s'écrivent :

$$\begin{cases} C_{11}F_0 + C_{12}F_1 + C_{13}F_2 = C_{14} \\ C_{n1}F_{n-1} + C_{n2}F_n + C_{n3}F_{n+1} = C_{n4} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

En introduisant les conditions aux limites; on aboutit à un système formé par une matrice tridiagonale. Sa résolution est rapide même pour des systèmes de grande taille . « **La méthode d'élimination de Gauss** » est particulièrement bien adaptée à ce type de problème.

Dans ces conditions, l'équation d'énergie reste la même :

$$\theta'' + \frac{1}{2}Prf\theta' + 2Prf''^2 = 0 \quad (\text{III.15})$$

On choisit comme valeur de température à la paroi T_p :

$$T_p = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2C_p} \quad (\text{III.16})$$

Avec les conditions aux limites transformées :

$$\begin{cases} \eta = 0 & f = f' = 0 & \theta = 1 \\ \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Les coefficients C_{i1} , C_{i2} , C_{i3} et C_{i4} restent les mêmes, d'après les conditions aux limites (III.17). Les valeurs de θ_0 et θ_{n+1} sont connues, donc les équations (III.14) peuvent s'écrire, pour la variable adimensionnelle $\theta(\eta)$ comme suit :

$$\begin{cases} C_{12}\theta_1 + C_{13}\theta_2 = C_{14} - C_{11}\theta_0 \\ C_{11}\theta_{n-1} + C_{n2}\theta_n = C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

d'après l'équation (III.18), les coefficients C_{14} et C_{11} deviennent :

$$\begin{cases} C_{14} \leftarrow C_{14} - C_{11}\theta_0 \\ C_{11} \leftarrow 0 \end{cases}$$

Et d'après l'équation (III.18), les coefficients C_{n4} et C_{n3} deviennent :

$$\begin{cases} C_{n4} \leftarrow C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1} \\ C_{n3} \leftarrow 0 \end{cases}$$

III.5 L'organigramme :

L'organigramme (III.3) résume les étapes de calcul de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. On considère différents milieux fluides pour effectuer notre calcul

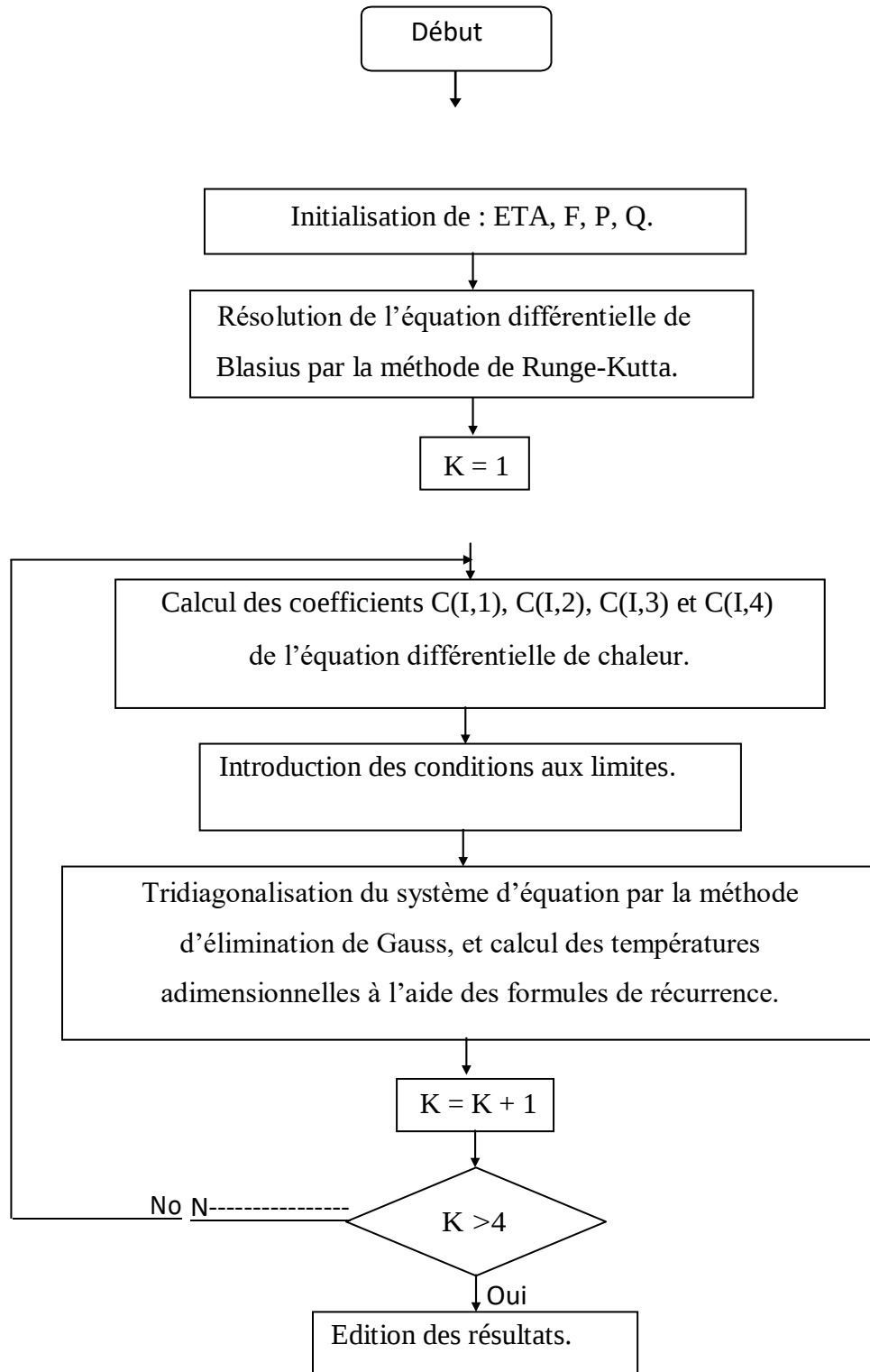


Fig.III.3 : Organigramme de résolution de l'équation de chaleur.

Chapitre IV

Résultats et commentaires

Introduction de chapitre .

Dans cet partie en utiliser le programme FORTRAN et Excel 2007 pour montre clairement la distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme pour divers nombres de Prandtl.

IV.1. La distribution de température

Après avoir simplifié les équations et obtenu les solutions appropriées, nous utilisons maintenant des applications numériques en utilisant les valeurs Pr pour obtenir les courbes explicatives .

IV.1.1 Pour les fluides ayant ($Pr \gg 1$)

On a choisi l'eau pour des températures différentes, la distribution de température est représentée sur la figure (IV.1.)

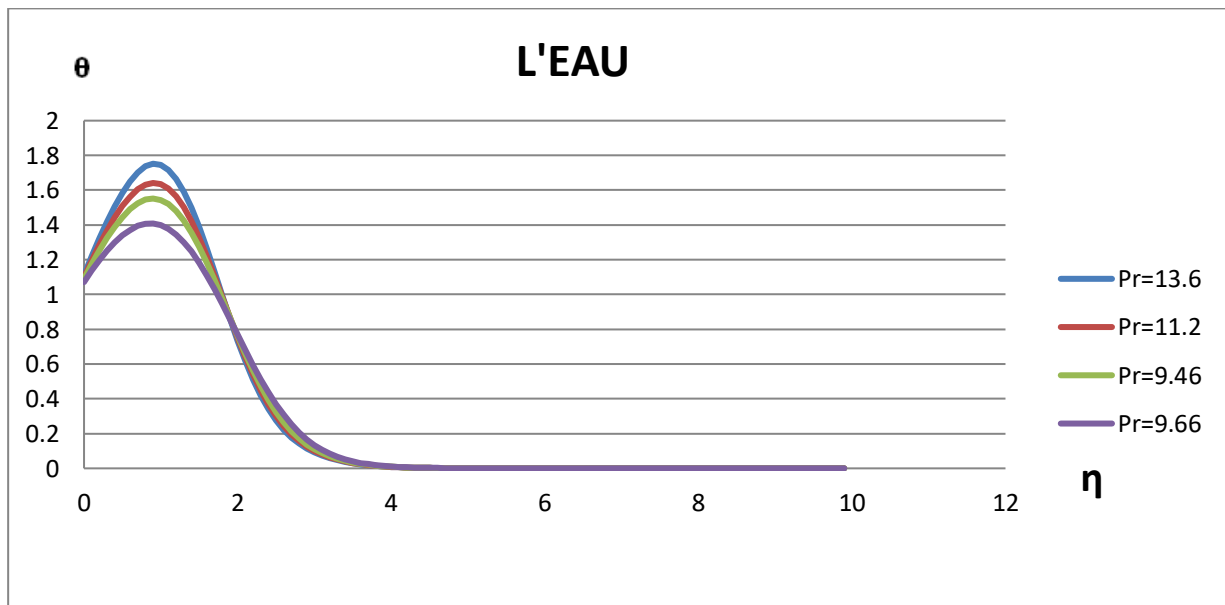


Fig. IV.1: Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour l'eau.

IV.1.2 Pour les fluides ayant ($Pr < 1$)

On a choisi le propane et l'air à la pression atmosphérique pour des températures différentes, la distribution de température est représentée sur les figures (IV.2) et (IV.3) respectivement.

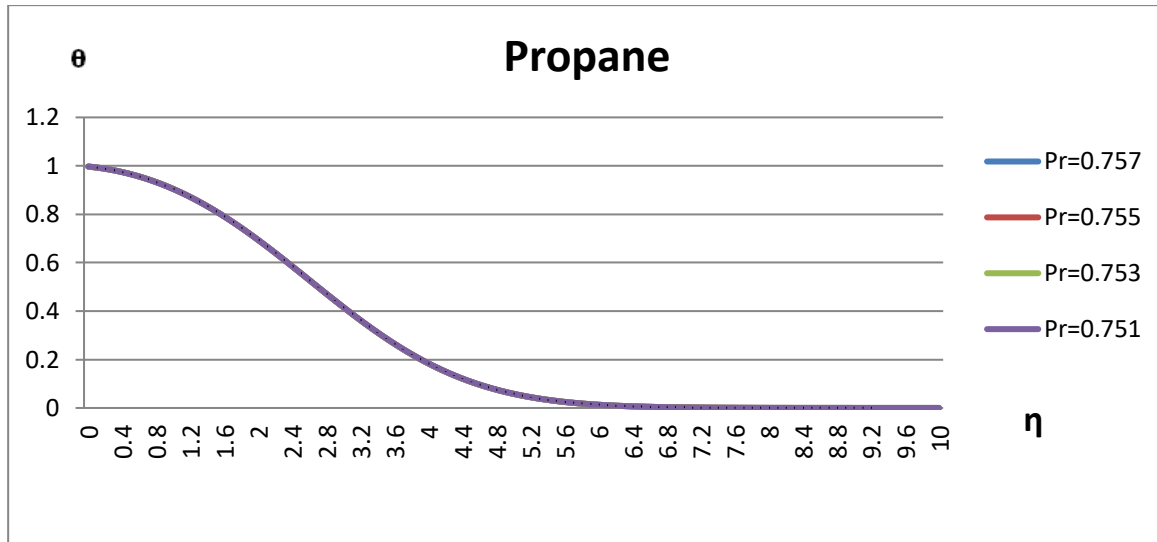


Fig. IV.2: Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour le propane.

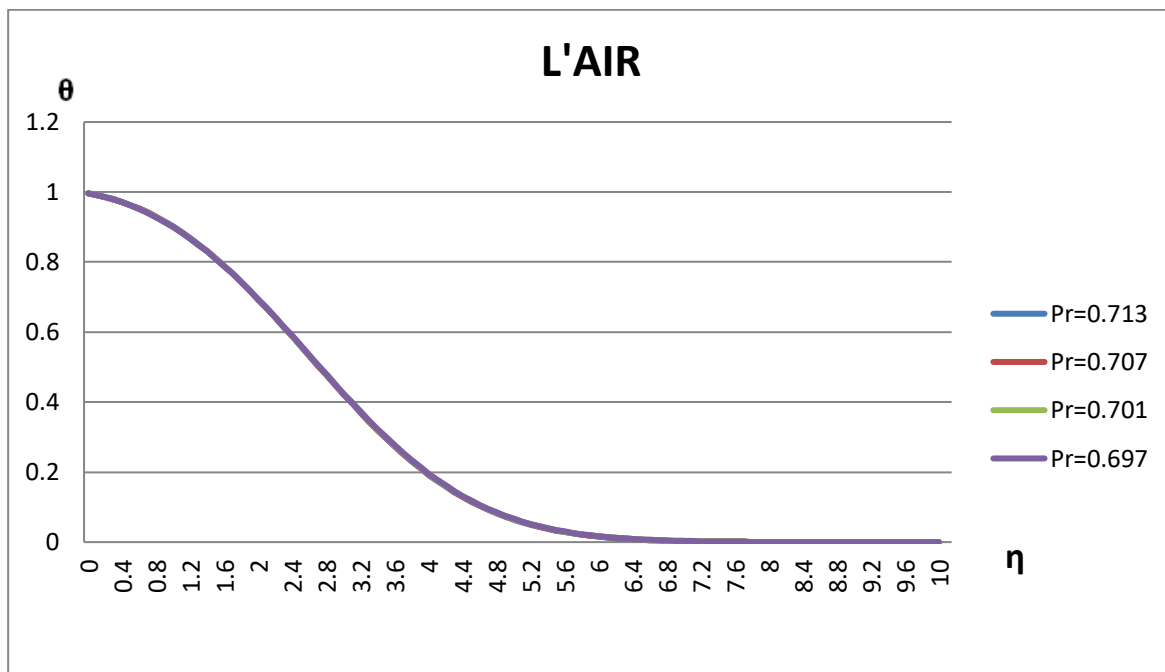


Fig. IV. 3: Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour l'air.

IV.1 .3 Pour les fluides ayant ($Pr \ll 1$)

La figure (IV.4) illustre la distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour le mercure.

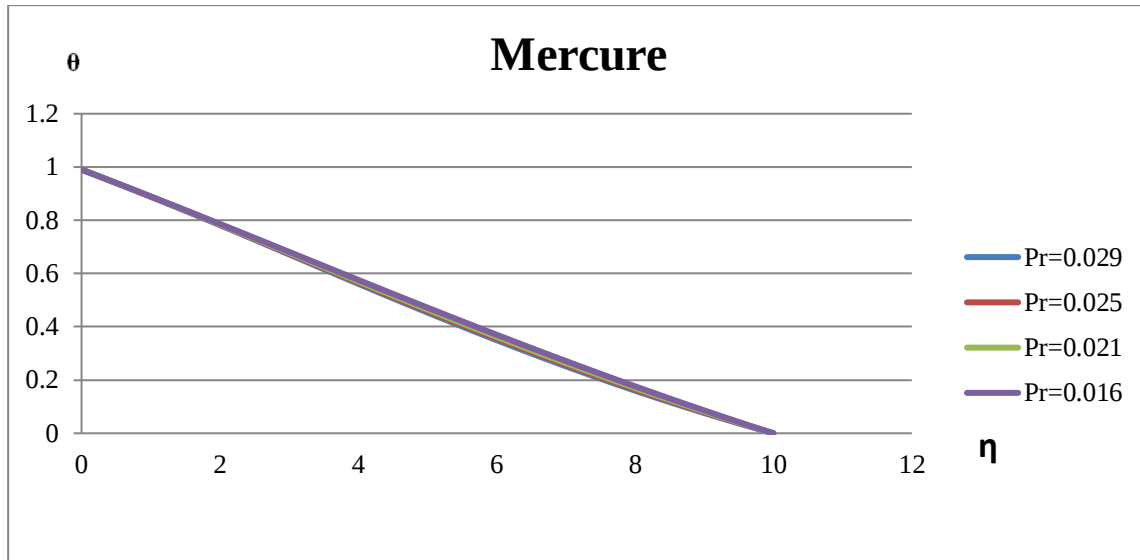


Fig. IV.4 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour le mercure.

IV.1 .4 Distribution de température pour divers milieux fluides

On a choisi quatre milieux fluides à des nombres de Prandtl différents, comme le montre la figure (IV.5).

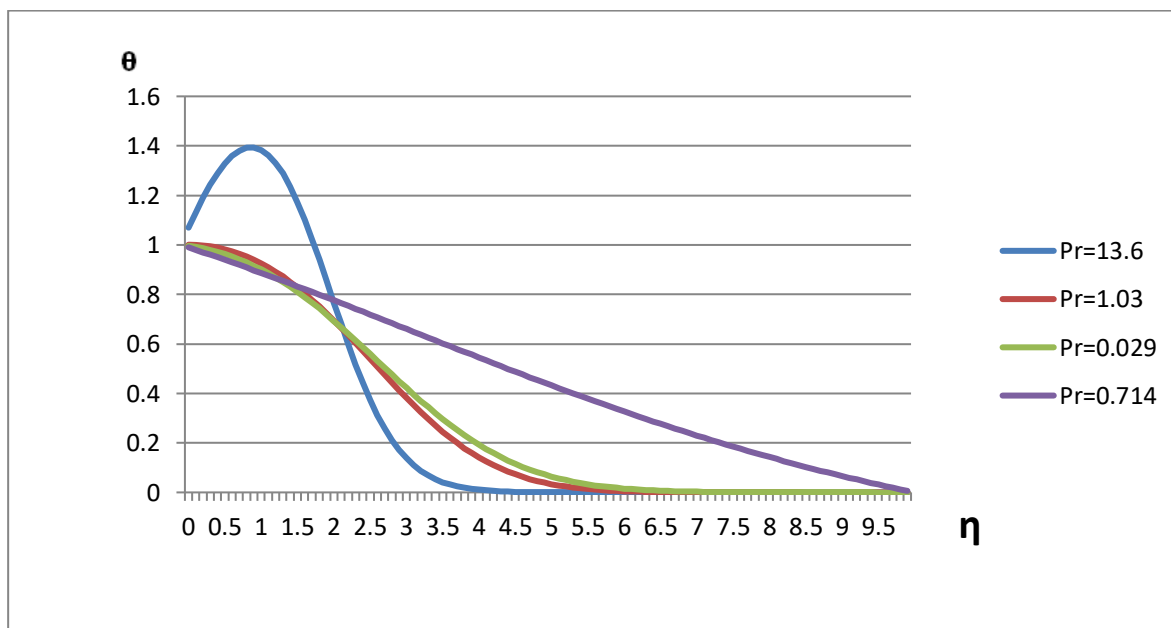


Fig. IV.5 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour divers nombres de Prandtl.

IV .1. 5 Discussions des résultats

Les figures (IV .1), (IV.2), (IV.3) , (IV.4), (IV.5) montre clairement la distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour divers nombres de Prandtl.

Comme le montre la figure (IV.5), la température à la paroi est égale à l'unité puis elle se dégrade en s'éloignant de la paroi. On remarque qu'au sein de la couche limite la température s'élève ou se dégrade selon que le nombre de Prandtl est supérieur ou inférieur à l'unité

Pour des nombres de Prandtl inférieurs ou égaux à l'unité. L'élévation de température est remarquable à cause de la dissipation visqueuse. Pour les fluides qui correspondent à des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité, on remarque qu'il y'a une augmentation de température près de la paroi qui peut être justifiée par le caractère visqueux de ces fluides.

Il faut signaler qu'il y a un transfert de chaleur entre la plaque et le fluide, ce dernier s'échauffe ou se refroidit par la plaque suivant que la température de frottement est supérieure ou inférieure à la température de la paroi T_p .

IV.2 L'épaisseur thermique et l'épaisseur d'enthalpie

IV.2.1 En convection forcée à grandes vitesses

On représente l'épaisseur thermique et l'épaisseur d'enthalpie respectivement dans une couche limite sur une plaque plane isotherme en convection forcée à grande vitesse pour divers nombres de Prandtl. Figures (IV.6) et (IV.7).

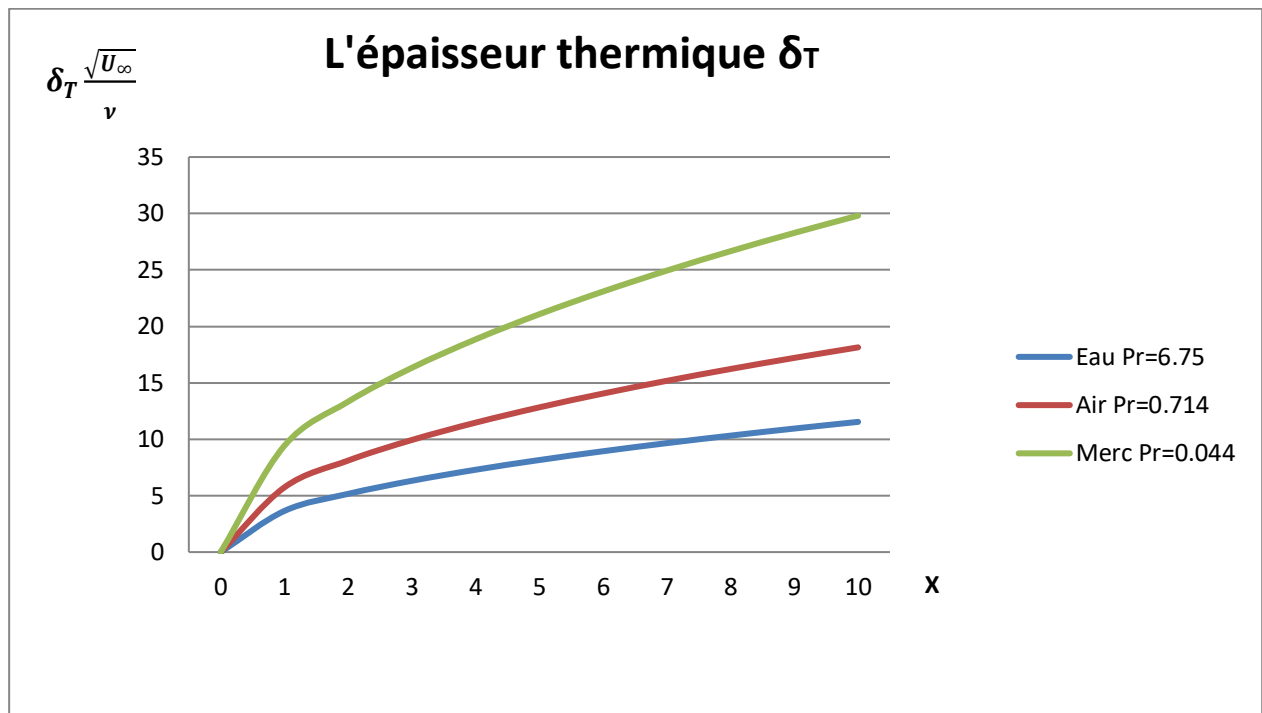


Fig.IV.6: L'épaisseur thermique de couche limite sur une plaque plane isotherme en convection forcée à grande vitesse pour divers nombres de Prandtl.

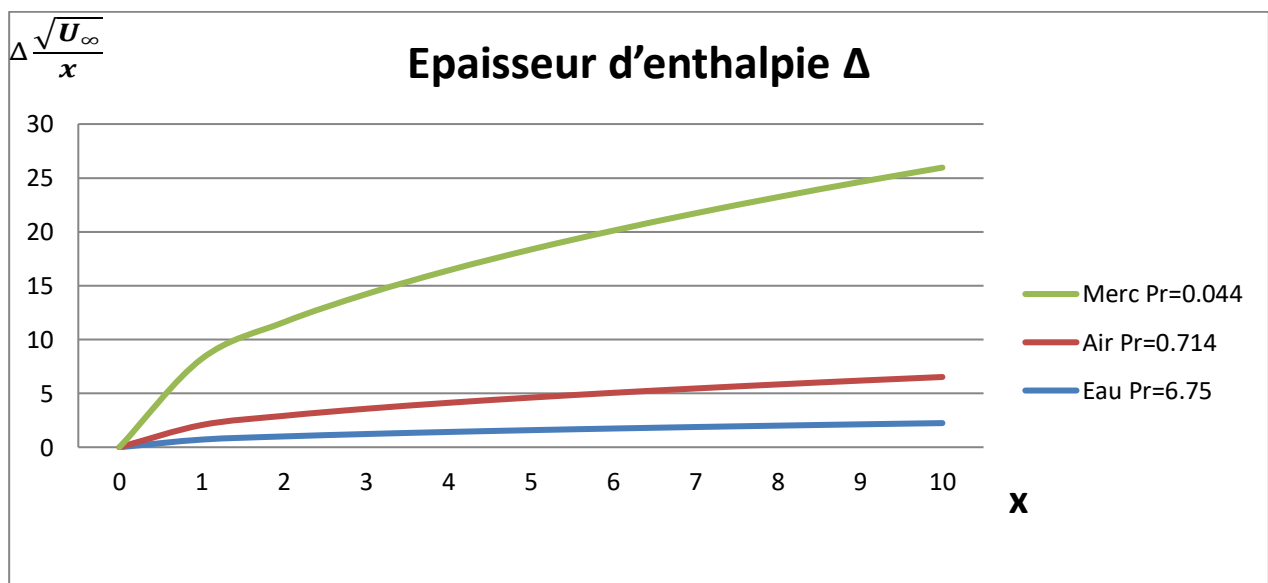


Fig.IV.7 : L'épaisseur d'enthalpie de couche limite sur une plaque plane isotherme en convection forcée à grande vitesse pour divers nombres de Prandtl.

IV.2.2 En convection forcée à basses vitesses

Dans cette application, nous supposons que la dissipation par viscosité, résultant de l'arrêt du fluide sur la plaque, dégage une quantité de chaleur négligeable, ce qui est le cas pour des valeurs modérées de la vitesse de l'écoulement externe.

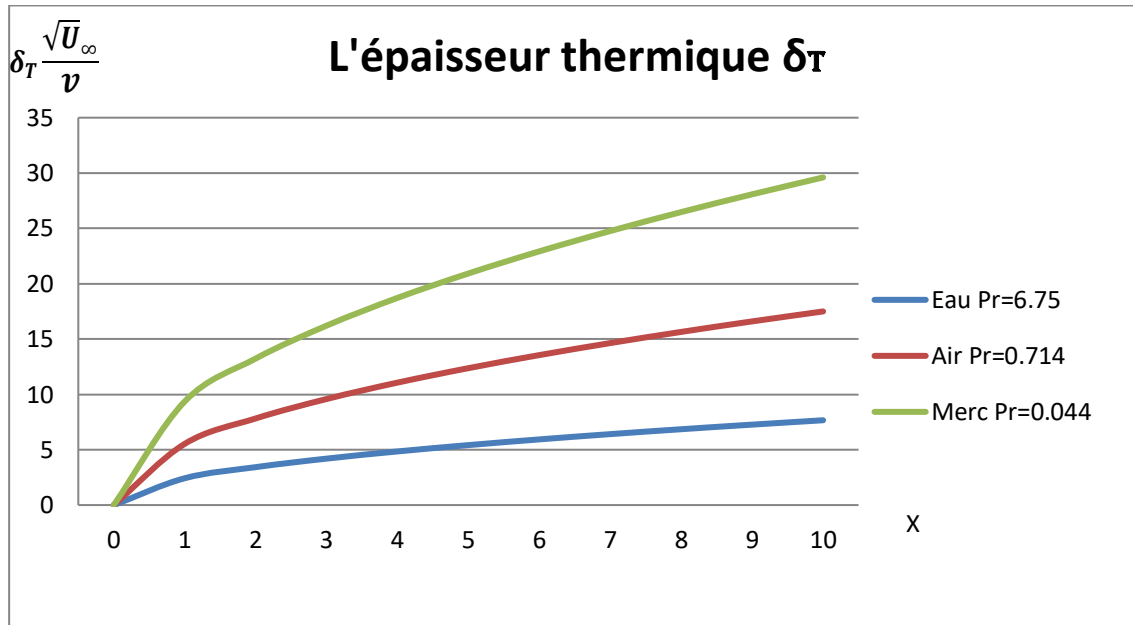


Fig.IV.8 : L'épaisseur thermique de couche limite sur une plaque plane isotherme en convection forcée à basse vitesse pour divers nombres de Prandtl.

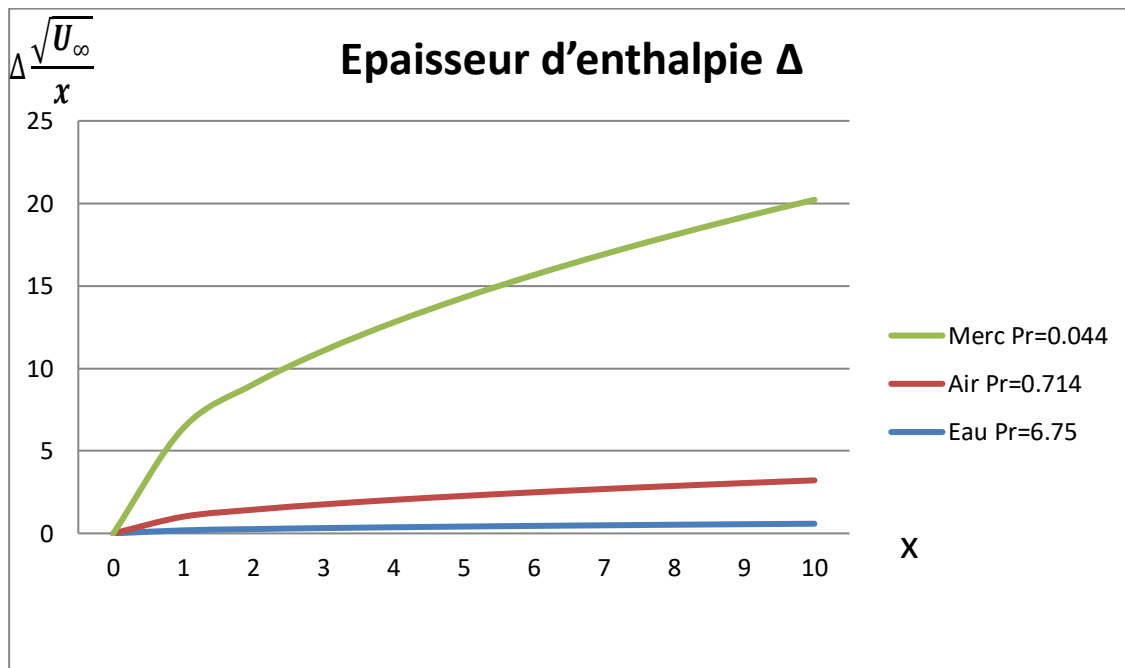


Fig.IV.9: L'épaisseur d'enthalpie de couche limite sur une plaque plane isotherme en convection forcée à basse vitesse pour divers nombres de Prandtl.

IV.3 Discussions des résultats

L'épaisseur de la couche limite thermique δ_T , délimite la région où l'effet thermique est prépondérant. Cette épaisseur diminue ou augmente avec l'augmentation ou la diminution du nombre de Prandtl. (Figures (IV.6) et (IV.8)).

Comme le montrent les figures (IV.6) et (IV.8), l'effet de dissipation visqueuse est très important où l'on constate que la dissipation fait augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique.

L'épaisseur d'enthalpie possède la même allure que celle de la couche limite thermique et la même loi de variation. Dans toutes les situations, l'épaisseur d'enthalpie est plus mince que l'épaisseur de la couche limite thermique (figures (IV.7) et (IV.9)).

Les résultats obtenus ont une grande importance dans l'industrie, à titre d'exemple, pour la lubrification des pièces de températures différentes avec réduction du transfert thermique entre elles, ce sont des milieux tels que $Pr \gg 1$ qui sont favorables. A l'opposé, pour favoriser un haut niveau de transfert thermique tout en minimisant les pertes d'énergie par viscosité, on cherche des milieux tels que $Pr \ll 1$, ce sont les métaux liquides qui sont alors les plus indiqués : l'analyse du comportement de ces métaux liquides est actuellement un axe de recherche important, puisqu'ils sont utilisés dans les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires.

CONCLUSION GENERALE

Notre objectif est l'analyse du comportement des fluides en convection forcée pour divers fluides (liquides, gaz et métaux liquides).

La couche limite thermique sur une plaque plane isotherme en écoulement laminaire incompressible a été étudiée.

On a déduit les équations qui régissent notre problème, après simplification des équations de "*Navier-Stokes*" et de l'équation d'énergie selon les hypothèses de "Prandtl",

L'équation d'énergie est résolue en convection forcée pour divers nombres de "Prandtl".

La résolution numérique du problème thermique a permis de déterminer les différentes caractéristiques de la couche limite thermique laminaire et montrent clairement l'influence de la nature de fluide sur ces dernières.

En perspective à ce travail, on propose une étude qui peut traiter les couches limites qui se développent sur diverses configurations d'obstacles, en écoulement laminaire ou turbulent, pour des fluides compressibles ou incompressibles.

N.B : Les résultats obtenus ont une grande importance dans l'industrie, à titre d'exemple, pour la lubrification des pièces de températures différentes avec réduction du transfert thermique entre elles, ce sont des milieux tels que $Pr \gg 1$ qui sont favorables. A l'opposé, pour favoriser un haut niveau de transfert thermique tout en minimisant les pertes d'énergie par viscosité, on cherche des milieux tels que $Pr \ll 1$, ce sont les métaux liquides qui sont alors les plus indiqués : l'analyse du comportement de ces métaux liquides est actuellement un axe de recherche important, puisqu'ils sont utilisés dans les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [01]** A . Verschaere. Les 3 Mode de Thranfert Thermique /Concernat La Structure Interne De La Terre 22 Mai 2016.
- [02]** S. W. Bedford. "Fluid Mechanics". W C B / MC Graw-Hill, 1998.
- [03]** M. BOUMAH RAT & A. GOURDIN. "Méthodes numériques appliquées". Techniques et Documentation, Paris, 1983.
- [04]** S. CANDEL. "Mécanique des fluides". Edition Dunod, Paris, 1995.
- [05]** P. H. MARTY. "Transferts Thermiques Convectifs". ILP Génie, 2001.
- [06]** J-Marie SEYNHAEVE, Rappel des bases du transfert de chaleur Illustrations 1989 .
- [07]** Yann . Etude de la chaleur / Superprof , 05/02/2018
- [08]** Jules Verne/Jacques Beauchamp . Notions De Macanique Des Fluides /Université de Picardie, 15 septembre 2001
- [09]** Jean-François devillers,Claude François, Bemard le FUR. Laminaire ecoulement / Universalis France , 2018
- [10]** R.Askovic. Couche limite laminaire autour d'un corps déformable animé d'un mouvement non uniforme avec transfert de chaleur / Elsevier B.V,2018
- [11]** Camille St-Louis. I Analyse dimensionnelle II Couche limite / SlidePlayer.fr Inc.
All rights reserved , 2018

Résumé

On a présenté une étude sur le comportement de l'écoulement visqueux type couche limite sous l'effet de la nature de fluide.

L'écoulement a eu lieu dans un domaine bidimensionnel, avec une vitesse uniforme à l'infini et une température constante à la paroi.

L'équation d'énergie est résolue tout en spécifiant les conditions aux limites adéquates et les milieux fluides choisis.

La résolution numérique du problème a permis la détermination des caractéristiques de la couche limite sous l'effet du nombre de "Prandtl".

Mots clé : couche limite thermique, nature de fluide, plaque isotherme.

ملخص

قمنا بإجراء دراسة حول سلوك الجريان اللزج من نوع الطبقة الحدية تحت تأثير طبيعة المائع.

حدد الجريان في مجال ثنائي الأبعاد بسرعة منتظمة عند اللانهاية، ودرجة حرارة ثابتة عند السطح.

حلت معادلة موازنة الطاقة بتحديد الشروط الحدية الملائمة و أوساط الموائع المختلفة.

سمحت لنا الحلول العددية بتحديد خصائص الطبقة الحدية تحت تأثير عدد " Prandtl " .

كلمات المفتاح: الطبقة الحدية الحرارية، طبيعة المائع، صفيحة متساوية الحرارة.

Abstract

A study was presented on the behavior of the boundary-type viscous flow under the effect of the fluid nature.

The flow took place in a two-dimensional domain, with a uniform speed at infinity and a constant temperature at the wall.

The energy equation is solved while specifying the appropriate boundary conditions and chosen fluid media.

The numerical resolution of the problem made it possible to determine the characteristics of the boundary layer under the effect of the number of " Prandtl " .

Key words: thermal boundary layer, fluid nature, isothermal plate.