



N° d'ordre :

N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED**

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE
Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Thème

**Méthodes itératives pour la
résolution des systèmes
d'équations linéaires**

Présenté par : - BELHADI Asma
- BEN AMOR Imane
- DEBBAR Djabbaria

Sous la supervision de : - **BEGGAS Mohammed**

Année universitaire: 2014 – 2015

Remerciements

Nous remercions Allah le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience pour l'accomplissement de ce travail.

Nous remercions les chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans mon vie.

Nous exprimons toutes nos gratitudes à "**BEGGAS MOHAMMED**", pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.

Cela a été un plaisir et un honneur de travailler avec quelqu'un d'aussi compétent et d'aussi cultivé.

ainsi qu'à le professeur "**DOUDI NADJET**".

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur.

Nous tenons a remercier tous les étudiants de la promotion 2014/2015 de Math de l'université **ECHAHID HAMMA LAKHDER El-oued**..

Notations générales

A	matrice.
x	vecteur.
A^T	matrice transposée.
A^*	matrice hermitienne.
A^D	matrice adjoint.
A^{-1}	matrice inverse.
E	espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} .
$\det(A)$	déterminant de la matrice A .
$\bar{\alpha}$	nombre complexe conjugué du nombre α .
I_n	matrice unité, d'ordre n .
P_A	polynôme caractéristique de la matrice A .
$\rho(A)$	rayon spectral de la matrice A .
$\lambda(A)$	valeur propre de la matrice A .
$\sigma(A)$	spectre de la matrice A .
B_J	matrice de jacobi.
B_{GS}	matrice de Gauss-seide.
B_{R_w}	matrice de relaxation.
SOR	successive over relaxation.
$SSOR$	symetric over relaxation.

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Notion général sur les matrices	2
1.1 Eléments d'analyse matricielle	2
1.1.1 Opérations sur les matrices	3
1.1.2 Matrices particulières	4
1.1.3 Inverse d'une matrice	8
1.1.4 Valeur propre et vecteur propre	10
1.2 Normes matricielles	10
1.2.1 Systèmes linéaires	11
2 Méthodes itératives pour résoudre des systèmes d'équations linéaires	14
2.1 Principes généraux	14
2.2 Méthodes de décomposition	15
2.3 Les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation	16
2.3.1 Méthode de Jacobi	16
2.3.2 Convergence de la méthode de Jacobi	18
2.3.3 Méthode de Gauss-Seidel	19
2.3.4 Convergence de la méthode de Gauss-Seidel	20
2.3.5 Méthode de relaxation	22
2.3.6 Convergence de la méthode de relaxation	23
2.4 Comparais de méthode de Jacobi ,de Gauss-Seidel et relaxation	24

3 Applications	26
3.1 résolutions du système linéaires	26
3.1.1 1 ^{ère} application	26
3.1.2 2 ^{ème} application	29
Conclusion Générale	32
Bibliographie	33

Introduction générale

Pour des systèmes linéaires de grande taille, les méthodes directes (de type élimination de Gauss ou Cholesky), peuvent s'avérer trop coûteuses en temps de calcul ou en place mémoire.

L'idée est alors de ne plus chercher à résoudre exactement le système linéaire mais d'approcher la solution par une suite de vecteurs, Construite à l'aide d'une formule de récurrence simple.

On a intérêt dans ce cas à utiliser des méthodes itératives qui font l'objet de notre mémoire. Ces méthodes ne font appel qu'à des produits matrice vecteur, et ne nécessitent donc pas le stockage du profil de la matrice mais uniquement des termes non nuls.

On appelle méthode itérative de résolution du système linéaire, une méthode qui construit une suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ (où "l'itéré" $x^{(k)}$ est calculé à partir des itérés $x^{(0)}, \dots, x^{(k-1)}$) censée converger vers la solution du système linéaire x .

Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres, Après une brève citation sur la thématique abordée.

On introduit au premier chapitre quelques notions et définitions de base concernant l'analyse matricielle. Quant au deuxième chapitre, il est consacré à la description des méthodes étudiées:

- méthode de Jacobi.
- méthode de Gauss-Seidel.
- méthode de relaxation SOR et SSOR.
(sur-relaxation: SOR = Successive over relaxation).

En fin de ce chapitre, on va faire une comparaison entre ces méthodes selon leur vitesse de convergence.

Dans le dernier chapitre, qui présente des applications où, en utilisant les méthodes itératives précédentes, en précisant les étapes qui nous mènent à la solution du système linéaire proposé, en tenant compte de la comparaison effectuée au deuxième chapitre.

Finalement ce mémoire se termine par une conclusion où en résumé notre travail.

Chapitre 1

Notion général sur les matrices

Ce chapitre est consacré à l'introduction de quelques notions fondamentales, d'analyse matricielle.

Nous faisons également un rappel de certains résultats que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Éléments d'analyse matricielle

Soient n et m deux entiers positifs, on appelle matrice à n lignes et m colonnes, ou matrice $n \times m$ à coefficients dans \mathbb{k} un ensemble de $n \cdot m$ scalaires $a_{i,j} \in \mathbb{k}$.

avec $i = 1 \dots n$ et $j = 1 \dots m$, représentés dans le tableau rectangulaire suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{On notera: } A = (a_{ij}).$$

Quand $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on écrit respectivement $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ou $\mathbb{C}^{n \times m}$, afin de mettre en évidence le corps auquel appartiennent les éléments de A .

si $n = m$ on dit que la matrice est carrée ou d'ordre n .

Définition 1.1.1

On appelle, vecteur ligne (resp, vecteur colonne) une matrice n'ayant qu'une ligne (resp colonne) sauf mention explicite du contraire.

Dans le cas $n = m = 1$, la matrice désigne simplement un scalaire de \mathbb{k} .

Exemple 1.1.1 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T .$

1.1.1 Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{n \times m}$, alors la matrice $C = (c_{ij})_{n \times m}$ où $C = A + B$ est tel que:

$$\forall i = 1, \dots, n. \quad \forall j = 1, \dots, m \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple 1.1.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2-4 \\ 3+6 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Produit matricielles Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $B = (b_{ij})_{m \times p}$, alors la matrice $C = (c_{ij})_{n \times p}$ où $C = A \times B$ est tel que.:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, p \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple 1.1.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (2 \times 6) & (1 \times -4) + (2 \times 0) \\ (3 \times 2) + (4 \times 6) & (3 \times -4) + (4 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 30 & -12 \end{bmatrix}$$

Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors la matrice $B = (b_{ij})_{n \times m}$ où $B = \alpha A$ est telle que:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m \quad b_{ij} = \alpha(a_{ij})$$

Exemple 1.1.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{pour } \alpha = 2$$

$$\alpha A = 2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.1.2 Matrices particulières

Matrices égales Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si :

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall ij.$$

On note: $A = B$.

Transposée d'une matrice Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$ alors la matrice transposée $A^T = (b_{ij})_{m \times n}$ est telle que:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m : \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Matrice adjointe On appelle matrice adjointe d'une matrice A la matrice notée A^* telle que:

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}.$$

Matrice symétrique c'est une matrice A carrée telle que:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j.$$

Matrice antisymétrique c'est une matrice carrée telle que:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j.$$

Matrice diagonale C'est une matrice carrée telle que :

$$a_{ij} = 0 \quad \forall j \neq i.$$

Matrice identité la matrice identité est définie par:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Matrice triangulaire supérieure C'est une matrice U telle que:

$$\begin{cases} u_{ij} = 0 & i > j, \\ u_{ij} \neq 0 & i \leq j \end{cases}$$

Matrice triangulaire inférieure C'est une matrice L où:

$$\begin{cases} l_{ij} = 0 & i < j, \\ l_{ij} \neq 0 & i \leq j \end{cases}$$

Matrice orthogonale C'est une matrice telle que :

$$A^t A = A A^t = I \quad \text{ou encore : } A^{-1} = A^t$$

Dans ce cas, les vecteurs lignes (ou colonnes) constituant la matrice A sont orthogonaux et ont pour éléments leurs cosinus directeurs.

Matrice hermitienne c'est une matrice A^* telle que :

$$a_{ji}^* = a_{ij} \quad \forall i, j \quad \text{ou : } A^* = A.$$

C'est donc une matrice égale à sa matrice adjointe.

Matrice à diagonale dominante On dit que la matrice A est à diagonale strictement dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq n.$$

Définition 1.1.2 On se donne la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

• On appelle trace de A ,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Déterminant d'une matrice A une matrice carrée A on peut associer une quantité scalaire appelée déterminant et noté $\det(A)$ calculée par

$$\det(A) = \sum_{\alpha} (-1)^T a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \quad .$$

Où j_1, j_2, \dots, j_n représente une des $n!$ permutation possibles des entières $1, 2, \dots, n$.

La somme étant faite sur toutes les ($\alpha = n!$) permutations possibles.

Pour une permutations de j_1, j_2, \dots, j_n on définit pour chaque produit $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ le nombre de traspositions requises pour arranger la séquence j_1, j_2, \dots, j_n dans l'ordre naturel $1, 2, \dots, n$.

Ce nombre de traspositions est noté T .

Exemple 1.1.5

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^0(4 \times 2 \times 1) + (-1)^1(4 \times 0 \times -2) + (-1)^2(0 \times 0 \times 1) + (-1)^3(0 \times -2 \times 1) + (-1)^4(2 \times -2 \times -2) + (-1)^5(2 \times 2 \times 1).$$

$$\det(A) = 12.$$

Mineur Soit une matrice carrée A d'ordre n , si l'on supprime la i ème ligne et la j ème colonne, le déterminant de la matrice d'ordre $(n-1)$ obtenue est appelé mineur associé à l'élément a_{ij} de la matrice A .

On le note m_{ij} .

Un mineur de A dont les éléments diagonaux sont aussi des éléments diagonaux de A est appelé "mineur principal" de A .

Cofacteur Dans une matrice carrée A d'ordre n , on appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le terme $s_{ij} = (-1)^{i+j}m_{ij}$. Calcul d'un déterminant

Le déterminant peut s'obtenir par l'intermédiaire des cofacteurs.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_{ij} ,$$

(suivant la ligne i).

Ou:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} s_{ij} ,$$

(suivant la colonne j).

s_{ij} étant le cofacteur de l'élément a_{ij} .

Exemple 1.1.6

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (4) \det \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (0) \det \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (2) \det \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 12. \text{voir [6].}$$

Propriété dans le cas des matrice carrées d'ordre n ,

1. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
2. $\det(A.B) = \det A. \det B = \det(B.A)$
3. $\det(A)^T = \det(A)$

Exemple 1.1.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1.

$$\det(\alpha A) = \det \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha \end{vmatrix} = \det(4\alpha^2 - 6\alpha^2) = -2\alpha^2 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$n = 2$$

$$\alpha^2 \det \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2(-2) = -2\alpha^2$$

2.

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right| = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \det(B \cdot A) = (-2) \cdot (24) = -48 \end{aligned}$$

3.

$$\det(A) = (1 \times 4) - (2 \times 3) = -2$$

$$\det(A)^T = (1 \times 4) - (2 \times 3) = -2$$

1.1.3 Inverse d'une matrice

Dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ le produit matriciel est défini pour tout couple d'éléments et la matrice I_n est neutre pour ce produit

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $I_n \cdot A = A = A \cdot I_n$ on définit alors la notion de matrice inversible.

La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible (ou régulière)

Si: $\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$

lorsque elle existe A^{-1} est appelée la matrice inverse de A cependant toutes les matrices carrées non nulles c'est-à-dire distinctes de $0_{n \times n}$, ne sont pas forcément inversibles

les matrices non inversibles sont aussi qualifiées de singulières

Si A est une matrice inversible d'ordre n , alors;

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C \quad C = (\text{adj } A)^T.$$

où C est la matrice de coefficients A_{ij} $i, j = 1, 2, \dots, n$, par conséquent.

Proposition 1.1.1 voir [5] une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Exemple 1.1.8

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{adj } A)^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple suivante, on va donner la matrice de trouver le rayon spectrale à partir des valeurs propres

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^T = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{12} & \frac{-4}{12} & \frac{-4}{12} \\ \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{-4}{12} \\ \frac{2}{12} & \frac{8}{12} & \frac{8}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dans le cas d'une matrice diagonale inversible, l'inverse est encore une matrice diagonale ayant pour éléments les inverses des éléments de la matrice.

Propriétés: voir [2]

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible alors:

A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha A)$ est inversible et $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont inversibles, alors le produit A, B est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dans le cas d'une matrice carrée d'ordre n , est inversible donc

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

1.1.4 Valeur propre et vecteur propre

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n,)$$

est le polynôme caractéristique de la matrice A , étant de degré n par rapport à λ .

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n à valeur réelles ou complexes; On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Ax = \lambda x$ le vecteur x est le vecteur propre associé à valeur propre λ et l'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A on le note $\sigma(A)$. On dit que x et y sont respectivement vecteur propre à droite et vecteur propre à gauche de A associé à la valeur propre λ si:

$$Ax = \lambda x, y^* A = \lambda y^*.$$

3. On appelle rayon spectral de A la quantité $\rho(A) = \max \{|\lambda|; \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$.

1.2 Normes matricielles

étant donné une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur \mathbb{C}^n ,

l'application $\|\cdot\| = A_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ défini par:

$$\|A\| = \sup_{\left\{ \begin{array}{l} \nu \in \mathbb{C}^n \\ \nu \neq 0 \end{array} \right\}} \frac{\|A\nu\|}{\|\nu\|} = \sup_{\left\{ \begin{array}{l} \nu \in \mathbb{C}^n \\ \|\nu\| \leq 1 \end{array} \right\}} \|A\nu\| = \sup_{\left\{ \begin{array}{l} \nu \in \mathbb{C}^n \\ \|\nu\| = 1 \end{array} \right\}}$$

est une norme matricielle appelée norme sup-tordonnée à la norme donnée On a:

$$\|A\nu\| \leq \|A\| \|\nu\| \quad \text{pour tout } \nu \in \mathbb{C}^n$$

et que la norme $\|A\|$ peut aussi se définir par :

$$\|A\| = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|A\nu\| \leq \alpha \|\nu\| : \forall \nu \in \mathbb{C}^n \}$$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée, alors

$$\|A\|_1 = \sup \frac{\|A\nu\|_1}{\|\nu\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sup \frac{\|A\nu\|_2}{\|\nu\|_2} = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(AA^T)} = \|A^T\|_2$$

$$\|A\|_\infty = \sup \frac{\|A\nu\|_\infty}{\|\nu\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

l'application $\|\cdot\|_E : A_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\|A\|_E = \left[\sum_{ij} |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = [\text{tr}(A^T A)]^{\frac{1}{2}}$$

Soit A une matrice carrée quelconque et $\|\cdot\|$ une norme matricielle, subordonnée ou non, quelconque alors $\rho(A) \leq \|A\|$.

Démonstration. λ valeur propre de $A \exists \nu \neq 0 / A\nu = \lambda\nu$.

et $\|\lambda\nu\| = |\lambda| \|\nu\| \leq \|A\| \|\nu\| \quad \nu \neq 0$, donc $|\lambda| \leq \|A\|$, $\forall \lambda \Rightarrow \max_i |\lambda_i| = \rho(A) \leq \|A\|$.

Etant donnée une matrice A et un nombre $\varepsilon > 0$. il existe au moins une norme matricielle subordonnée, telle que:

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

■

1.2.1 Systèmes linéaires

Tout système linéaire s'écrit:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Où $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m : a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$

ou, sous forme matricielle: $AX = B$, où $A = (a_{ij})_{n \times m}$, $B = (b_i)_{n \times 1}$ et $X = (x_j)_{m \times 1}$.

Une solution de ce système est un vecteur $X = (x_j)_{m \times 1}$ dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations du système.

On distingue divers types de systèmes:

système carré si $m = n$;

système de Cramer si le système est carré et A est une matrice inversible;

système homogène si $B = 0$;

système impossible s'il n'admet aucune solution (équations incompatibles);

système compatible s'il admet au moins une solution;

système indéterminé s'il admet plusieurs solutions.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

est un système carré non homogène. Comme, en outre, $\det \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -19 \neq 0$, il s'agit

d'un système de Cramer.

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$$

est un système carré non homogène impossible (les deux équations sont contradictoires)

. Ce n'est pas un système de Cramer puisque $\det \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

est un système non carré (2 équations à 3 inconnues) homogène.

Les systèmes de Cramer jouissent de la propriété suivante qui en facilite la résolution.

Propriété le système de Cramer $AX = B$ admet la solution unique $X = A^{-1}B$, qui s'exprime aussi sous la forme:

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det(A_1 \dots A_{j-1} B A_{j+1} \dots A_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

où $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ est la k -ième colonne de A .

Exemple 1.2.1 Soit le système de Cramer $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$

Il a pour unique solution :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui se calcule plus aisément en utilisant la propriété ci-dessus:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{-19} \det \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ x_2 = \frac{1}{-19} \det \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{2}{19} \\ x_2 = \frac{3}{19} \end{cases}$$

Propriété Si le système linéaire $AX = B$ admet deux solutions distinctes, alors il en admet une infinité.

Les système homogènes admettent toujours (au moins) la solution nulle:

$$x_j = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Les solutions d'un système non homogène compatible (ce qui n'est pas toujours le cas!) $AX = B$ peuvent être obtenues grâce à celles du système homogène associé $AX = 0$, voir[2].

Chapitre 2

Méthodes itératives pour résoudre des systèmes d'équations linéaires

Pour des systèmes linéaires de grande taille, les méthodes directes (du type élimination de Gauss ou Cholesky), peuvent s'avérer trop coûteuses en temps de calcul ou en place mémoire.

L'idée est alors de ne plus chercher à résoudre exactement le système linéaire mais d'approcher sa solution par une suite de vecteurs, construite à l'aide d'une formule de récurrence simple.

2.1 Principes généraux

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice régulière et $b \in \mathbb{R}^n$ donnés.

Toutes les méthodes itératives pour la résolution du système linéaire:

$$Ax = b \tag{2.1.1}$$

Sont basées sur le principe suivant:

On cherche à écrire A sous la forme

$$A = M - N \tag{2.1.2}$$

où M est une matrice assez facilement inversible c'est-à-dire pratiquement diagonale ou triangulaire le système linéaire s'écrit alors:

$$(M - N)x = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \tag{2.1.3}$$

alors:

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \quad (2.1.4)$$

cette dernière équation suggère alors le processus itératif suivant:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(K+1)} = M^{-1}Nx^{(K)} + M^{-1}b \end{cases} \quad (2.1.5)$$

2.2 Méthodes de décomposition

Considérons, pour commencer, les méthodes itératives de la forme,

$$x^{(0)} \text{ donné ; } \quad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k \geq 0 \quad (2.2.1)$$

où B désigne une matrice carrée $n \times n$ appelée matrice d'iteration et où c est un vecteur dépendant de b (le second membre du système à résoudre) on peut associer la méthode itérative de la forme (2.1.5).

En effet $Ax = b$ s'écrit $Mx = Nx + b$. la méthode (2.1.5) est bien du type (2.2.1) avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$.

Proposition 2.2.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible et $A = M - N$ décomposition de A . la condition nécessaire et suffisante que pour $x^{(k)}$ défini par (2.1.5) converge vers x , solution de (2.1.1), et que:

1. $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$
2. $\rho(B) < 1$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$
2. $\|B\| < 1$, $\|\cdot\|$ est norme induite.

Démonstration. 1. La méthode (2.2.1) est supposée consistante.

Donc $c = (I - B)A^{-1}b$. D'où $\forall k, x^{(k+1)} - x = B(x^{(k)} - x)$. par récurrence on a:
 $x^{(k+1)} - x = B^{k+1}(x^{(0)} - x)$.

La méthode (2.2.1) est donc convergente si et seulement si:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1}(x^{(0)} - x) = 0, \forall x^{(0)} \in \mathbb{C}^n. \text{ C'est-à-dire si et seulement si: } \lim_{k \rightarrow \infty} B^k y = 0,$$

$\forall y \in \mathbb{C}^n$. Ce équivaut à $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$ dans l'espace $M_n(\mathbb{C})$.

2. Si $\rho(B) < 1$ grâce au résultat d'approximation du rayon spectrale, donc il existe $\varepsilon > 0$

tel que $\rho(B) < 1 - 2\varepsilon$ et une norme induit $\|\cdot\|_{B,\varepsilon}$ tels que

$$\|\cdot\|_{B,\varepsilon} = \mu < \rho(B) + \varepsilon = 1 - \varepsilon < 1.$$

comme $\|\cdot\|_{B,\varepsilon}$ est une norme matricielle, on a $\|B^k\|_{B,\varepsilon} < \mu^k \rightarrow 0$, lorsque $k \rightarrow \infty$. Comme l'espace $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et on a donc $\|B^k\|_{B,\varepsilon} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Montrons maintenant la réciproque: supposons que $B^k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, et montrons que $\rho(B) < 1$. Soient λ une valeur propre de B et x un vecteur propre associé. Alors

$B^k x = \lambda^k x$ et si $B^k \rightarrow 0$, alors $\lambda^k x \rightarrow 0$, et donc $\lambda^k x \rightarrow 0$, ce qui n'est possible que si $|\lambda| < 1$. D'où le résultat.

3. S'il existe une norme induit notée $\|\cdot\|$ telle que $\|M^{-1}N\| < 1$, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$

et donc la méthode converge ce qui précède. Réciproquement, si la méthode converge alors $\rho(M^{-1}N) < 1$, et donc il existe $\eta > 0$ tel que $\rho(M^{-1}N) = 1 - \eta$. Prenons maintenant $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ il existe une norme induite $\|\cdot\|$ telle que $\|M^{-1}N\| \leq \rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$, ce qui démontre le résultat. ■

2.3 Les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation

2.3.1 Méthode de Jacobi

Le système linéaire (2.1.1) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j = b_1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j = b_n \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$

La méthode de Jacobi consiste à chaque itération K , à résoudre chaque équation par rapport à l'une des variables, les autres étant fixées à leurs valeurs obtenues à l'itération précédente. Soit donc le vecteur $x^{(k)}$ donné, alors on détermine successivement les composantes de $x^{(k+1)}$ par les formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)} \\ \dots \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n a_{ij}x_j^{(k)}, \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \\ \dots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)} \end{array} \right. \quad (2.3.2)$$

Les formules précédentes ne définissent effectivement $x^{(k+1)}$ que si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls. Ceci n'est pas une restriction, car on peut démontrer que si une matrice est inversible, il existe une permutation de ses lignes telle que tous les éléments de la diagonale de la matrice ainsi obtenue soient non nuls.

Principe On suppose que la matrice carrée A vérifie $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i, 1 \leq i \leq n$ et on pose

$$A = D - (E + F) \quad (2.3.3)$$

Ainsi on a:

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ -E & D & -F & \\ & & \ddots & \end{pmatrix},$$

avec

- D matrice diagonale contenant la diagonale de A ,
- E matrice triangulaire inférieure (triangle inférieur de $-A$),
- F matrice triangulaire supérieure (triangle supérieur de $-A$).

Avec ces notations on peut écrire le système (2.1.1) sous la forme:

$$Dx = (E + F)x + b \quad (2.3.4)$$

Si on suppose que D est inversible, la méthode de Jacobi s'écrit;

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b, k \geq 0. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

La matrice $B_J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$ est appelée matrice de Jacobi associée à A .
la suite de vecteurs $x^{(k)}$ de composantes $(x_i^{(k)})$ est défini par:
 $x^{(0)}$ quelconque et

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right), 1 \leq i \leq n \quad (2.3.6)$$

Algorithme 2.3.1

- On donne le vecteur $x^{(0)}$ et ε .

- Faire:

$$x_i^{(k+1)} = \left(- \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right) / a_{ii}, k \geq 0, 1 \leq i \leq n$$

-Test d'arrêter si: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$, Voir[4].

Remarque 2.3.1 Si on a des zéros dans diagonale de A , il suffit de multiplier la matrice A par une matrice de permutation $pAx = pb$,

On multiplie sur les lignes même chose pour b .

2.3.2 Convergence de la méthode de Jacobi

Théorème 2.3.1 une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme de Jacobi converge,

indépendamment de la condition initiale $x^{(0)}$, est que $\rho(B_J) < 1$ ou

$$\rho(B_J) = \max_{i=1..n} |\lambda_i|, \lambda_i : \text{valeur propre de } B_J$$

1. Si A est matrice à diagonale fortement dominante alors: $\lim_{k \rightarrow \infty} B_J^k = 0$ (et donc la méthode de Jacobi converge)

2. Si la méthode Jacobi converge alors la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers la solution x^* du système $Ax = b$.

Démonstration. 1) Il suffit de montrer que $\rho(B_J) = \rho(D^{-1}(E + F)) < 1$ on a $B_J = (b_{ij}) = D^{-1}(E + F)$, Donc $b_{ii} = 0$, et $b_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$, $i \neq j$ de (2.1.2) on déduit que;

$\sum_{j=1, i \neq j}^n |b_{ij}| = \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{ij}| < 1$ et $\rho(B_J) < 1$. Donc la méthode de Jacobi est convergente. ■

Corollaire 2.3.1 Lorsque les matrices A et $2D - A$ sont définies positives et si A est symétrique, la méthode Jacobi converge.

Démonstration. Soit $A = D - E - F \implies D = A + E + F \implies 2D = A + E + F + D \implies 2D - A = D + E + F$, $M^* + N = D + E + F = 2D - A$ telle que: $M^* = D + E$ et $N = F$. ■

2.3.3 Méthode de Gauss-Seidel

Il s'agit d'une modification de la méthode de Jacobi qui consiste pour chaque

équation les composantes de $x^{(k+1)}$ déjà calculées, ceci conduit aux formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^{(k+1)} = b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^{(k)} \\ \dots \\ a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}, \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1 \\ \dots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k+1)}. \end{array} \right. \quad (2.3.7)$$

Sous forme matricielle cela revient à écrire le système (2.1.1) sous la forme:

$$(D - E)x = Fx + b. \quad (2.3.8)$$

Où les matrices D , E et F ont été données dans le paragraphe référencé sur la méthode de Jacobi.

Principe: Cette méthode utilise la décomposition $A = (D - E) - F$. la matrice $D - E$

est triangulaire inférieure donc facile à inverser, et $a_{ii} \neq 0 \forall i$, la méthode (2.2.1). On obtient:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b \end{cases} \quad (2.3.9)$$

La matrice $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$ est appelée matrice de Gauss-Seidel associée à A . La suite de vecteurs $x^{(k)}$ de composantes $(x_i^{(k)})$ est définie par: $x^{(0)}$ quelconque et

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right), 1 \leq i \leq n \quad (2.3.10)$$

Algorithme 2.3.2

-On donne le vecteur $x^{(0)}$ et ε

-Faire

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), 1 \leq i \leq n.$$

-Test d'arrêter si: $\|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n.$

2.3.4 Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Proposition 2.3.1 La méthode Gauss-Seidel converge si: $\rho(B_{GS}) < 1.$

Démonstration. Il suffit de montrer $\rho(B_{GS}) = \rho((D - E)^{-1}F) < 1$

On a, $B_{GS} = (g_{ij}) = (D - E)^{-1}F$

$(D - E)^{-1} = [D(I - D^{-1}E)]^{-1}$, donc $B_{GS} = (I - D^{-1}E)^{-1}D^{-1}F$ or E est strictement inférieure, donc $D^{-1}E$ également et

$$(I - D^{-1}E)^{-1} = I + D^{-1}E + (D^{-1}E)^2 + \dots + (D^{-1}E)^{n-1}; (D^{-1}E) = 0$$

$$B_{GS} = D^{-1}F + D^{-1}E D^{-1}F + \dots + (D^{-1}E)^{n-1}D^{-1}F$$

On montre par récurrence sur i ; ligne par , que $\sum_{j=1}^n |g_{ij}| < 1$ et $\rho(B_{GS}) < 1$, donc méthode Gauss-Seidel convergent.

La méthode de Gauss-Seidel converge ssi:

$$\|B_{GS}\| < 1 \text{ pour une norme matricielle.}$$

Si A est à diagonale strictement dominant, Les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent. ■

Démonstration. Avec les notations introduites aux paragraphes consacrés à . Ces méthodes on a $B_J = D^{-1}(E + F)$, $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$ et l'on doit prouver que $\rho(B_J)$ et $\rho(B_{GS}) < 1$.

Pour la méthode de Jacobi , on a: $B_{J_{ij}} = 0$ si $i = j$ et $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ si $i \neq j$ donc:

$$\| B_J \|_{\infty} = \max_i \sum_j | B_{J_{ij}} | = \max_i \frac{1}{| a_{ii} |} \sum_{j \neq i} | a_{ij} | < 1$$

Puisque A est à diagonale strictement dominante on conclut à l'aide de la

$$\rho(B_J) \leq \| B_{GS} \|_{\infty} < 1$$

Passons à la méthode de Gauss-Seidel. Nous allons montrer que $\lambda < 0$ Pour toute valeur propre λ de $B_{GS} = (D - E)^{-1}F$; l'inégalité étant évidente $\det((D - E)^{-1}F - \lambda I_n) = 0$ d'ou $\det(F - \lambda(D - E)) = 0$ autrement dit 0 est valeur propre de

$$-F + \lambda(D - E) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \cdots a_{21} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} \cdots \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Gerchgorin

$$(D_i(A)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : | \lambda - a_{ii} | \leq \sum_{j \neq i} | a_{ij} | \right\}, 1 \leq i \leq n$$

Il existe i tel que:

$$| 0 - \lambda a_{ii} | \leq \sum_{j < i} | \lambda a_{ij} | + \sum_{j > i} | a_{ij} |$$

D'après l'hypothèse on a:

$$\sum_{j < i} | \lambda a_{ij} | + \sum_{j > i} | \lambda a_{ij} | < | \lambda a_{ij} | \leq \sum_{j < i} | \lambda a_{ij} | + \sum_{j > i} | a_{ij} |$$

Ce que prouve que

$$\sum_{j > i} | \lambda a_{ij} | < \sum_{j > i} | a_{ij} |$$

D'ou $| \lambda | < 1$ et $\rho(B_{GS}) < 1$. ■

2.3.5 Méthode de relaxation

Principe: C'est variable de la méthode de Gauss-Seidel. Cette méthode consiste à introduire artificiellement, dans la méthode de Gauss-Seidel, un paramètre $\omega \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que le système linéaire (2.3.9) soit remplacé par le système

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)x^{(k+1)} = \varphi(\omega, x^{(k)}, b) \quad (2.3.11)$$

Où φ dépend de $\omega, x^{(k)}$ et b . On va ainsi obtenir une méthode itérative qui converge pour $\omega = 1$ et qui va converger plus rapidement par un bon choix du paramètre ω . Pour cela, on écrit la matrice A sous la forme

$$A = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right). \quad (2.3.12)$$

Si on suppose $(D - \omega E)$ inversible, i.e. $a_{ii} \neq 0 \forall i$, la méthode (2.1.5) s'écrit

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)x^{(k)} + \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}b \end{cases} \quad (2.3.13)$$

La matrice $R_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$ est appelée matrice de relaxation successive associée à A .

On peut donc écrire l'algorithme de la méthode de relaxation successive au niveau des composants:

La suite de vecteurs $x^{(k)}$ de composantes $(x_i^{(k)})$ est définie par $x^{(0)}$ quelconque et

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \omega b_i \right), 1 \leq i \leq n$$

Si $\tilde{x}^{(k+1)}$ est le vecteur donné par la méthode de Gauss-Seidel (2.3.2), alors la méthode de relaxation s'écrit:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} \quad (2.3.14)$$

C'est donc essentiellement une moyenne pondérée avec la méthode de Gauss-Seidel

- Si $\omega < 1$ on a la méthode de sous-relaxation
- Si $\omega > 1$ on a la méthode de sur-relaxation
- Si $\omega = 1$ on a la méthode de Gauss-Seidel.

Algorithme 2.3.3

- On donne le vecteur $x^{(0)}$ et ε .
- Faire

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), i = 1, 2, \dots$$

- Test d'arrêter si: $\| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n, k \geq 0$.

2.3.6 Convergence de la méthode de relaxation

Théorème 2.3.2 (condition nécessaire de convergence de la matrice de relaxation)

Soit $R_\omega = (D - \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega F]$. Le rayon spectral de la matrice de relaxation par points vérifie toujours l'inégalité

$$\rho(R_\omega) \geq |\omega - 1|, \omega \neq 0$$

Par conséquent, la méthode relaxation, par points, ne peut converger que si $\omega \in]0, 2[$

Démonstration. Le résultats est évident si $\omega = 1$. Lorsque $\omega \neq 1$ écrivons:

$$R_\omega = (D - \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega F].$$

La matrice $(D - \omega E)^{-1}$ est triangulaire inférieure de diagonale D^{-1} ,

la matrice $((1 - \omega)D + \omega F)$ est triangulaire supérieure de diagonale $(1 - \omega)D$, aussi

$$\det(R_\omega) = \det D^{-1} \det((1 - \omega)D) = (1 - \omega)^n$$

Comme $\det(R_\omega)$ est le produit des valeurs propre de R_ω on a: $|\det(R_\omega)| \leq \rho(R_\omega)^n$.

Ce qui prouve que

$$|1 - \omega| \leq \rho(R_\omega).$$

Pour que la méthode converge il faut que $\rho(R_\omega) < 1$. D'ou $|1 - \omega| < 1$. C'est -à-dire, $0 < \omega < 2$, Voir[3]. ■

Méthode de relaxation ou SSOR Après une étape de type SOR, on effectue une autre étape de même type mais en échangeant les rôles de E et F .

On obtient:

$$(D - \omega E)x^{(k+1)} = ((1 - \omega)D + \omega F)x^{(k)} + \omega b,$$

$$(D - \omega F)x^{(k+1)} = ((1 - \omega)D + \omega E)x^{(k+1)} + \omega b.$$

La dénomination SSOR vient de l'anglais symétrique over relaxation. On obtient l'itération suivante entre $x^{(k+1)}$ et $x^{(k)}$:

$$x^{(k+1)} = s_\omega x^{(k)} + \omega(2 - \omega)(D - \omega F)^{-1}D(D - \omega E)^{-1}b$$

avec

$$s_\omega = (D - F)^{-1}((1 - \omega)D + \omega E)(D - \omega E)^{-1}((1 - \omega)D + \omega F),$$

voir[2].

2.4 Comparais de méthode de Jacobi ,de Gauss-Seidel et relaxation

Le première concerne une comparaison la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Le second est un résultat de convergence qui concerne le cas particulier où la matrice A est de type tridiagonale symétrique définie positive.

Proposition 2.4.1 voir[1] *Les rayons spectraux des matrices d'iteration des méthodes de Jacobiet de Gauss-Seidel B_J et B_{GS} sont liées par la relation*

$$\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$$

Ainsi, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément. Dans le cas où elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement.

Proposition 2.4.2 voir[1] Soit A une matrice symétrique, définie positive tri-diagonale, alors les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation (pour $\omega \in]0, 2[$) convergent. De plus, il existe un et un seul paramètre de relaxation optimal ω_0 donné par

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J^2)}}$$

tel que

$$\rho(B_{R_{\omega_0}}) = \inf_{\omega} \rho(B_{R_{\omega}}) = \omega_0 - 1 < \rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2 < \rho(B_J).$$

Ce résultat découle de l'étude de la fonction $\varphi : \omega \in]0, 2[\rightarrow \rho(B_{R_{\omega}})$ qui a l'allure suivante

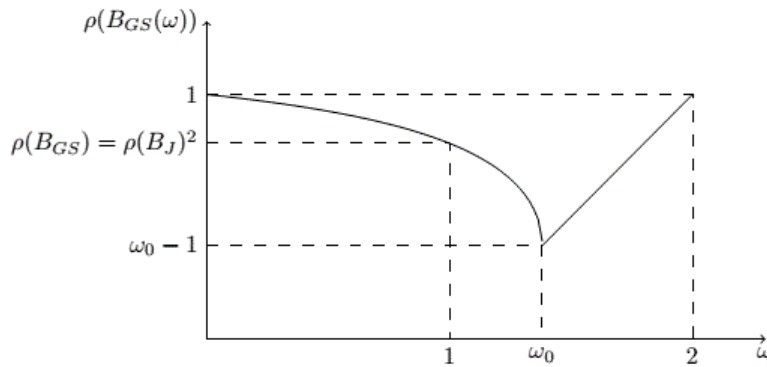


Figure 2.4.1 : Courbe de la fonction $\rho(R_{\omega})$ sur $[0, 2]$

avec

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + [1 - \rho(B_J)^2]^{1/2}}$$

Remarque 2.4.1 Les résultats précédents restent valables pour des matrices à coefficients complexes en remplaçant l'hypothèse A symétrique par A hermitienne.

Chapitre 3

Applications

Ce chapitre est consacré à l'application des méthodes itératives étudiées précédemment.

Dans chaque application on va insister sur les conditions de convergence des méthodes et la vitesse de convergence.

3.1 résolutions du système linéaires

3.1.1 1^{ère} application

Considérons le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 33 \end{cases}$$

Donc la forme matricielle est: $Ax=b$, x_0 et ε donnés

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_0 = (0 \ 0 \ 0)^T \\ \varepsilon = 10^{-5} \end{cases}$$

La matrice A est à diagonale strictement dominante, car la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i, 1 \leq i \leq n \quad \text{est vérifiée car } 10 > 2$$

alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergents.

On va d'abord résoudre ce système par la méthode de Jacobi.

Méthode de Jacobi

$$x_1^{(k+1)} = (15 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/10$$

$$x_2^{(k+1)} = (24 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)})/10$$

$$x_3^{(k+1)} = (33 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)})/10$$

Pour $k = 0$

$$x_1^{(1)} = (15 - 0 - 0)/10 = 1.5$$

$$x_2^{(1)} = (24 - 0 - 0)/10 = 2.4$$

$$x_3^{(1)} = (33 - 0 - 0)/10 = 3.3$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \|1.5, 2.4, 3.3\| = 3.3 > \varepsilon$$

Pour $k = 1$

$$x_1^{(2)} = 0.93$$

$$x_2^{(2)} = 1.92$$

$$x_3^{(2)} = 2.91$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \|0.57, 0.48, 0.39\| = 0.57$$

Pour $k = 2$

$$x_1^{(3)} = 1.017$$

$$x_2^{(3)} = 2.016$$

$$x_3^{(3)} = 3.015$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\| = \|0.087, 0.096, 0.105\| = 0.105 > \varepsilon$$

Pour $K = 3$

$$x_1^{(4)} = 0.9969$$

$$x_2^{(4)} = 1.9968$$

$$x_3^{(4)} = 2.9967$$

$$\|x^{(4)} - x^{(3)}\| = \|0.020, 0.019, 0.0183\| = 0.02 > \varepsilon$$

Pour $K = 4$

$$x_1^{(5)} = 1.00065$$

$$x_2^{(5)} = 2.000064$$

$$x_3^{(5)} = 3.00063$$

$$\|x^{(5)} - x^{(4)}\| = \|3.75 \cdot 10^{-3}, 3.84 \cdot 10^{-3}, 3.93 \cdot 10^{-3}\| = 3.93 \cdot 10^{-3} > \varepsilon$$

Pour $K = 5$

$$x_1^{(6)} = 0.999873$$

$$x_2^{(6)} = 1.999872$$

$$x_3^{(6)} = 2.999871$$

$$\|x^6 - x^5\| = \|7.77 \cdot 10^{-4}, 1.92 \cdot 10^{-4}, 7.59 \cdot 10^{-4}\| = 7.77 \cdot 10^{-4} > \varepsilon$$

Pour $K = 6$

$$x_1^{(7)} = 1.000026$$

$$x_2^{(7)} = 2.000026$$

$$x_3^{(7)} = 3.000026$$

$$\|x^{(7)} - x^{(6)}\| = \|1.53 \cdot 10^{-4}, 1.54 \cdot 10^{-4}, 1.55 \cdot 10^{-4}\| = 1.55 \cdot 10^{-4} > \varepsilon$$

Pour $K = 7$

$$x_1^{(8)} = 0.999995$$

$$x_2^{(8)} = 1.99999$$

$$x_3^{(8)} = 2.999995$$

$$\|x^{(8)} - x^{(7)}\| = \|3.1 \cdot 10^{-5}, 3.1 \cdot 10^{-5}, 3.1 \cdot 10^{-5}\| = 3.1 \cdot 10^{-5} > \varepsilon$$

Pour $K = 8$

$$x_1^{(9)} = 1.000001$$

$$x_2^{(9)} = 2.000001$$

$$x_3^{(9)} = 3.000001$$

$$\|x^{(9)} - x^{(8)}\| = \|6 \cdot 10^{-6}, 6 \cdot 10^{-6}, 6 \cdot 10^{-6}\| = 6 \cdot 10^{-6} < \varepsilon$$

la solution $(1, 2, 3)^t$.

On va maintenant résoudre le même système mais cette fois en utilisant la méthode Gauss-Seidel.

Méthode de Gauss-Seidel

Pour $K = 0$

$$x_1^{(1)} = (15 - (0) - (0))/10 = 1.5$$

$$x_2^{(1)} = (24 - (1.5) - (0))/10 = 2.25$$

$$x_3^{(1)} = (33 - (1.5) - (2.25))/10 = 2.925$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \|1.5, 2.25, 2.925\| = 2.925 > \varepsilon$$

Pour $K = 1$

$$x_1^{(2)} = 0.9825$$

$$x_2^{(2)} = 2.00925$$

$$x_3^{(2)} = 3.000825$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \|0.5175, 0.24075, 0.075825\| = 0.5175 > \varepsilon$$

Pour $k = 2$

$$x_1^{(3)} = 0.998993$$

$$x_2^{(3)} = 2.000018$$

$$x_3^{(3)} = 3.000099$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\| = \|0.016493, 9.2232 \cdot 10^{-3}, 7.26 \cdot 10^{-4}\| = 0.016493 > \varepsilon$$

Pour $K = 3$

$$x_1^{(4)} = 0.999999$$

$$x_2^{(4)} = 1.999991$$

$$x_3^{(4)} = 3.000002$$

$$\|x^{(4)} - x^{(3)}\| = \|9.95 \cdot 10^{-4}, 2.7 \cdot 10^{-4}, 9.7 \cdot 10^{-4}\| = 9.95 \cdot 10^{-4} > \varepsilon$$

Pour $K = 4$

$$x_1^{(5)} = 1.000001$$

$$x_2^{(5)} = 2.000001$$

$$x_3^{(5)} = 3.000001$$

$$\|x^{(5)} - x^{(4)}\| = \|0.2 \cdot 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-6}\| = 0.2 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$$

La solution $(1, 2, 3)^t$.

La solution est trouvée à partir de la 8^{ème} itération pour Jacobi mais seulement en 4^{ème} itération pour la méthode de Gauss-Seidel.

3.1.2 2^{ème} application

Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

a la solutions $(3, 4, -5)^t$. on va comparer les itérations a' partir de la méthode de Gauss-Seidel et celle de SOR avec $w = 1.25$ en utilisant $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ pour les deux méthodes.

Solution: Pour chaque $k = 1, 2, \dots$, les équations de Gauss-Seidel sont

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.75x_2^{(k-1)} + 6, \\ x_2^{(k)} &= -0.75x_1^{(k)} + 0.25x_3^{(k-1)} + 7.5, \\ x_3^{(k)} &= 0.25x_2^{(k)} - 6, \end{aligned}$$

et les équation de la méthode de SOR avec $w = 1, 25$ sont

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5, \\ x_2^{(k)} &= 0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 9.375, \\ x_3^{(k)} &= 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5, \end{aligned}$$

les premières sept itérations pour chaque méthode sont listées dans les tableaux 1 et 2. Pour les itérations afin d'être précisées a six décimales , la méthode de Gauss-Seidal a besion de 34 itérations .par oppositions a 14 itérations pour la méthode de la SOR avec $w = 1.25$.

Tableaux 1

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	5.25000	3.140625	3.087890	3.054931	3.034332	3.021457	3.013411
$x_2^{(k)}$	1	3.81250	3.882812	3.926757	3.954223	3.971389	3.982118	3.988824
$x_3^{(k)}$	1	-5.04687	-5.029296	-5.018310	-5.011444	-5.007152	-5.004470	-5.002794

Tableaux2

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.622314	3.133302	2.957051	3.003721	2.996327	3.000049
$x_2^{(k)}$	1	3.519531	3.958526	4.010264	4.007483	4.002925	4.000926	4.000258
$x_3^{(k)}$	1	-6.650146	-4.600423	-5.096686	-4.973489	-5.005713	-4.998282	-5.000348

Cette application nous donne une idée claire sur la vitesse de convergence de la méthode de relaxation par rapport à la méthode de Gauss-Seidel.

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons étudiés les méthodes itératives pour la résolution du système d'équations linéaires.

Finallement on a étudié quelques applications concernant la résolution du système linéaire en utilisant les méthodes itératives en tenant compte de la vitesse de convergence.

Bibliographie

- [1] A.Eljai;Élément d'analyse Numérique; Presses Universitaires de Perpignan. Saint-Estève.2003.
- [2] Alfio Quarteroni Ricardo & Sacco Fausto Saleri; Méthodes Numériques; Algorithmes, analyse et applications. Springer-Verlag Italia, Milano.2004.
- [3] Luca amoudei,jean-Piere dedieu; Analyse Numérique Matricielle ; Dunod. Paris.2008.
- [4] Mustapha LAKRIB, Cours D'analyse Numérique. Office Des Publications Universitaires Alger,(2005).
- [5] M. Boumahrat, A.Gourdin;Méthodes Numériques Appliquées; Office des Publications Universitaires.10-1993.
- [6] P.G. Ciarlet;Introduction à L'Analyse Numérique Matricielle et à l'optimisation; Masson Paris Milan Barcelone Mexico.1988.
- [7] <http://www.moodle.utc.fr/file.php/665/MT09-ch4.pdf>.

Résumé:

Dans ce travail , nous avons étudiés la résolution numérique d'une système d'équations linéaires ,en utilisant les méthodes itératives. Avec la mise en évidence du vitesse de convergence.

Finalemnt, en a étudié quelques applications concernant la résolution d'une système linéaire.

Mots clés: matrice, système d'équations linéaire, méthodes itératives.

Abstract:

In this work, we studied the resolutions of a digital system of linear equations with iterative methods setting evidenced convergence rate.

Finally, we studied some applications concerning the resolution of a linear system

ملخص:

تم التطرق في هذا العمل إلى الحل العددي لجمل معادلات خطية باستعمال بعض الطرق التكرارية مع المقارنة بينهما (أخذين في الاعتبار سرعة التقارب)

أخيرا قدمنا بعض التطبيقات المتعلقة بحل جمل معادلات خطية.