

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

En Mathématique

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Par :

MAIZA MATERA

ZEGHDOUD LOUIZA

Thème :

Méthode de sur et sous-solutions dans l'étude
des équations différentielles fractionnaires

Soutenue publiquement le : 21/06/2021 Devant le jury composé de :

Dr. Nisse Khadidja	MCA	Encadreur	Univ. d'El-Oued
Dr. Touati brahim Mohammed said	MCB	Président	Univ. d'El-Oued
Dr. Douadi Najet	MCB	Examineur	Univ. d'El-Oued

Année universitaire : 2020 \ 2021

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail :

A le père cher.

A la mère chère.

A les frères et sœurs.

A tous la famille.

A tous les amis.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier "**Dieu**" le tout puissant et miséricordieux qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

En deuxième lieu, nous tenons à remercier notre encadreur : **Dr.Nisse Khadidja** pour ses appréciations compétentes, ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nous remercions vivement nos familles **Zeghdoud, Maiza** et **Hadj Sad** pour leur aide matérielle et morale durant toute la période de préparation.. Nous tenons également à exprimer notre gratitude envers tous les Enseignants et le personnel administratif d'université de **Chahid Hamma Lakhdar El-Oued** qui ont contribué à notre formation et à l'élaboration de ce présent travail.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Notations	1
Introduction	2
1 Préliminaires	4
1.1 Espaces des fonctions	4
1.1.1 Espace des fonctions intégrables	4
1.1.2 Espaces des fonctions continues	4
1.1.3 Espace des fonctions continues par morceaux	5
1.1.4 Fonctions absolument continues	5
1.2 Rappel de quelques notions de l'analyse fonctionnelle	6
1.3 Intégrale et dérivées fractionnaires	8
1.3.1 Fonctions spéciales	8
1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	10
1.3.3 Dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville	13
1.3.4 Dérivée fractionnaire de Caputo	15
2 Points fixes des opérateurs dans des espaces de Banach ordonnés et application aux EDF	19
2.1 Espaces de Banach ordonnés	19
2.2 Points fixes des opérateurs monotones	22
2.2.1 Opérateurs monotones	22
2.2.2 Sur-solutions et sous-solutions	23
2.2.3 Théorème de point fixe	23
2.3 Application aux équations différentielles fractionnaires	24
3 Méthode des itérations monotones appliquée à un problème impulsif d'ordre fractionnaire	28
3.1 Notations et Position du problème	28
3.2 Problème linéaire associé et hypothèses	29
3.3 Résultat d'existence	33
Bibliographie	38

Notations

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels .
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels.
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
$C^n([a, b])$	L'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n continues sur $[a, b]$.
$AC([a, b])$	Espace de fonctions absolument continues sur $[a, b]$.
$PC([a, b])$	Espace de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.
$L^p([a, b])$	L'espace des fonctions p^{me} intégrables sur $[a, b]$.
$\Gamma(\cdot)$	La fonction Gamma d'Euler.
$B(\cdot, \cdot)$	La fonction Bêta.
$E_{n_1, n_2}(\cdot)$	La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.
$E_n(\cdot)$	La fonction de Mittag Leffler à un seul paramètre.
D^n	La dérivation d'ordre entier.
${}^R D_a^\alpha$	La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α .
${}^C D_a^\alpha$	La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α .
I_a^α	L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α .
$PC(\cdot, \cdot)$	L'espace des fonctions continues par morceaux.
EDF	Equations Différentielles Fractionnaires.

Introduction

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations différentielles et intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées [1]. D'où l'intérêt particulier porté sur les équations différentielles fractionnaires pendant ces dernières décennies .

L'une des méthodes de l'analyse non linéaire employée dans l'étude de l'existence des solutions pour les équations différentielles est la méthode des sur et sous-solutions. C'est un outil qui permet de s'assurer de l'existence d'une solution du problème considéré située entre une sous-solution et une sur-solution, c'est-à-dire qu'il nous informe sur l'existence et la localisation des solutions .

Ainsi, la question de trouver une solution du problème considéré est remplacé par celle de trouver deux fonctions bien ordonnées que satisfont à des inégalités convenables [16].

Dans ce mémoire, nous traitons la méthode des sous et sur-solutions dans l'étude de la question d'existence des solutions pour les équations différentielles fractionnaires.

Ce mémoire se compose de trois chapitres répartis comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions, propriétés et théorèmes de l'analyse fonctionnelle dont on a besoin dans la suite de ce travail. L'intégration et la dérivation fractionnaire sont aussi introduites dans ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, on va introduire les espaces de Banach partiellement ordonnés : l'ordre dans cette structure est défini à partir d'un cône d'ordre. L'une des versions de la théorie du point fixe dans ces espaces pour une classe d'opérateurs monotones est présenté.

Comme application, des résultats d'existence de solutions positives pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est prouvé.

Dans le troisième chapitre, on va considéré un problème impulsif à valeurs aux limites périodiques d'ordre α ($0 < \alpha < 1$) au sens de Caputo.

Un problème similaire qui correspond à l'ordre entier $\alpha = 1$ a été étudié dans [14] par la méthode de sur et sous-solutions. Dans ce chapitre nous allons reproduire la démarche employée dans [14] pour construire des solutions extrémales du problème fractionnaire considéré.

Préliminaires

1.1 Espaces des fonctions

1.1.1 Espace des fonctions intégrables

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 1.1. [1]

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note par $L^p[a, b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p -intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} :

$$L^p([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mesurable, et } \|f\|_{L^p} < \infty\};$$

avec

$$\|f\|_{L^p([a, b])} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p[a, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach.

1.1.2 Espaces des fonctions continues

Définition 1.2. [1]

Soit $\Omega = [a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et soit $n \in \mathbb{N}$. On note par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles n fois continument dérivables sur Ω , muni de la norme

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|. \quad (1.1)$$

Pour $n = 0$ on note $C^0([a, b])$ par $C([a, b])$ (l'espace des fonctions continues) et on note $\|\cdot\|_{C^0(\Omega)}$ par $\|\cdot\|_{\infty}$ c'est-à-dire :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Théorème 1.1. [1, 8]

L'espace $C^n([a, b])$ muni de la norme (1.1) est un espace de Banach.

1.1.3 Espace des fonctions continues par morceaux

Définition 1.3. [15]

Soient $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui satisfait $t_k < t_{k+1}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, J un intervalle fermé de \mathbb{R} .

On note par $PC(J, \mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui vérifient :

1. ψ est continue pour tout $t \in J$ tel que $t \neq t_k$.
2. ψ est continue à gauche pour tout $t \in J$.
3. ψ possède une discontinuité de première espèce pour tout $t_k \in J$.

De même, on dit que $\psi \in PC^1(J, \mathbb{R}^n)$, si ψ et ψ' appartiennent à $PC(J, \mathbb{R}^n)$.

La remarque suivante, résulte directement de la définition précédente.

Remarque 1.1.

Avec les notations introduite dans la Définition 1.3, $\psi \in PC(J, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si :

- i) Pour chaque t_k tel que $]t_k, t_{k+1}[\subset J$, $\psi \in C(]t_k, t_{k+1}[, \mathbb{R}^n)$
- ii) Pour chaque $t_k \in J$, les deux limites suivantes (la limite à droite et la limite à gauche) :

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \psi(t) \doteq \psi(t_k^-) \quad \lim_{t \rightarrow t_k^+} \psi(t) \doteq \psi(t_k^+)$$

existent et de plus $\psi(t_k^-) = \psi(t_k)$.

Théorème 1.2. [15]

L'espace $PC(J, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|x\|_{PC} \doteq \sup\{|x(t)|, \quad t \in J\}, \quad x \in PC(J, \mathbb{R}^n),$$

est un espace de Banach.

1.1.4 Fonctions absolument continues

Soit maintenant $[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) un intervalle fini.

Définition 1.4. [1, 2]

On note par $AC[a, b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables i.e :

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt. \quad (\varphi(t) \in L(a, b)).$$

Ainsi, toute fonction f absolument continue possède une dérivée sommable $f' = \varphi$, presque partout sur $[a, b]$, et donc $c = f(a)$.

Définition 1.5. [1, 2]

On note par $AC^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'espace des fonctions f définies sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$ i.e.

$$AC^n([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}.$$

Remarque 1.2. [1, 2]

On a $AC^1([a, b]) = AC([a, b])$.

1.2 Rappel de quelques notions de l'analyse fonctionnelle

Définition 1.6. [10]

Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique et \mathcal{H} une partie de Y^X .

1. On dit que \mathcal{H} est équicontinue en un point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.
2. On dit que \mathcal{H} est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X .

Définition 1.7. (uniformément borné) [9]

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$. On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq C \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.8. [13]

Soit (E, d) un espace métrique et $F \subseteq E$. L'ensemble F est dit relativement compact dans E si la fermeture de F est une partie compacte de E

Définition 1.9. (opérateur compact) [9]

Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que $A : E \rightarrow F$ est un opérateur compact si l'image d'un sous ensemble borné de E par A est un ensemble relativement compact de F ; c'est-à-dire, c'est un ensemble ayant la fermeture compacte en F .

Définition 1.10.

Soit $A : E \rightarrow E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de A si : $A(x) = x$.

Définition 1.11. [15]

Soit $\mathcal{F} \subset PC(J, \mathbb{R}^n)$, on dit que l'ensemble \mathcal{F} est quasi-équicontinu dans J si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{F}$, et tout $\tau_1, \tau_2 \in]t_k, t_{k+1}] \cap J$, si $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$, alors

$$|x(\tau_1) - x(\tau_2)| < \epsilon.$$

Théorème du point fixe de Schauder**Théorème 1.3.** [8, 13]

(E, d) un espace de Banach, soit U une partie convexe et fermée de E , et soit $A : U \rightarrow U$ une application telle que l'ensemble $\{Au : u \in U\}$ est relativement compacte dans E . Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème du point fixe de Banach**Théorème 1.4.** [8]

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, et $A : X \rightarrow X$ un opérateur contractant $c - \grave{a} - d$:

$$0 \leq k < 1 : \quad \|Ax - Ay\|_X \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X.$$

Alors, A admet un point fixe unique, i.e

$$\exists! u \in X \text{ tel que } Au = u.$$

Théorème d'Arzela-Ascoli**Théorème 1.5.** [8, 13]

Soit $F \subseteq C[a, b]$ supposons que les ensembles sont équipées de la norme de Chebyshev. Alors, F est relativement compact dans $C[a, b]$, si F est équicontinue (c-à-d pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et tout $x, x^* \in [a, b]$ avec $|x - x^*| < \delta$ on a $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon$) et uniformément bornée (c-à-d il existe une constante $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq C$ pour tout $f \in F$).

La version du théorème d'Arzela-Ascoli dans l'espace $PC(J, \mathbb{R}^n)$, est donné par le théorème suivant

Théorème 1.6. [15]

L'ensemble $\mathcal{F} \subset PC(J, \mathbb{R}^n)$ est relativement compact si et seulement si :

1. \mathcal{F} est uniformément borné, c'est-à-dire $\|x\| \leq c$ pour chaque $x \in \mathcal{F}$ et certains $c > 0$.
2. \mathcal{F} est quasi-équicontinu dans J .

1.3 Intégrale et dérivées fractionnaires

1.3.1 Fonctions spéciales

La fonction Gamma

Définition 1.12. [1, 2, 8]

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction Gamma est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (1.2)$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$).

Propriétés 1.1. [1, 2, 8]

Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (1.3)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (1.4)$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad (1.5)$$

cas particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1. \quad (1.6)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.7)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}. \quad (1.8)$$

La fonction Bêta

Définition 1.13. [1, 2, 8]

Soient $x, y > 0$, la fonction Bêta est la fonction définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (1.9)$$

Proposition 1.1. [1, 2, 8]

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante

$$\forall x, y > 0, \text{ on a : } B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.10)$$

Propriétés 1.2. [12]

1. $B(a, b) = B(b, a)$
2. $aB(a, b+1) = bB(a+1, b)$
3. Si $n = b + 1$ est un entier, ce la donne une relation de récurrence

$$B(a+1, b) = \frac{n-1}{a} B(a+1, n-1)$$

4. $B(a, 1) = \frac{1}{a}$
5. Si $a = m$ et $b = n$, on obtient

$$B(m, n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une fonction importante dans le calcul fractionnaire. Son rôle est analogue à celui joué par la fonction exponentielle dans le cas du calcul entier. Elle généralise la fonction exponentielle au calcul fractionnaire.

Définition 1.14. [8]

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n > 0$, la fonction E_n est définie par

$$E_n(x) := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{\Gamma(jn + 1)}. \quad (1.11)$$

chaque fois que la série converge. Elle est appelée fonction de Mittag-Leffler d'ordre n .

On remarque que E_1 est l'exponentielle usuelle :

$$E_1(x) = \exp(x).$$

Définition 1.15. [8]

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n_1, n_2 > 0$, la fonction E_{n_1, n_2} est définie par :

$$E_{n_1, n_2}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(jn_1 + n_2)}.$$

chaque fois que la série converge. Elle est appelée fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

Remarque 1.3. [8]

Il est évident que les fonctions de Mittag-Leffler à un paramètre peuvent être définies en fonction de leurs équivalents à deux paramètres via la relation

$$E_n(x) = E_{n,1}(x).$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

L'intégration d'ordre fractionnaire est une généralisation de la notion de l'intégration d'ordre entier. La définition de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville se base sur la formule de Cauchy qui calcule n fois l'intégrale répétée d'une fonction causale $t \rightarrow f(t)$

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \quad (1.12)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbf{N}^*). \quad (1.13)$$

Définition 1.16. [1, 2]

L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in L^1[a, b]$ est donnée par

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad x > a. \quad (1.14)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma donnée par (1.2).

Exemple 1.1.

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$, alors :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt. \quad (1.15)$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

alors (1.15) devient

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a - (x-a)y)^{\alpha-1} [a + (x-a)y - a]^\beta (x-a) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1} (x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy. \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.9) puis de la relation (1.10) on

arrive à :

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Théorème 1.7. [7]

Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a, b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Démonstration

En introduisant la définition (1.14) puis on utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)| dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| (b-t)^\alpha dt \\ &\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a, b])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat désiré.

Théorème 1.8.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et $\alpha > 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (I^\alpha f)(x) = 0$$

.

Démonstration

on a :

$$\begin{aligned} |(I^\alpha f)(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha. \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers a ($\alpha > 0$), on obtient le résultat.

Proposition 1.2. [1, 2]

Soit $f \in C([a, b])$. pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a

$$(i) \quad I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

$$(ii) \quad I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t).$$

Démonstration

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in C([a, b])$.

Pour (i) ; la démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Beta.

En effet,

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

En vertu du théorème (1.7), les intégrales figurant dans l'égalité précédente existent pour presque tout $x \in [a, b]$, et le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds \right) d\tau. \quad (1.16)$$

En posant :

$$x = \frac{s-\tau}{t-\tau}.$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\beta-1} ds &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta). \\ &= (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En remplaçant (1.17) dans (1.16), on aura :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau = I_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

d'où le résultat .

Maintenant pour démontrer (ii) , à l'aide de la propriété précédente (i) alors être,

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^{\beta+\alpha} f(t) = I_a^\beta I_a^\alpha f(t).$$

1.3.3 Dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.17. [1, 2]

La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} est donnée par

$$(D_a^\alpha f)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(t) \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $t > a$.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$(D_a^0 f)(t) = I_a^0 f(t) = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$(D_a^n f)(t) = f^{(n)}(t).$$

Exemple 1.2.

La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$, alors on a :

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha+1) \Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors,

$$D_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Lemme 1.1. [1]

Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f(t) \in AC^n[a, b]$. Alors la dérivé fractionnaire $D_a^\alpha f$ existe pour presque tout t dans $[a, b]$ et elle est représenté sous la forme

$$(D_a^\alpha f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds.$$

Proposition 1.3. [1, 7]

Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n, m-1 \leq \beta < m$, alors

1. Pour $f \in L^1([a, b])$, l'égalité :

$$D_a^\alpha (I_a^\alpha f(x)) = f(x)$$

est vrai pour presque tout $x \in [a, b]$.

2. Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$, la relation :

$$D_a^\beta (D_a^\alpha f)(x) = (I_a^{\alpha-\beta} f)(x)$$

est vrai presque partout sur $[a, b]$.

3. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x).$$

4. Si $f \in L^1([a, b])$ et $I^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$ avec $n = [\Re(\alpha) + 1]$, alors :

$$[I_a^\alpha (D_a^\alpha f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x)$$

Preuve

En utilisant la définition (1.18) et la proposition (1.2) on obtient :

1.

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (I_a^\alpha f(x)) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{n-\alpha} (I_a^\alpha f)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^{n-\alpha+\alpha} f)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_a^n f)(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3. Pour $\beta \geq \alpha > 0$ on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\beta} (I_a^\alpha f)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-\beta+\alpha} f)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_a^{n-(\beta-\alpha)} f)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{\beta-\alpha} f(x). \end{aligned}$$

1.3.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.18. [1]

La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ de Caputo d'une fonction f définie sur $[a, b]$ est donnée par

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right), \quad (1.19)$$

où

$$n = [\alpha] + 1, \quad \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \text{ et } n = \alpha \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \quad (1.20)$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, la relation (1.19) prend la forme

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = D_a^\alpha ([f(t) - f(a)]).$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo (1.19) et celle de Riemann-Liouville (1.18) existent, alors elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = (D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\alpha] + 1). \quad (1.21)$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$, on a

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = (D_a^\alpha f)(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \quad (1.22)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuelle $f^{(n)}(t)$ existe, alors $({}^c D_a^\alpha f)(t)$ coïncide avec $f^{(n)}(t)$ i.e

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}(t). \quad (1.23)$$

La dérivée fractionnaire de Caputo (1.19) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée de Riemann-Liouville (1.18) existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions $f(t) \in AC^n[a, b]$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.9. [1]

Soit $\alpha \geq 0$ et soit n donné par (1.20). Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo $({}^c D_a^\alpha f)(t)$ existe presque partout sur $[a, b]$.

(a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors $({}^c D_a^\alpha f)(t)$ est donnée par

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{(n - \alpha - 1)} f^{(n)}(s) ds \quad (1.24)$$

$$= I_a^{n - \alpha} D^n f(t). \quad (1.25)$$

Pour prendre le relais lorsque $D = d/dx$ et $n = [\alpha] + 1$.

En particulier $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC[a, b]$, alors

$$({}^c D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} f'(s) ds. \quad (1.26)$$

$$= I_a^{1 - \alpha} f'(t).$$

(b) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors $({}^c D_a^\alpha f)(t) = f^{(n)}$.

Exemple 1.3.

La dérivée de $f(t) = (t - a)^\beta$ au sens de Caputo.

Soit α un entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ avec $\beta > n - 1$, alors, on a

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - n}$$

En appliquant l'équation (1.21) et le Lemme 1.1, on trouve

$${}^c D_a^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^c D^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau. \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.2. [1]

Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^\infty[a, b]$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$ alors,

$$({}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t). \quad (1.27)$$

Preuve. Par (1.25) et l'utilisation de la Proposition 1.2, donne

$$\begin{aligned}
({}^c D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) &= \left(I_a^{n - \alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^\alpha f \right)(x) \\
&= \left(I_a^{n - \alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^n I_a^{2\alpha - \alpha + n - n} f \right)(x) \\
&= \left(I_a^{n - \alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha I_a^{n - \alpha} I_a^{2\alpha - n} f \right)(x) \\
&= \left(I_a^{n - \alpha} \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha I_a^\alpha I_a^{\alpha - n} f \right)(x) \\
&= (I_a^{n - \alpha} I_a^{\alpha - n} f)(x) \\
&= (I_a^0 f)(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Proposition 1.4. [1, 8]

1. Si ${}^c D_a^\alpha f = 0$ alors $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x - a)^j$.
2. $I_a^\alpha [{}^c D_a^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{i=0}^m \frac{(x - a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$.

Théorème 1.10.

Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Caputo existent, pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors : ${}^C D^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe, et on a :

$${}^C D_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^C D_a^\alpha f(t) + \mu {}^C D_a^\alpha g(t).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= I_a^\alpha D^n(\lambda f(t) + \mu g(t)) \\ &= I_a^\alpha(D^n \lambda f(t) + D^n \mu g(t)) \\ &= I_a^\alpha(\lambda D^n f(t) + \mu D^n g(t)) \\ &= I_a^\alpha \lambda D^n f(t) + I_a^\alpha \mu D^n g(t) \\ &= \lambda I_a^\alpha D^n f(t) + \mu I_a^\alpha D^n g(t) \\ &= \lambda {}^C D_a^\alpha f(t) + \mu {}^C D_a^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Points fixes des opérateurs dans des espaces de Banach ordonnés et application aux EDF

2.1 Espaces de Banach ordonnés

Définition 2.1. [11]

Soit C un sous-ensemble dans l'espace de Banach X . On dit que C est un cône si :
Pour tout $x \in C$ et tout $a > 0$ alors $ax \in C$.

Définition 2.2. [11]

Soit X un espace de Banach et \mathcal{K} un sous-ensemble non vide de X . On dit que \mathcal{K} est un cône d'ordre, si

- (1) \mathcal{K} est fermé, et $\mathcal{K} \neq \{0\}$;
- (2) $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, x, y \in \mathcal{K}$ implique $ax + by \in \mathcal{K}$;
- (3) $x \in \mathcal{K}$ et $-x \in \mathcal{K}$ implique $x = 0$.

Remarque 2.1. [11]

- (i) La Condition (2) dans la Définition 2.2 équivaut à dire que \mathcal{K} est convexe, et si $x \in \mathcal{K}$ et $a \geq 0$, alors $ax \in \mathcal{K}$.
- (ii) La Définition 2.2 nous permet de définir dans X les relation d'ordre suivantes

$$\begin{aligned}
 x \leq y &\iff y - x \in \mathcal{K}, \\
 x < y &\iff x \leq y \text{ et } x \neq y, \\
 x \ll y &\iff y - x \in \text{int}(\mathcal{K}).
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

En effet, pour la première relation on a :

Réflexivité

Pour tout $x \in X$ on a $x - x = 0 \in \mathcal{K}$ et par suite $x \leq x$.

Anti-symétrie

Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $y - x \in \mathcal{K}$ et $x - y \in \mathcal{K}$ donc,

$$y - x \in \mathcal{K} \quad \text{et} \quad -(y - x) \in \mathcal{K}.$$

ainsi d'après la propriété (3) dans la Définition 2.2

$$y - x = 0 \quad \text{et par suite} \quad x = y.$$

Transitivité

Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors :

$$y - x \in \mathcal{K} \quad \text{et} \quad z - y \in \mathcal{K}.$$

donc d'après la propriété (2) dans la Définition 2.2 on a :

$$2\left[\frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(z - y)\right] \in \mathcal{K}.$$

ainsi $z - x \in \mathcal{K}$.

Ce qui est équivalent à $x \leq z$.

De même, on peut montrer que les deux autres relation définissent un ordre sur X .
L'ensemble

$$\langle x, y \rangle = \{z \in X : x \leq z \leq y\}.$$

est appelé un intervalle dans X . Notons que

$$x \geq y \quad \text{signifie} \quad x - y \in \mathcal{K}.$$

et de même pour " $>$ " et " \gg ".

Définition 2.3. [11]

- (i) Tout espace de Banach muni d'un cône d'ordre est appelé espace de Banach ordonné.
- (ii) chaque cône d'ordre est un cône, mais l'inverse n'est pas vrai en général (voir Exemple 2.2).

Exemple 2.1.

Soit $X = \mathbb{R}^N$ on pose

$$\mathbb{R}^{N,+} = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N : \xi_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N\}.$$

Alors $\mathcal{K} = \mathbb{R}^{N,+}$ est un cône d'ordre, (représenter dans Figure 2.1).

Nous avons,

$$\begin{aligned} (\xi_1, \dots, \xi_N) \leq (\eta_1, \dots, \eta_N) & \quad \text{si et seulement si} \quad \xi_i \leq \eta_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \\ (\xi_1, \dots, \xi_N) \ll (\eta_1, \dots, \eta_N) & \quad \text{si et seulement si} \quad \xi_i < \eta_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

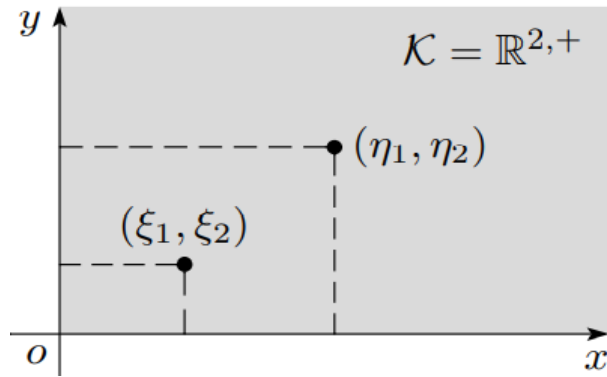


FIGURE 2.1: cône d'ordre

Exemple 2.2.

L'ensemble C de la Figure 2.2 est un cône dans \mathbb{R}^2 , mais il ne s'agit pas d'un cône d'ordre.

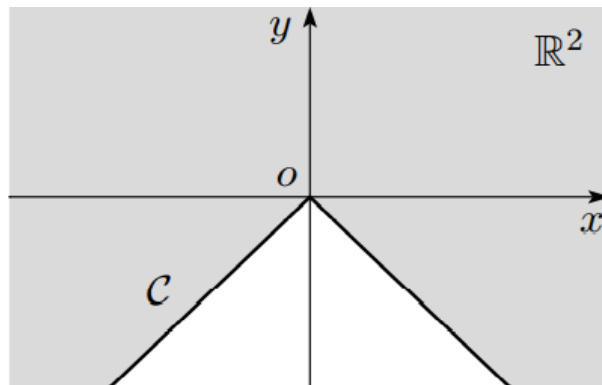


FIGURE 2.2: cône

Proposition 2.1. [11]

Soit X un espace de Banach ordonné

Pour tous $u, x, x_n, y, y_n, z \in X$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 x \leq y \quad \text{et} \quad 0 < a < b &\implies ax \leq by, \\
 x \leq y \quad \text{et} \quad u \leq z &\implies x + u \leq y + z \quad \text{et} \\
 x_n \leq y_n \quad \text{pour tous } n &\implies \lim_{\rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{\rightarrow +\infty} y_n
 \end{aligned}$$

à condition que les limites existent. Pour le symbole " \ll ", les implications suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}
 x \ll y \quad \text{et} \quad y \leq z &\implies x \ll z, \\
 x \leq y \quad \text{et} \quad y \ll z &\implies x \ll z, \\
 x \ll y \quad \text{et} \quad a > 0 &\implies ax \ll ay.
 \end{aligned}$$

Remarque 2.2.

On déduit de la Proposition 2.1, que l'ordre défini sur X est compatible avec sa structure vectoriel.

Définition 2.4. [11]

Un cône d'ordre \mathcal{K} d'un espace de Banach X est dit normale, s'il existe un nombre positif c tel que : pour tout $x, y \in X$ et $0 \leq x \leq y$, alors :

$$\|x\| \leq c\|y\|. \tag{2.2}$$

La plus petite constante c qui vérifie (2.2), s'appelle la constante normale de \mathcal{K} .

Exemple 2.3.

Pour $X = \mathbb{R}^N$, $K = \mathbb{R}^{N,+}$ est un cône d'ordre normale dans \mathbb{R}^N .

Proposition 2.2.

Le cône d'ordre \mathcal{K} est normal, si et seulement si, pour toutes suites $\{x_n\}_{n \geq 1}$ et $\{y_n\}_{n \geq 1}$ dans X telles que $0 \leq x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \implies x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Lemme 2.1. [11]

Si un cône d'ordre est normal, alors chaque intervalle $\langle x, y \rangle$ est borné dans X .

Preuve

Si $x \leq w \leq y$, alors $0 \leq w - x \leq y - x$, et donc

$$\|w\| \leq \|w - x\| + \|x\| \leq c\|y - x\| + \|x\|.$$

2.2 Points fixes des opérateurs monotones

2.2.1 Opérateurs monotones

Définition 2.5. [11]

Soient X et Y deux espaces de Banach ordonnés. Un opérateur $A : \text{Dom}A \subset X \rightarrow Y$ est dit monotone croissant si

$$x < y \quad \text{implique} \quad A(x) \leq A(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \text{Dom} A.$$

On dit qu'un opérateur A est strictement ou fortement monotone si le symbole " \leq " est remplacé par " $<$ " ou " \ll ", respectivement.

De même, nous définissons (strictement, fortement) opérateur décroissant monotone. L'opérateur A est dit positif si $A(0) \geq 0$ et pour tout $x \in \text{Dom}A$,

$$x > 0 \quad \text{implique} \quad A(x) \geq 0.$$

Comme ci-dessus, l'opérateur est strictement ou fortement positif si le symbole " \geq " est remplacé par " $>$ " ou " \gg ", respectivement.

Exemple 2.4.

Pour un opérateur linéaire A , les notions de positif monotone croissant coïncident. En effet, soit A positif, par exemple. On a alors la suite d'implications suivante :

$$\begin{aligned} x < y &\implies 0 < y - x \implies 0 \leq A(y - x) \\ &\implies 0 \leq A(y) - A(x) \implies A(x) \leq A(y) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que A est monotone croissante.

2.2.2 Sur-solutions et sous-solutions

Soient X et Y deux espaces de Banach ordonnés, on définit l'opérateur $A : Dom A \subset X \rightarrow Y$ telle que $Au = v$.

Définition 2.6. [11]

On appelle sous-solution pour l'opérateur A , toute fonction $u \in X$ vérifiant :

$$u(t) \leq (Au)(t).$$

On appelle sur-solution pour le l'opérateur A , toute fonction $v \in X$ vérifiant :

$$v(t) \geq (Av)(t).$$

2.2.3 Théorème de point fixe

Théorème 2.1. [3, 4]

Soient \mathcal{K} un cône d'ordre dans un espace de Banach X , D un sous ensemble de \mathcal{K} et $F : D \rightarrow X$ un opérateur monotone croissant.

On suppose qu'il existe $x_0, y_0 \in D$ tels que $x_0 \leq y_0$, $\langle x_0, y_0 \rangle \subset D$ et x_0, y_0 sont respectivement une sous-solution et une sur-solution de l'opérateur F .

Si \mathcal{K} est un cône normale et F est un opérateur compact et continue, alors l'équation $x - F(x) = 0$ admet un solution dans $\langle x_0, y_0 \rangle$.

2.3 Application aux équations différentielles fractionnaires

On considère l'équation différentielle fractionnaire non linéaire étudié par S.Zhang dans [3]

$$D^\alpha u = f(t, u); 0 \leq t \leq 1 \quad (2.3)$$

où $0 < \alpha < 1$ et D^α est l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α défini par (1.18) et $f : [0, 1][0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est une fonction continue.

On considère dans tout ce qui suit, X l'espace des fonctions continues sur $[0, 1] : X = C([0, 1])$ muni de la norme :

$$\|f\|_X = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad (2.4)$$

et \mathcal{K} le cône défini par :

$$\mathcal{K} = \{x \in X : u(x) \geq 0; 0 \leq x \leq 1\}$$

et on définit l'opérateur A sur \mathcal{K} par :

$$(Au)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds. \quad (2.5)$$

Théorème 2.2. [5]

$u \in X$ est une solution de (2.3) si et seulement si u est solution de l'équation intégrale :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds.$$

Démonstration

On a :

$$D^\alpha u(x) = f(x, u(x)); x \in [0, T].$$

En composant par l'opérateur d'intégration d'ordre α dans les deux côtés de l'équation précédente, on obtient :

$$I^\alpha(D^\alpha u)(x) = I^\alpha(f(\cdot, u(\cdot)))(x).$$

En appliquant la propriété (4) de la Proposition 1.3 pour $0 < \alpha < 1$ et $a = 0$ on obtient ,

$$I^\alpha(D^\alpha u(x)) = u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} (I^{1-\alpha} f(x, u(x)))(x).$$

D'après la Théorème 1.8, on a ainsi :

$$I^\alpha(D^\alpha u(x)) = u(x).$$

D'autre part, vue la Définition 1.14 de I^α , on a :

$$I^\alpha f(x, u(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t, u(t))(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

D'où le résultat.

Lemme 2.2.

L'image de tout borné de \mathcal{K} par A est borné.

Démonstration :

Soit M un borné de \mathcal{K} . Donc :

$$\exists C > 0 : \|u\|_X = \max_{x \in [0,1]} |u(x)| \leq C, \forall u \in M.$$

Maintenant, pour tout $u \in M$, on a :

$$|(Au)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds. \quad (2.6)$$

Ainsi, pour

$$L = \max_{0 \leq t \leq 1; 0 \leq u \leq c} f(t, u(t)). \quad (2.7)$$

en déduit de (2.6) :

$$\begin{aligned} |(Au)(t)| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^t = \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Puisque $t \in [0, 1]$, on conclut que :

$$|(Au)(t)| \leq \frac{L}{\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{L}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

En tenant compte de la définition de la norme dans X donnée par (2.4), on obtient :

$$\|Au\|_X \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

d'où le résultat.

Lemme 2.3.

Pour tout borné M de \mathcal{K} , $A(M)$ est équicontinue.

Démonstration

Pour chaque $u \in M, \forall \varepsilon > 0, t_1, t_2 \in [0, 1] : |t_1 - t_2| < \delta,$

on suppose que $t_1 < t_2$ alors $|t_1 - t_2| = t_2 - t_1 < \delta$, et on a :

$$\begin{aligned}
 |A(u(t_1)) - A(u(t_2))| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}| |f(s, u(s))| ds \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds \\
 &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds + \frac{l}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
 &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} ds - \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right] \\
 &= \frac{L}{\alpha\Gamma(\alpha)} [t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha] \\
 &= \frac{2L}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha).
 \end{aligned}$$

L étant la constante définie par (2.7) puisque $t_1 \leq t_2$:

$$\begin{aligned}
 |A(u(t_1)) - A(u(t_2))| &\leq \frac{2L}{\alpha\Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
 &= \frac{2L}{\Gamma(\alpha + 1)} (t_2 - t_1)^\alpha
 \end{aligned}$$

il suffit donc de choisir $\delta = \left(\frac{\alpha\Gamma(\alpha+1)}{2L} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ pour aboutir au résultat.

Théorème 2.3. [3]

L'opérateur A définie par (2.5) est un opérateur compact.

Démonstration

Le résultat découle immédiatement des lemme 2.2 et 2.3 et du théorème 1.5.

Théorème 2.4.

Sous les conditions suivantes

(H_1) : $f : [0, 1][0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue, $f(t, \cdot)$ est croissante pour tout $t \in [0, 1]$, et il existe une constante positive a telle que $f(t, \cdot)$ est strictement croissante sur $[0, a]$ pour tout $t \in [0, 1]$.

(H_2) : $0 < \lim_{u \rightarrow +\infty} f(t, u(t)) < +\infty$

l'équation (2.3) admet une solution positive.

Démonstration

Soit $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$, on a :

$$(Au_1)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_1(s)) ds.$$

donc d'après (H_1) si $u_1 \leq u_2$, on a :

$$\begin{aligned} (Au_1)(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u_2(s)) ds \\ &= (Au_2)(t). \end{aligned}$$

et par suite A est un opérateur croissant.

D'autre part, d'après l'hypothèse (H_2) il existe deux constantes positives N, R telles que $f \leq N \quad \forall u \geq R$.

$$\text{Soit } C = \max_{0 \leq t \leq 1} \max_{0 \leq u \leq R} f(t, u)$$

Par suite on a

$$f \leq N + C, \quad \forall u \geq 0.$$

Nous considérons l'équation

$$D^\alpha w(t) = N + C, \quad 0 < \alpha < 1, 0 < t < 1,$$

L'équation ci-dessus a une solution

$$w(t) = I^\alpha(N + C) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (N + C) d\tau = \frac{N + C}{\Gamma(1 + \alpha)} t^\alpha.$$

$$\text{et } w(t) = I^\alpha(N + C) \geq I^\alpha f(t, w(t)) = Aw(t).$$

L'inégalité précédente, veut dire que $w(t)$ est une sur-solution pour l'équation (2.3). Il est clair que $v(t) \equiv 0$ est une sous-solution pour l'équation (2.3) et l'opérateur A applique $\langle v, w \rangle$ sur $\langle v, w \rangle$ c'est à dire :

$$A : \langle v, w \rangle \subset \mathcal{K} \rightarrow \langle v, w \rangle.$$

De plus, d'après le Théorème 2.3, A est un opérateur compact. Enfin, puisque \mathcal{K} est un cône normale, ainsi le résultat découle immédiatement du Théorème 2.1.

Méthode des itérations monotones appliquée à un problème impulsif d'ordre fractionnaire

Dans [14], un problème impulsif à valeurs aux limites périodiques d'ordre 1 de la forme :

$$\begin{cases} u'(t) &= f(t, u(t), [\psi_k u_k](t)), \quad t \in \text{int}(J_k), \quad k = 1, 2, \dots, p+1 \\ u(t_k^+) &= I_k([\phi_k u_k](t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) &= u(T), \end{cases} \quad (3.1)$$

est considéré. Les auteurs ont utilisé la méthode de sur et sous-solutions combinée avec la technique des itérations monotones pour construire des solutions extrémales de (3.1).

Le but de ce chapitre est de reproduire la démarche employée dans [14] pour étudier un problème similaire à (3.1) mais avec un ordre fractionnaire α ($0 < \alpha < 1$) qui sera défini dans le paragraphe suivant.

3.1 Notations et Position du problème

Soit $J = [0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$. Nous introduisons l'espace fonctionnel suivant (espace des fonctions continues par morceaux) :

$$PC(J) = \{u : J \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ est continue pour tout } t \in J \setminus \{t_1, \dots, t_p\}; \\ u(0^+), u(T^-), u(t_k^+), u(t_k^-) \text{ existent, et } u(t_k^-) = u(t_k), k = 1, \dots, p\}.$$

$PC(J)$ muni de la norme suivante

$$\|u\|_{PC(J)} = \sup\{|u(t)| : t \in J\}$$

est un espace de Banach.

Pour $u \in PC(J)$, nous considérons les fonctions

$$u_k : J_k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots, p + 1,$$

où $J_k = [t_{k-1}, t_k]$ et

$$u_k(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in (t_{k-1}, t_k], \\ u(t_{k-1}^+) & \text{si } t = t_{k-1}. \end{cases}$$

alors

$$\|u\|_{PC(J)} = \sup \left\{ \|u_k\|_{C(J_k)} : k = 1, 2, \dots, p + 1 \right\}.$$

Dans ce sens, $PC(J)$ est équivalent à $\prod_{k=1}^{p+1} C(J_k)$, où $C(J_k)$ est l'espace de Banach des fonctions continues réelles défini sur J_k , muni de la norme du suprémum habituelle.

Si $u, v \in PC(J)$ satisfait $u(t) \leq v(t), t \in J$, alors on écrit $u \leq v$ et on définit dans $PC(J)$ l'intervalle $[u, v]$ par

$$[u, v] = \{z \in PC(J) : u \leq z \leq v\}.$$

On considère maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} ({}^C D_{k-1}^\alpha u)(t) = f(t, u(t), [\psi_k u_k](t)), & t \in \text{int}(J_k), \quad k = 1, 2, \dots, p + 1, & (3.2) \\ u(t_k^+) = I_k([\phi_k u_k](t_k)), & k = 1, 2, \dots, p, & (3.3) \\ u(0) = u(T), & & (3.4) \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$, ${}^C D_{k-1}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, $\psi_k : C(J_k) \rightarrow C(J_k)$ est continu pour $k = 1, 2, \dots, p + 1$, $\phi_k : C(J_k) \rightarrow C(J_k)$ et $I_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continus pour $k = 1, 2, \dots, p$, et $f : J\mathbb{R}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

3.2 Problème linéaire associé et hypothèses

On considère le problème linéaire associé à (3.2)-(3.4) suivant :

$$\begin{cases} ({}^C D_{k-1}^\alpha u)(t) = -Mu(t) - N([\psi_k u_k](t)) + b(t), & t \in \text{int}(J_k), k = 1, 2, \dots, p + 1, \\ u(t_k^+) = c_k, & k = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = u(T), & \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $c_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, p$ sont des constantes, $b \in PC(J)$ et $M > 0, N \geq 0$ des constantes.

Nous avons besoin de l'hypothèse suivante sur la fonction $\psi_k, k = 1, 2, \dots, p + 1$

(H_1) Pour chaque $k = 1, 2, \dots, p + 1, \psi_k$ satisfait une condition de Lipschitz, i.e., il existe un $R > 0$ telle que

$$\|\psi_k x - \psi_k y\| \leq R\|x - y\| \quad \text{pour tout } x, y \in C(J_k).$$

Lemme 3.1.

Sous l'hypothèse (H_1), le problème linéaire (3.5) admet une solution unique $u \in PC(J)$ donnée par :

$$u(t) = c_{k-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} [b(s) - Mu(s) - N[\psi_k u_k](s)] ds, \quad t \in J_k.$$

Démonstration

Nous considérons les problèmes de valeurs initial suivants pour $k = 2, 3, \dots, p + 1$ et $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{cases} {}^C D_{t_{k-1}}^\alpha = -Mu(t) - N[\psi_k u_k](t) + b(t), & t \in (t_{k-1}, t_k], \\ u(t_{k-1}^+) = c_{k-1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Il est facile de voir que trouver une solution de (3.6) est équivalent à obtenir un point fixe pour l'opérateur $T_k : C(J_k) \rightarrow C(J_k)$ défini par

$$[T_k u](t) = c_{k-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} [b(s) - Mu(s) - N[\psi_k u_k](s)] ds.$$

En effet , on a pour $t \in (t_{k-1}, t_k]$

$${}^C D_{k-1}^\alpha u(t) = -Mu(t) - N[\psi_k u_k] + b(t).$$

En composant l'opérateur d'intégration d'ordre α dans les deux côtés de l'équation précédente, l'application de la propriété (2) dans la Proposition 1.4 donne pour le membre de gauche

$$I_{k-1}^\alpha ({}^C D_{k-1}^\alpha u(t)) = u(t) - u(t_{k-1}).$$

D'autre part, vue la Définition 1.14 de I^α , le membre de droite devient :

$$I_{k-1}^\alpha (-Mu(t) - N([\psi_k u_k](t)) + b(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} (-Mu(s) - N([\psi_k u_k](s)) + b(s)) ds.$$

D'où le résultat.

Maintenant considérons la norme suivante dans $C(J_k)$ qui est équivalente à la norme du Sup habituelle :

$$\|y\|_* = \sup \{ e^{-A(t-t_{k-1})} |y(t)| : t \in J_k \}, \quad A = (M + NR)T^{\alpha-1}.$$

Alors pour $x, y \in C(J_k)$ et $t \in J_k$, et en utilisant l'hypothèse (H_1) , nous avons

$$\begin{aligned} |[T_k x - T_k y](t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} (M(y(s) - x(s)) + N([\psi_k y_k](s) - [\psi_k x_k](s))) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} (t-s)^{\alpha-1} \left[e^{-A(s-t_{k-1})} |M(y(s) - x(s))| \right. \\ &\quad \left. + e^{-A(s-t_{k-1})} |N([\psi_k y_k](s) - [\psi_k x_k](s))| \right] ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} (t-s)^{\alpha-1} \left[M e^{-A(s-t_{k-1})} |y(s) - x(s)| \right. \\ &\quad \left. + N e^{-A(s-t_{k-1})} |[\psi_k y_k](s) - [\psi_k x_k](s)| \right] ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} (t-s)^{\alpha-1} \left[M \|x - y\|_* + N \|\psi_k x_k - \psi_k y_k\|_* \right] ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} (t-s)^{\alpha-1} \left[M \|x - y\|_* + NR \|x_k - y_k\|_* \right] ds \\ &\leq \frac{(M + NR) \|x - y\|_*}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{(M + NR) \|x - y\|_*}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} T^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{(M + NR) T^{\alpha-1} \|x - y\|_*}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t e^{A(s-t_{k-1})} ds \\ &\leq \frac{A \|x - y\|_*}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{e^{A(s-t_{k-1})}}{A} \right]_{t_{k-1}}^t \\ &\leq \frac{A \|x - y\|_*}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{A} \left[e^{A(t-t_{k-1})} - 1 \right] \\ &= \frac{\|x - y\|_*}{\Gamma(\alpha)} \left[e^{A(t-t_{k-1})} - 1 \right]. \end{aligned}$$

ainsi,

$$e^{-A(t-t_{k-1})} |(T_k x - T_k y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1 - e^{-A(t-t_{k-1})}) \|x - y\|_*$$

pour tout $x, y \in C(J_k)$ et $t \in J_k$.

Cela implique que

$$\|T_k x - T_k y\|_* \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1 - e^{-A(t_k - t_{k-1})}) \|x - y\|_*.$$

Ainsi T_k est une contraction et le principe de contraction de Banach assure donc l'existence d'un point fixe unique de T_k pour $k = 2, 3, \dots, p + 1$.

Cela nous donne la solution $u(t)$ pour $t \in [t_1, T]$ et il détermine une valeur $u(T)$ que nous utilisons comme valeur initiale pour le problème

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha u(t) = -Mu(t) - N[\psi_1 u_1](t) + b(t), t \in [0, t_1], \\ u(0) = u(T). \end{cases} \quad (3.7)$$

Maintenant, nous pouvons garantir, par le même raisonnement, l'existence et l'unicité de la solution pour (3.7).

Définition 3.1.

On dit qu'une fonction $x(t) \in PC(J)$ est une sous-solution de (3.2)-(3.4) si elle satisfait

$$\begin{cases} ({}^C D_{t_{k-1}}^\alpha x)(t) \leq f(t, x(t), [\psi_k x_k](t)), & t \in \text{int}(J_k), k = 1, 2, \dots, p + 1, \\ x(t_k^+) \leq I_k([\phi_k x_k](t_k)), & k = 1, 2, \dots, p, \\ x(0) \leq x(T). \end{cases}$$

De manière analogue, $y(t) \in PC^1(J)$ est une sur-solution pour (3.2)-(3.4) si

$$\begin{cases} ({}^C D_{t_{k-1}}^\alpha y)(t) \geq f(t, y(t), [\psi_k y_k](t)), & t \in \text{int}(J_k), k = 1, 2, \dots, p + 1, \\ y(t_k^+) \geq I_k([\phi_k y_k](t_k)), & k = 1, 2, \dots, p, \\ y(0) \geq y(T). \end{cases}$$

Définition 3.2.

On dit que \bar{x} est une solution minimale (\bar{y} est une solution maximale respectivement) de (3.2)-(3.4) dans l'intervalle $[x, y]$, si pour toute solution u de (3.2)-(3.4) telle que $x \leq u \leq y$, alors

$$\bar{x} \leq u \quad (u \leq \bar{y} \text{ respectivement}).$$

Pour le reste du travail, on a besoin des hypothèses suivantes :

(H₂) Si $u \in PC(J)$ vérifie les inégalités suivantes

$$\begin{cases} ({}^C D_a^\alpha u)(t) \geq -Mu(t) - N[\psi_k u_k](t), t \in \text{int}(J_k) k = 1, 2, \dots, p + 1, \\ u(t_k^+) \geq 0, k = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) \geq u(T). \end{cases}$$

alors $u(t) \geq 0$ pour tout $t \in J$,

(H₃) Pour $x, y \in PC(J)$ avec $x \leq y$, on a

$$f(t, y(t), [\psi_k y_k](t)) - f(t, x(t), [\psi_k x_k](t)) \geq -M(y(t) - x(t)) - N([\psi_k y_k](t) - [\psi_k x_k](t)),$$

où $M > 0, N \geq 0, t \in J_k, k = 1, 2, \dots, p + 1$.

(H₄) La fonction ψ_k satisfait

$$\psi_k u - \psi_k v \leq \psi_k(u - v) \text{ pour } u, v \in C(J_k), v \leq u \text{ } k = 1, 2, \dots, p + 1.$$

(H₅) $I_k, \phi_k, k = 1, 2, \dots, p$ sont croissants.

On rappelle que l'on considère l'ordre partiel dans $C(J_k)$ défini par $v \leq u$ si et seulement si $v(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in J_k$.

3.3 Résultat d'existence

Dans toute la suite, on suppose qu'il existe une sous-solution x et une sur-solution y du problème (3.2)-(3.4) telles que $x \leq y$ et que (H₁) – (H₅) sont vérifiés.

Soit $\eta \in [x, y]$, pour tout $k = 1, 2, \dots, p + 1$ on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} ({}^C D_{k-1}^\alpha u)(t) = F(t, \eta_k(t)) - Mu(t) - N([\psi_k u_k](t)), t \in \text{int}(J_k), \\ u(t_k^+) = I_k([\phi_k u_k](t_k)), k = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = u(T), \end{cases} \quad (3.8)$$

avec $F(t, \eta_k(t)) = f(t, \eta(t), [\psi_k \eta_k](t)) + M\eta(t) + N([\psi_k \eta_k](t))$
 qui n'est autre que le problème (3.5) qui correspond à

$$b(t) = F(t, \eta_k(t)) \text{ et } c_k = I_k([\phi_k \eta_k](t_k)).$$

D'après le Lemme 3.1, le problème (3.8) admet une solution unique $u \in PC(J)$.
 Ceci nous permet donc de définir l'opérateur B :

$$B : [x, y] \rightarrow PC(J).$$

par $[B\eta](t) = u(t)$, où u est l'unique solution de (3.8).

L'opérateur B vérifie les propriétés suivantes :

- (a) $B([x, y]) \subset [x, y]$.
- (b) $\eta \geq \xi \implies B(\eta) \geq B(\xi)$ (B est un croissant).

En effet ,
 nous considérons la fonction $v(t) = u(t) - x(t)$ où u est la solution de (3.8). D'après la définition de la sous-solution on a :

$$\begin{aligned} v(0) - v(T) &= u(0) - x(0) - u(T) + x(T) \\ &= x(T) - x(0) \geq 0 \\ &\implies v(0) \geq v(T) \end{aligned}$$

De plus, tenant compte de (H_3) , (H_4) et la linéarité de la dérivation fractionnaire, on a

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_{k-1}}^\alpha v(t) &= {}^C D_{t_{k-1}}^\alpha (u(t) - x(t)) \\ &= {}^C D_{t_{k-1}}^\alpha u(t) - {}^C D_{t_{k-1}}^\alpha x(t) \\ &\geq f(t, \eta(t), [\psi_k \eta_k](t)) - f(t, x(t), [\psi_k x_k](t)) \\ &\quad + M(\eta(t) - u(t)) + N([\psi_k \eta_k](t) - [\psi_k u_k](t)) \\ &\geq M(x(t) - \eta(t)) + N([\psi_k x_k](t) - [\psi_k \eta_k](t)) \\ &\quad + M(\eta(t) - u(t)) + N([\psi_k \eta_k](t) - [\psi_k u_k](t)) \\ &= -M(u(t) - x(t)) - N([\psi_k u_k](t) - [\psi_k x_k](t)) \\ &\geq -Mv(t) - N[\psi_k v_k](t), \end{aligned}$$

pour $t \in (J_k), k = 1, 2, \dots, p + 1$.

Maintenant, en utilisant (H_5) , nous avons

$$v(t_k^+) = u(t_k^+) - x(t_k^+) \geq I_k([\phi_k \eta_k](t_k) - I_k([\phi_k x_k](t_k)) \geq 0, k = 1, 2, \dots, p.$$

Ainsi, l'hypothèse (H_2) implique que $v = u - x \geq 0$.

De même on peut montrer que $u \leq y$.

Maintenant, pour prouver (b) considérons $u = B(\eta), w = B(\xi)$ avec $\eta \geq \xi$ et $v = u - w$

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha v(t) &= {}^C D_a^\alpha (u - w)(t) \\ &= {}^C D_a^\alpha u(t) - {}^C D_a^\alpha w(t) \\ &= f(t, \eta(t), [\psi_k \eta_k](t)) - f(t, \xi(t), [\psi_k \xi_k](t)) \\ &\quad + M(\eta(t) - u(t) + w(t) - \xi(t)) \\ &\quad + N([\psi_k \eta_k](t) - [\psi_k u_k](t) + [\psi_k w_k](t) - [\psi_k \xi_k](t)) \\ &\geq -M(\eta(t) - \xi(t)) - N([\psi_k \eta_k](t) - [\psi_k \xi_k](t)) \\ &\quad + M(\eta(t) - u(t) + w(t) - \xi(t)) \\ &\quad + N([\psi_k \eta_k](t) - [\psi_k u_k](t) + [\psi_k w_k](t) - [\psi_k \xi_k](t)) \\ &\geq -Mv(t) - N([\psi_k v_k](t)). \end{aligned}$$

pour $t \in \text{int}(J_k), k = 1, 2, \dots, p + 1$ et

$$v(t_k^+) = u(t_k^+) - w(t_k^+) \geq I_k([\phi_k \eta_k](t_k) - I_k([\phi_k \xi_k](t_k)) \geq 0, k = 1, 2, \dots, p.$$

Il résulte de l'hypothèse (H_2) que $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in J$, ce qui prouve que B est monotone croissant.

Maintenant, on est en mesure à définir deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ qui convergent vers les solutions de (3.2)-(3.4) :

$$\begin{cases} x_0 & = x, \\ x_n(t) & = I_k([\phi_k(x_{n-1})_k](t_k)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} \\ & [f(t, x_{n-1}(t), [\psi_k(x_{n-1})_k](t))] ds, \quad t \in J_k. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} y_0 & = y, \\ y_n(t) & = I_k([\phi_k(y_{n-1})_k](t_k)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} \\ & [f(t, y_{n-1}(t), [\psi_k(y_{n-1})_k](t))] ds, \quad t \in J_k \end{cases} \quad (3.10)$$

Proposition 3.1.

Les suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ définies respectivement par (3.9) et (3.10), vérifient les relations : $x(t) = x_0(t) \leq x_1(t) \leq \dots \leq x_n(t) \leq \dots \leq y_n(t) \leq \dots \leq y_1(t) \leq y_0(t) = y(t)$.

De plus $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ convergent uniformément sur J vers \bar{x} et \bar{y} respectivement avec

$$\forall n \geq 1 : \quad x_n \leq \bar{x} \leq \bar{y} \leq y_n.$$

Démonstration

$\{x_n\}$ est croissante. En effet, nous allons le montrer par récurrence.

On a, $x_0 = x \leq B(x_0) = x_1$ (car $B([x, y]) \subset [x, y]$).

Supposons maintenant que $x_{n-1} \leq x_n$, alors

$$B(x_{n-1}) \leq B(x_n) \quad (\text{car } B \text{ est un croissante})$$

$$\implies x_n \leq x_{n+1}.$$

De même, nous allons prouver que $\{y_n\}$ est décroissante.

On a $B(y_0) = y_1 \leq y_0 = y$ (car $B([x, y]) \subset [x, y]$).

Supposons maintenant que $y_n \leq y_{n-1}$, alors, $y_n \leq y_{n-1}$ ce qui implique

$$B(y_n) \leq B(y_{n-1}) \quad (\text{car } B \text{ est un croissante})$$

$$\implies y_{n+1} \leq y_n.$$

D'autre part, on a $x_0 \leq y_0$ ($x \leq y$).

Supposons maintenant que $x_{n-1} \leq y_{n-1}$, ce implique que

$$B(x_{n-1}) \leq B(y_{n-1}) \quad (\text{car } B \text{ est un croissante})$$

$$\implies x_n \leq y_n.$$

En suivant le raisonnement utilisé dans la preuve du Lemme 2.3, on montre que $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset PC(J)$ est quasi-équicontinu dans J .

En plus, $\{x_n\}$ est uniformément borné dans $PC(J)$ ($\forall n \geq 1 \quad \|x_n\|_{PC} \leq c = \|y\|_{PC}$). Ainsi, le Théorème 1.6, permet de déduire que $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est relativement compact dans $PC(J)$.

Rappelons que

$$\{x_n\}_{n \geq 0} = \{B^n(x)\}_{n \geq 0} \quad (B \text{ croissant})$$

$\{x_n\}$ est relativement compact donc possède une sous-suite $\{B^{n_j}(x)\}_{j \geq 1}$ qui converge vers \bar{x} .

Nous allons montrer que enfaite, la suite "entière" $\{B^n(x)\}_{n \geq 0}$ converge vers \bar{x} . En effet

$$\forall \epsilon > 0, \exists j \geq 1 : \|B^{n_j}(x) - \bar{x}\|_{PC} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part, pour $n \geq n_j$, nous avons :

$$B^{n_j}(x) \leq B^n(x) \leq \bar{x}, \quad (B \text{ est croissant}).$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &\leq B^n(x) - B^{n_j}(x) \leq \bar{x} - B^{n_j}(x) \\ \implies \sup_{t \in J} |B^n(x)(t) - B^{n_j}(x)(t)| &\leq \sup_{t \in J} |\bar{x}(t) - B^{n_j}(x)(t)| \\ \iff \|B^n(x) - B^{n_j}(x)\|_{PC} &\leq \|\bar{x} - B^{n_j}(x)\|_{PC}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \|B^n(x) - \bar{x}\|_{PC} &\leq \|B^n(x) - B^{n_j}(x)\|_{PC} + \|B^{n_j}(x) - \bar{x}\|_{PC} \\ &\leq \|\bar{x} - B^{n_j}(x)\|_{PC} + \|B^{n_j}(x) - \bar{x}\|_{PC} \\ &= 2\|B^{n_j}(x) - \bar{x}\|_{PC} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

D'où, $\{B^n(x)\}_{n \geq 0} \rightarrow \bar{x}$ dans $PC(J) \iff \{x_n\} \rightarrow \bar{x}$ uniformément.

De même, on peut montrer que $\{y_n\} \rightarrow \bar{y}$ uniformément.

Théorème 3.1.

On suppose qu'il existe une sous-solution x et une sur-solution y de (3.2)-(3.4) telles que $x(t) \leq y(t), t \in J$ et que (H_1) - (H_5) sont vérifiés.

Alors (3.2)-(3.4) admet une solution minimale \underline{u} et une solution maximale \bar{u} telles que

$$x \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq y.$$

Démonstration

Soit $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ les deux suites définies respectivement par (3.9),(3.10). Alors d'après la Proposition 3.1 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \bar{x}(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \bar{y}(t)$$

la convergence est uniforme sur J , avec

$$\forall n \geq 1 : \quad x_n \leq \bar{x} \leq \bar{y} \leq y_n.$$

Il suffit donc de prouver que \bar{x} et \bar{y} sont des solution de (3.2)-(3.4) et qu'il s'agit en fait d'une solution minimale et une solution maximale :

On a, pour $t \in J_k, \eta \in [x, y]$;

$$x_n(t) = I_k([\phi_k(x_{n-1})_k](t_k)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} [f(t, x_{n-1}(t), [\psi_k(x_{n-1})_k](t))] ds, \quad t \in J_k$$

En passant par à la limite dans les deux cotée de l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[c_{k-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_{n-1}(s), [\psi_k(x_{n-1})_k](s)) ds \right] \\ &= c_{k-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}(s), [\psi_k \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1})_k](s)) ds \\ &= c_{k-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \bar{x}(s), [\psi_k \bar{x}_k](s)) ds. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \bar{x}(t).$$

Donc,

$$\bar{x}(t) = c_{k-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \bar{x}(s), [\psi_k \bar{x}_k](s)) ds.$$

Puisque :

$$x_n(t_k^+) = I_k[\phi_k x_{n-1}](t_k) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_k^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_k[\phi_k x_{n-1}](t_k) \implies \bar{x}(t_k^+) = I_k[\phi_k \bar{x}](t_k)$$

et

$$x_n(0) = x_n(T) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(T) \implies \bar{x}(0) = \bar{x}(T).$$

Ainsi nous concluons que \bar{x} est une solution de (3.5). de la même manière, nous prouvons que \bar{y} est une solution de (3.5).

Maintenant, nous prouvons que \bar{x} et \bar{y} sont solutions extrêmes de (3.2)-(3.4) dans $[x, y]$,

soit u une solution quelconque de (3.2)-(3.4) dans $[x, y]$. Il est évident que $x_0 \leq u \leq y_0$. Puis par induction et en utilisant la propriété (b) de B, on peut facilement voir que

$$x_n \leq u \leq y_n, \quad n \geq 0.$$

Ainsi, en passant à la limite, on conclut que

$$\bar{x}(t) \leq u(t) \leq \bar{y}(t), \quad t \in J.$$

D'où le resultat .

Bibliographie

- [1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed : Jan van Mill, Amsterdam, (2006).
- [2] A.A.Kilbas, S.G.Samko , and O.I. Marichev , Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data,Amsterdam, (1993).
- [3] S.Zhang, The Existence of a Positive Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation, J.Math.Anal.Appl.252, 804-812 (2000).
- [4] Chengkui Zhong, Xianlin Fan, Wenyuan Chen, Nonlinear Functional Analysis and Its Application, Lanzhou Univ. Press, 1998
- [5] D. Delbosco and L. Rodino, Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 204 ,193-196,(1996).
- [6] Radu Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations, Springer-Science+Business Media, B.V. Romania, (2002).
- [7] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential, Lecture Notes in Mathematics V. 2004, Springer-Verlag, Berlin (2010).
- [8] Kai.Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equation, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Ed Springer, 2004.
- [9] F.Boyer,P.Fabrie ,Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navir-Stokes Equations and Related Models, Appl.Math.Sci, New York, 2013.
- [10] Nawfal El Hage Hassan ,Topologie générale et espaces normés, Dunod,2011
- [11] P.bébek, J, Milota, Methods of Nonlinear Analysis Application to Differential Equations,Mathématique Subject classification,2000
- [12] Erdelyi A,Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).
- [13] T. HOUMOR, Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires, **Thèse de Doctorat**, Univ. CONSTANTINE 1, (2014).
- [14] D.A.Madrid,E.L.Vigo,J.J.N.Compostela,Y.V.Gazimagusa .A Contribution to the Study of Functional Differential Equations with Impulses.Math.218 (2000), 49 – 60

- [15] D.Bainov, P.simeonov, Impulsive differential equation periodic solutions and applications, New york 1993.
- [16] Gennaro.Infante, An Overview of the Lower and Upper Solutions Method with Nonlinear Boundary Value Conditions, Departamento de Analise Matematica, 7 July 2010.

Résumé

Dans ce mémoire nous traitons la méthode des sur et sous-solutions dans l'étude des équations différentielles fractionnaires (E.D.F).

La première partie de ce travail est une lecture détaillée de quelques résultats d'existence des solutions pour les (E.D.F) basés sur la théorie du point fixe dans les espaces de Banach ordonnés.

Dans une deuxième partie, un problème impulsif à valeurs aux limites périodiques est considéré. En appliquant la méthode des sur et sous-solutions combinée avec la technique des itérations monotones, des solutions extrémales sont obtenus.

Mots clés : Sur et sous-solutions, espace de Banach ordonné, itérations monotones, point fixe, équations différentielles fractionnaire.

Abstract

In this memory we deal with lower and upper-solutions method in the study of fractional differential equations (F.D.E).

The first part of this work is a detailed reading of some results of existence of the solutions for (F.D.E) based on of the fixed point theory in ordered Banach spaces.

In a second part, an impulsive periodic boundary value problem is considered. By applying the method of lower and upper-solutions combined with the monotone iterative technique, extreme solutions are obtained.

Key words : Lower and upper-solutions, ordered Banach space, monotone iterations, fixed point, fractional differential equations.

ملخص

في هذه الأطروحة نتناول طريقة الحلول التحتية والفوقية في دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية (م.ت.ك).

الجزء الأول من هذا العمل هو قراءة تفصيلية لبعض نتائج وجود حلول لـ (م.ت.ك) بناءً على نظرية النقطة الثابتة في فضاءات بناخ المرتبة.

في الجزء الثاني ، يتم النظر في مشكلة الاندفاع ذات القيم الحدية الدورية. من خلال تطبيق طريقة الحلول التحتية و الفوقية جنباً إلى جنب مع تقنية التكرارات الرتيبة ، يتم الحصول على حلول حدية.

كلمات مفتاحية : الحلول التحتية والفوقية ، فضاءات بناخ المرتبة ، التكرارات الرتيبة ، النقطة الثابتة ، المعادلات التفاضلية الكسرية.