

Remerciements

*Nous remercions tout d'abord **Dieu** tout puissant de nous avoir accordé la force, le courage et les moyens à fin pouvoir accomplir ce travail.*

*Nous tenons à remercier les personnes qui ont bien voulu encadrer ce travail : **Dr. Nisse Khadidja** et nous le remercions pour l'aide et le travail rigoureux et les remarques toujours pertinentes apportées à ce travail de mémoire.*

Notre reconnaissance profonde et nos remerciements vont aussi aux membres du jury sans exception pour avoir accepté et présidé l'examen et la discussion de notre travail, pour leurs remarques judicieuses et leurs critiques enrichissantes qui vont valoriser notre mémoire.

En fin, que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouveront ici l'expression de notre profonde gratitude.

Notations générales

$e.v.t$	espace vectoriel topologique,
$e.v.t.l.c$	espace vectoriel topologique localement convexe,
$\mathcal{P}(E)$	l'ensemble des parties de E ,
(E, τ)	espace topologique sur un ensemble E ,
V	un voisinage,
\overline{A}	l'adhérence de A ,
$\overset{\circ}{A}$	l'intérieur de A ,
$\partial(S)$	la frontière de S ,
$\mathcal{V}(x)$	l'ensemble de voisinages de x ,
τ_A	la topologie induite sur A ,
f^{-1}	l'application inverse de f ,
K	un ensemble compact,
$Co(A)$	l'enveloppe convexe de A ,
p	une semi-norme,
p_V	la jauge de V ,
$B_p(x, r)$	la semi-boule ouverte pour la semi-norme p ,
$\overline{B}_p(x, r)$	la semi-boule fermée pour la semi-norme p ,
$B_{p_V}(x, r)$	la semi-boule ouverte pour la jauge p_V ,
$C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	l'ensemble des fonctions continument dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
$C(\Omega)$	l'ensemble des fonctions continues sur Ω ,
$C(K)$	l'ensemble des fonctions continues sur la compacte K ,
$\mathbb{R}[X]$	l'ensemble des polynômes de coefficient réels,
$\mathbb{R}_n[X]$	l'ensemble des polynômes de coefficient réels de degré n ,
$\mathcal{P} = \{p_i; i \in I\}$	une famille de semi-normes,
\mathcal{B}	Base d'ouverts.

Table des matières

Introduction générale

La théorie du point fixe a été un champ de recherche actif et a connue un développement intense au cours des trois dernières décennies.

Le principe de contraction de Banach, est le premier important résultat bien connu dans cette théorie, applicable à de nombreux domaines d'intérêt actuelle dans l'analyse. Il est également le plus utilisé efficacement pour établir l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales non linéaire de Volterra, des équations intégrales de Fredholm et des équations intégrales-différentielles non linéaires dans les espaces de Banach. Ce principe est dû à S. Banach en 1922, il s'agit d'une abstraction de la méthode des approximations successives introduite par Liouville en 1837 et développée systématiquement pour la première fois par Picard en 1890.

Au cours des années, de nombreux mathématiciens ont tenté avec succès de généraliser ce théorème, les célèbres résultats connus dans ce domaine sont ceux de Brouwer et Schauder en 1930 aussi que Krasnoselskii en 1955.

En 1971, Cain et Nashed [?] ont étendu la notion d'application contractante aux espaces localement convexes de Hausdorff $(E, \{|\cdot|_{i \in I}\})$ (où $\{|\cdot|_{i \in I}\}$ est une famille de semi-normes qui génèrent la topologie de E) comme suit :

Pour $X \subset E$, une application $f : X \rightarrow X$ est dite contractante si pour tout $i \in I$, il existe $0 < k_\alpha < 1$ tel que

$$|f(x) - f(y)|_\alpha \leq k_\alpha |x - y|_\alpha$$

pour tout $x, y \in X$.

Il ont montré que le principe de contraction (classique) de Banach est encore valable pour ce genre d'applications définies sur un sous-espace complet de X .

Ce principe a été étendu aussi aux espaces uniformes, qui forment une extension naturelle des espaces métriques par de nombreux mathématiciens, citons entre autre Knill et Tarafdar [?].

Dans ce contexte, on propose dans ce travail d'introduire la généralisation du concept des espaces de Banach aux espaces localement convexes et de redémontrer l'une des versions de la théorie du point fixe dans les espaces localement convexes. Nous achevons ce travail par un exemple d'application pour un problème différentiel à valeurs initiales dans un domaine de temps non borné.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions topologiques et algébrique préliminaires qui nous seront utile par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les espaces vectoriel topologiques localement convexe (e.v.t.l.c), qui forment une extension naturelle des espaces de Banach, ainsi que leurs importantes propriétés. Nous clarifons ensuite la correspondance bi-univoque entre la topologie des espaces localement convexes et celle générée par une famille de semi-normes et nous achevons ce chapitre par quelques exemples.

Dans la première partie du troisième chapitre, nous redémontrons l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une fonction qui applique un sous ensemble fermé d'un espace localement convexe dans l'espace tout entier, sous certaines conditions de convexité sur l'ensemble et de contraction sur la fonction.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous donnons un exemple d'application à la résolution d'un problème à valeurs initiales dans un domaines de temps non borné. Après avoir transformer le problème à une équation intégrale et identifier les solutions aux points fixes de cette équation, nous posons des conditions suffisantes sur les donnés du problème qui permettent d'appliquer le théorème du point fixe établi dans la première partie du chapitre et obtenir ainsi l'unique solution du problème.

Chapitre 1

Notions de base

Ce chapitre est consacré aux rappels sur les espaces vectoriels et les espaces topologiques ainsi que les propriétés fondamentales qui s'y rattachent et qui nous seront utiles par la suite.

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1 [?] *On appelle espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} tout ensemble E muni de deux lois $+$ et \cdot vérifiant :*

- 1) *$(E, +)$ est un groupe commutatif (c-à-d, $+$ est une loi interne qui est associative, possédant un élément neutre, et tel que tout élément a un inverse),*
- 2) *pour tout (λ, μ) dans \mathbb{K}^2 , pour tout x dans E , $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$ et $1 \cdot x = x$,*
- 3) *\cdot distributive par rapport à $+$ dans E et par rapport à $+$ dans \mathbb{K} .*

Exemple 1.1.1 [?]

1. *L'ensemble $C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} est un espace vectoriel. Plus généralement, soit X inclus dans un \mathbb{K} -espace vectoriel, E un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors l'ensemble $C(\mathbb{K}, E)$ des fonctions continues de \mathbb{K} dans E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.*
2. *$\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels est \mathbb{R} -espace vectoriel.*

Définition 1.1.2 [?](Sous-espace vectoriel)

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F non-vide de E tel que :

- 1) Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$;
- 2) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$.

Exemple 1.1.2 [?] $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.1.1 Application linéaire

Définition 1.1.3 [?] Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in E$:

- 1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- 2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exemple 1.1.3 [?]

1. Soit $f : E \rightarrow F$ définie par $f : x \mapsto 0_F$ est une application linéaire.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \lambda x$ est une application linéaire.

Proposition 1.1.1 [?]

- La somme de deux applications linéaires est linéaire.
- Si on multiplie une application linéaire par un scalaire on obtient encore une application linéaire.
- Si f est une application linéaire de E dans F , et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

1.1.2 Ensembles convexes

Définition 1.1.4 [?],[?],[?] Soit E un espace vectoriel. Un ensemble V de E est dit convexe, si pour tous x, y dans V et pour tout $t \in [0, 1]$, le point $tx + (1 - t)y$ appartient encore à V .

Exemple 1.1.4 [?]

1. L'espace E ainsi que la partie vide sont convexes.
2. Si $E = \mathbb{R}$ les parties convexes sont les intervalles.
3. Les boules d'un espace normé sont convexes.

Propriété 1.1.1 [?] Soit E un espace vectoriel. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. L'ensemble \emptyset est convexe.
2. Les singleton $\{x\}$ est convexe.
3. Si V est convexe, alors $(-V)$ aussi convexe.
4. L'intersection d'une collection arbitraire d'ensembles convexes est convexe.
5. Soit $\{V_i\}$ une collection d'ensembles convexes qui est totalement ordonnée par l'inclusion, alors leur union $\bigcup_i V_i$ est convexe.
6. La translation d'une partie convexe de E est convexe.

Définition 1.1.5 [?],[?],[?] Soit A une partie d'un espace vectoriel E .

L'enveloppe convexe de A , notée $Co(A)$, est défini comme l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A , i.e,

$$Co(A) = \bigcap \{V \subset E : A \subset V, V \text{ est convexe} \}.$$

En outre, $x \in Co(S)$ si, et seulement si,

$$x = \sum_i \lambda_i x_i \quad \text{où } x_i \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_i \lambda_i = 1.$$

1.1.3 Fonctions convexes

Définition 1.1.6 [?] Une fonction f à valeur dans \mathbb{R} , définie sur une partie convexe C de $E = \mathbb{R}^n$ est dite convexe si

$$x, y \in C, t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Lorsque l'inégalité est stricte, on dit que f est strictement convexe sur C .

Exemple 1.1.5 [?] La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} . On peut le prouver par le calcul. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$(ta + (1 - t)b)^2 \leq ta^2 + (1 - t)b^2,$$

implique

$$t^2a^2 + 2t(1 - t)ab + (1 - t)^2b^2 \leq ta^2 + (1 - t)b^2,$$

de sorte que

$$(t^2 - t)a^2 + 2t(1 - t)ab + ((1 - t)^2 - (1 - t))b^2 \leq 0,$$

alors

$$t(t - 1)a^2 - 2t(t - 1)ab + t(t - 1)b^2 \leq 0,$$

c-à-d

$$t(t - 1)(a - b)^2 \leq 0.$$

1.2 Espaces topologiques

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2.1 [?],[?] Une topologie sur un ensemble E est une famille $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ de parties de E vérifiant les 3 conditions suivantes :

1. \emptyset et E sont des éléments de τ .
2. Toute intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ .
3. Toute réunion quelconque d'éléments de τ est un élément de τ .

Le couple (E, τ) est appelé un espace topologique.

Exemple 1.2.1 [?]

1. Soit E un ensemble non vide, alors $\tau = \mathcal{P}(E)$ définit une topologie, appelée topologie discrète. Noter que la topologie est discrète si, et seulement si tous les singletons de E (i.e. les parties de E constituées d'un seul élément) sont des ouverts.
2. Soit E un ensemble non vide, alors $\{\emptyset, E\}$ est une topologie sur E appelée topologie grossière.

1.2.2 Notions topologiques de Base

Ouverts et fermés

Définition 1.2.2 [?](Ouvert)

Soit (E, τ) un espace topologique. On appelle ouvert, toute élément de τ .

Définition 1.2.3 [?](Fermé)

Soit (E, τ) un espace topologique. On appelle fermé, toute partie de E dont le complémentaire est ouvert.

Proposition 1.2.1 [?] Soit (E, τ) un espace topologique. La famille des fermés de E vérifie les propriétés suivantes :

- (F1) \emptyset, E sont des fermés.
- (F2) L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.
- (F3) L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

Voisinages

Définition 1.2.4 [?] Soit (E, τ) un espace topologique et $x \in E$. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de x dans E s'il existe un ouvert de E vérifiant $x \in O \subset V$, on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de voisinages de x .

Proposition 1.2.2 [?] Les voisinages d'un point vérifient les propriétés suivantes :

1. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.
2. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, et tout $U \subset E$, si $V \subset U$ alors U est un voisinage de x .
3. Toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x .

Théorème 1.2.1 [?] Soit (E, τ) un espace topologique. O est un ouvert de E si et seulement si O est voisinage de chacun de ses points.

Bases d'ouverts et bases de voisinages

Définition 1.2.5 [?] Soient (E, τ) un espace topologique et \mathcal{B} une famille d'ouverts. On dit que \mathcal{B} est une base d'ouverts de (E, τ) si tout ouvert non vide de E est réunion d'ouverts appartenant à \mathcal{B} .

Proposition 1.2.3 [?] Soient (E, τ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \tau$ une famille d'ouverts. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{B} est une base d'ouverts de E .
2. Pour tout ouvert U et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

Preuve. Si \mathcal{B} est une base d'ouverts, alors tout ouvert U peut s'écrire sous la forme $U = \bigcup_{i \in J} B_i$. Donc quelque soit $x \in U$, il existe $i \in J$ tel que $x \in B_i \subset U$. Ce qui prouve que (1) implique (2)

Soit maintenant U un ouvert. Alors pour tout $x \in U$, il existe un ouvert $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset U$. On a alors,

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B_x \subset U.$$

Ce qui montre que (2) entraîne (1) et achève la démonstration. ■

Définition 1.2.6 [?] Soit (E, τ) un espace topologique, et $x \in E$. On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x , il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.

Par conséquent, si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x alors on a,

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset E; \exists W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V\}.$$

Exemple 1.2.2 [?] Soit (E, τ) un espace topologique $\mathcal{V}(a) = \{O \in \tau \mid a \in O\}$, où $\mathcal{V}(a)$ est une base de voisinage de a .

Proposition 1.2.4 [?] Soient (E, τ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \tau$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{B} est une base d'ouverts de E .
2. Pour tout $x \in E$, la famille $\{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ est une base de voisinages de x .

Preuve. On suppose que \mathcal{B} est une base d'ouverts de E . Soit $x \in E$ et V un voisinage de x . Alors V contient un ouvert O qui contient x . On peut alors écrire O comme l'union d'éléments de \mathcal{B} . Il existe une famille $B_i, i \in I$, d'éléments de \mathcal{B} tel que

$$O = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Mais alors, il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$. Donc

$$x \in B_i \subset O \subset V.$$

Donc pour tout $x \in E$, la famille $\{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ est une base de voisinages de x . Ce qui montre (1) implique (2).

Supposons maintenant que pour tout $x \in E$, la famille $\{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ soit une base de voisinages de x . Soit O un ouvert de E . Alors, O est un voisinage de chacun

de ses points, et donc pour tout $x \in O$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que

$$x \in B_x \subset O.$$

Alors,

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B_x \subset O.$$

Ce qui prouve que (2) entraîne (1).

D'où le résultat. ■

Propriété 1.2.1 [?] *L'union de toute base de voisinages est une base de topologie.*

Adhérence et intérieur

Définition 1.2.7 [?] *Soit (E, τ) un espace topologique et $x \in E$.*

- a) *Le plus petit fermé contenant A , est appelé l'adhérence (ou la fermeture) de A dans E . On le note \bar{A} .*
- b) *Le plus grand ouvert contenu dans A , est appelé l'intérieur de A dans E . On le note $\overset{\circ}{A}$.*

Corollaire 1.2.1 [?] *Soit (E, τ) un espace topologique. Alors on a*

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}.$$

Proposition 1.2.5 [?] *Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$. On a alors*

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &= \{x \in E, \exists V \in \mathcal{V}(x) : V \subset A\} \\ &= \{x \in E : A \in \mathcal{V}(x)\} \\ \bar{A} &= \{x \in E, \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \{\exists (x_n) \subset A \text{ tel que } x_n \rightarrow x\}. \end{aligned}$$

1.2.3 Espace séparé (ou de Hausdorff)

Définition 1.2.8 [?] Soit E un espace topologique. On dit que E est séparé, si quelque soient deux éléments distincts $x, y \in E$, il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Exemple 1.2.3 Si E muni de la topologie discrète alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des ouverts disjoints si x et y sont distincts, donc E est séparé.

1.2.4 Topologie induite

Définition 1.2.9 [?] Soit (E, τ) un espace topologique et A un sous ensemble de E . On appelle topologie induite sur A par τ la topologie τ_A dont la famille d'ouverts est donnée par :

$$\tau_A = \{O \cap A; O \in \tau\}.$$

Remarque 1.2.1 D'après la définition, les ouverts de A pour la topologie induite sont les traces sur A des ouverts de E .

1.2.5 Topologie générée par une famille d'ensembles

Définition 1.2.10 [?] Soient E un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$.

La topologie générée par \mathcal{F} est la plus petite topologie sur E qui contient \mathcal{F} et qu'on note $\tau(\mathcal{F})$ c-à-d :

- 1) $\tau(\mathcal{F})$ est une topologie sur E .
- 2) Si τ' est une topologie sur E telle que $\mathcal{F} \subset \tau'$ alors $\tau(\mathcal{F}) \subset \tau'$.

Le théorème suivant caractérise la topologie générée par une famille d'ensemble.

Théorème 1.2.2 [?] Soient E un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$.

Tout ouvert de la topologie générée par \mathcal{F} est l'union quelconque des intersections finie de \mathcal{F} . c-à-d

$$U \in \tau(\mathcal{F}) \text{ ssi } U = \bigcup \left(\bigcap_{j=1}^n A_j \right) \quad \setminus A_j \in \mathcal{F}.$$

1.2.6 Continuité

Définition 1.2.11 [?] *Soient E, F deux espaces topologiques, $x_0 \in E$ et $f : E \rightarrow F$ une application.*

On dit que f est continue en x_0 si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans F , il existe un voisinage U de x_0 dans E tel que $f(U) \subset V$.

Proposition 1.2.6 [?] *Soient E, F deux espaces topologiques et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *f est continue ;*
- b) *Pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est un ouvert dans E ;*
- c) *Pour tout fermé F de F , $f^{-1}(F)$ est un fermé dans E .*

Définition 1.2.12 [?]*(Homéomorphismes)*

$f : E \rightarrow F$ est un homéomorphisme si, et seulement si f est continue, bijective et f^{-1} est continue.

1.2.7 Espaces compacts

Définition 1.2.13 [?] *Soit E un espace topologique. E est dit compact si, et seulement si E est séparé et de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un recouvrement fini (i.e. pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ de E telle que $E = \cup_{i \in I} O_i$, il existe $J \subset I$ tel que J est finie et $E = \cup_{j \in J} O_j$).*

Proposition 1.2.7 [?] *Soit E un espace topologique. E est compact si, et seulement si E est séparé et de toute famille de fermés de E d'intersection vide, on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide.*

Définition 1.2.14 [?]*(Ensembles compacts)*

Soit E un espace topologique et $K \subset E$. On dit que K est un ensemble compact de E si, et seulement si K muni de la topologie induite (par celle de E) est compact.

Exemple 1.2.4 [?] *Tout ensemble fermé borné dans la topologie usuel est compact.*

Chapitre 2

Espaces vectoriels topologiques localement convexes

Dans ce chapitre, Nous allons développer la généralisation du concept des espaces de Banach dont la topologie est générée par une famille de semi-normes plutôt que par une seule norme.

2.1 Espaces vectoriels topologiques

2.1.1 Définitions et notations

Définition 2.1.1 [?],[?],[?] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} muni d'une topologie τ . Le couple (E, τ) est appelé espace vectoriel topologique et on écrit e.v.t, si les applications

$$+ : (E, \tau) \times (E, \tau) \rightarrow (E, \tau)$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times (E, \tau) \rightarrow (E, \tau)$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

sont continues.

Remarque 2.1.1 Les applications de la définition ci-dessus vérifient les deux conditions suivantes :

1. Pour tous $x, y \in E$ et tout voisinage U de $x + y$, il existe des voisinages V de x et W de y tels que

$$V + W \subset U.$$

2. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$, $z \in E$ et voisinage U de λz , il existe $r > 0$ et un voisinage V de z tels que

$$\{\alpha x : \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha - \lambda| \leq r, x \in V\} \subset U.$$

Exemple 2.1.1 [?] Un sous-espace vectoriel d'un e.v.t, muni de la structure de sous-espace topologique, est un e.v.t.

Définition 2.1.2 [?],[?],[?] Soit E un e.v.t sur \mathbb{K} .

- Pour tout $a \in E$, l'opérateur de translation est une application $T_a : E \rightarrow E$, défini par

$$T_a x = x + a.$$

- Pour tout $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$, l'opérateur de multiplication est une application $M_\alpha : E \rightarrow E$, défini par

$$M_\alpha x = \alpha x.$$

Proposition 2.1.1 [?],[?],[?] Les deux applications T_a et M_α sont homéomorphismes de E sur E .

Preuve. Les axiomes de l'espace vectoriel impliquent que l'inverses de T_a et M_α sont $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ et $(M_\alpha)^{-1} = M_{\frac{1}{\alpha}}$, alors T_a et M_α sont des bijections. La continuité supposée des opérations dans l'espace vectoriel implique que ces quatre applications

$(T_a, T_{-a}, M_\alpha$ et $M_{\frac{1}{\alpha}})$ sont continues. Par conséquent chacun d'eux est un homéomorphisme (une application continue dont l'inverse est également en continu). ■

Remarque 2.1.2 *Une conséquence immédiate de ce résultat est ce que la topologie est invariante par translation et multiplication ; c'est-à-dire, un ensemble $A \subset E$ est ouvert si et seulement si $T_a(A)$ (ou $M_\alpha(A)$) l'est aussi.*

Théorème 2.1.1 *[?],[?],[?]* Dans un e.v.t, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que

$$V + V \subset U.$$

Preuve. Comme $0 + 0 = 0$ et d'après la première assertion de la remarque ?? . On en déduit qu'il existe des voisinages V_1 et V_2 de 0 tels que $V_1 + V_2 \subset U$. Il suffit donc de prendre $V = V_1 \cap V_2$. ■

Le théorème suivant découle immédiatement de la proposition ??

Théorème 2.1.2 *[?],[?],[?]* Soit (E, τ) un e.v.t et $x \in E$. Alors

$$\mathcal{V}(x) = x + \mathcal{V}(0).$$

Lemme 2.1.1 *[?],[?],[?]* Si (E, τ) est un e.v.t, alors

1. L'intérieur d'une partie convexe est convexe.
2. L'adhérence d'une partie convexe est convexe.

Preuve.

1. Supposons que V est convexe. Soit $x, y \in \overset{\circ}{V}$. Ce qui désigne qu'il existe des voisinages U et W de 0 tels que

$$x + U \subset V, \text{ et } y + W \subset V.$$

Puisque V est convexe, on a

$$\begin{aligned} t(x + U) + (1 - t)(y + W) &= (tx + (1 - t)y) + U + (1 - t)W \\ &\subset V, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$tx + (1 - t)y \in \overset{\circ}{V},$$

donc $\overset{\circ}{V}$ est convexe.

2. La convexité de V implique que pour tout $t \in [0, 1]$

$$tV + (1 - t)V \subset V.$$

Soit $t \in [0, 1]$, donc

$$t\overline{V} = \overline{tV} \text{ et } (1 - t)\overline{V} = \overline{(1 - t)V}.$$

De sorte que

$$\begin{aligned} t\overline{V} + (1 - t)\overline{V} &= \overline{tV} + \overline{(1 - t)V} \\ &\subset \overline{tV + (1 - t)V} \\ &\subset \overline{V}, \end{aligned}$$

ce qui montre que \overline{V} est convexe.

■

2.1.2 Ensembles spéciales dans un e.v.t et propriétés

Définition 2.1.3 *[?],[?],[?]* Soit E un e.v.t. Une partie V de E est dite

Absorbante si pour tout $x \in E$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\lambda x \in V$ pour tous λ tels que $|\lambda| \leq \alpha$.

Équilibrée si $\lambda V \subset V$ pour tous λ tels que $|\lambda| \leq 1$.

Absolument convexe si, et seulement si, V est convexe et équilibrée.

Symétrique si $x \in V$ implique $(-x) \in V$, nommément $(-V) = V$.

Bornée si pour tout voisinage U de 0 contenant V , il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda > t$, $V \subset tU$.

Proposition 2.1.2 [?] Tout ensemble équilibré est symétrique.

Preuve. Soient E un e.v.t et V un ensemble de E .

Soit $x \in (-V)$, alors $\exists y \in V : x = -y$. Donc $x = \lambda y$ avec $\lambda = -1$. Puisque $|\lambda| = |-1| = 1 \leq 1$ et V est équilibré, alors $x \in V$.

Soit maintenant $x \in V$. D'après ce qui précède, $(-V) \subset V$, donc $-x \in V$. Puisque $x = -(-x)$, alors $x \in (-V)$, de sorte que $V \subset (-V)$. Ce qui prouve que V est symétrique. ■

Lemme 2.1.2 [?],[?],[?] Si (E, τ) est un e.v.t, alors

1. Si V est équilibré et $0 \in \overset{\circ}{V}$, alors $\overset{\circ}{V}$ est équilibré.
2. Si V est équilibré, alors \overline{V} l'est aussi.

Preuve.

1. Pour tout $0 < |\lambda| \leq 1$,

$$\lambda \overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{\lambda V} \subset \overset{\circ}{V}.$$

Si $\lambda = 0$, $\lambda \overset{\circ}{V} = \{0\}$, il faut nécessiter que $0 \in \overset{\circ}{V}$ pour la dernière être équilibré.

2. Puisque la multiplication par un scalaire est un homéomorphisme,

$$\lambda \overline{V} = \overline{\lambda V}.$$

Si V est équilibré, donc pour $|\lambda| < 1$,

$$\lambda \overline{V} = \overline{\lambda V} \subset \overline{V},$$

alors \overline{V} est équilibré.

■

Proposition 2.1.3 [?],[?],[?] Si (E, τ) est un e.v.t, alors tout voisinage de 0 est

- i) absorbant.
- ii) contient un voisinage de 0 équilibré.
- iii) contient un voisinage de 0 équilibré et fermé.

Preuve.

- i) Soit U un voisinage de 0. Avec la continuité de multiplication par un scalaire, il existe un $r > 0$ et un voisinage W de 0 donc $|\alpha| \leq r$ implique que pour tout $x \in W$ on a $\alpha x \in U$ qui montre que U est absorbant.
- ii) Supposons V un voisinage de 0. Puisque la multiplication par un scalaire est continue, il existe un voisinage ouvert W de 0 et $r > 0$ tel que $|\alpha| \leq r$ et $x \in W$ implique que $\alpha x \in V$.

Soit

$$A = \bigcup_{0 < |\alpha| < r} \alpha W.$$

On note que $A \subset V$, A est ouvert, et $0 \in A$. Si $x \in A$, et $0 < |\alpha'| \leq 1$, alors $x \in W$ avec $|\alpha| < r$ implique $\alpha'x \in \alpha\alpha'W$, et $0 < |\alpha'\alpha| < r$. Alors $0 < |\alpha'| \leq 1$ implique $\alpha'x \in A$.

Enfin, si $x \in A$ alors $0.x = 0 \in A$.

- iii) Si U est un voisinage de $0 = 0.0$, alors il existe $r > 0$ et un voisinage V de 0 tels que

$$W = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \leq r, x \in V\} \subset U$$

or W est équilibré et contient rV , donc est un voisinage de 0.

Cela étant, pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage équilibré V de 0 tel que

$$V + V \subset U.$$

On a alors $\bar{V} \subset U$ car, pour tout $x \in \bar{V}$, on a

$$(x + V) \cap V \neq \emptyset$$

et il existe donc $y, z \in V$ tel que $x + y = z$ donc tels que

$$x = z - y \in U.$$

Pour conclure, il suffit alors de vérifier que \bar{V} est équilibré, ce qui est direct par le lemme ??.

■

Proposition 2.1.4 [?],[?],[?] *Tout voisinage convexe de 0 contient un voisinage absolument convexe de 0.*

Preuve. Soit V un voisinage de 0 convexe et soit

$$U = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha V.$$

Puisque U est l'intersection d'ensembles convexes est convexe. Il est équilibré parce que pour tout $\beta \leq 1$,

$$\beta U = \bigcap_{|\alpha|=1} (\beta\alpha)V = \bigcap_{|\alpha|=1} (|\beta|\alpha)V = |\beta|U,$$

et par la convexité

$$|\beta|U = |\beta|U + (1 - |\beta|)\{0\} \subset U.$$

Puisque $0 \in U$, U est équilibré ; il est aussi convexe. ■

2.1.3 Limite, suite de Cauchy et e.v.t complets

Définition 2.1.4 [?](Limite)

Soit (E, τ) un e.v.t séparé (de Hausdorff). Une suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ de E est dite conver-

gente vers $x \in E$ si pour tout voisinage V de x ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n \in V.$$

Remarque 2.1.3 La définition précédente est équivalente à :

$$\forall V \in \mathcal{V}(0), \exists n_0 \text{ tel que } , \forall n \geq n_0 : x_n - x_0 \in V.$$

Définition 2.1.5 [?]/(Suite de Cauchy)

Soient (E, τ) un e.v.t et $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$. Une suite $\{x_n\}_{n \geq 1}$ est de Cauchy si

$$\forall V \in \mathcal{V}(0), \exists n_0 \text{ tel que } , \forall m, n \geq n_0 : x_n - x_m \in V.$$

Définition 2.1.6 [?]/(e.v.t.complet)

Soit (E, τ) un e.v.t. E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

2.2 Espace vectoriel topologique localement convexe

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 [?],[?],[?] On appelle espace vectoriel topologique localement convexe et on écrit e.v.t.l.c, tout e.v.t (E, τ) dont 0 admet une base de voisinages formée d'ensembles convexes ; on dit que τ est une topologie localement convexe sur E .

Théorème 2.2.1 [?],[?],[?] Si (E, τ) est un e.v.t, les énoncés suivants sont équivalents :

1. τ est une topologie localement convexe ;
2. 0 admet une base de voisinages absolument convexes ;
3. tout point admet une base de voisinages convexes ;

Preuve. (2) implique (1) et (3) implique (1) sont triviaut par la définition ci-dessus. Puisque tout tanslaté d'une partie convexe est convexe (la propriété ??-(??)), alors

(1) entraîne (3).

Maintenans on va montrer que (1) implique (2). En fait, pour tout voisinage U de 0, il existe d'une part un voisinage convexe V de 0 inclus dans U et d'autre part un voisinage équilibré W de 0 inclus dans V d'après la proposition ???. Dans ces conditions, on a

$$W \subset Co(W) \subset V \subset U,$$

or l'inclusion $W \subset Co(W)$ est un résultat immédiate de définition ???, et pour conclure, il suffit de montrer que $Co(W)$ est absolument convexe. Immédiatement, $Co(W)$ est convexe par définition et aussi équilibré car, avec des notation claires par elles-même :

Sopposons $y \in Co(W)$ et $|c| \leq 1$. Choisissons $x_1, \dots, x_n \in W$ avec

$$y = \sum_i \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1.$$

Alors

$$cy = \sum_i \lambda_i cx_i = c \sum_i \lambda_i x_i \in Co(W)$$

lorsque $cx_i \in W$ (W est équilibrée). ■

Théorème 2.2.2 [?] *Dans un e.v.t.l.c, tout point admet une base de voisinages convexes ouverts (resp. fermés).*

Preuve. Puisque la continuité du translation conserve la convexité par la propriété ??-(??) et lorsque l'intérieur d'un convexe est un convexe et ouvert par définition (resp. l'adhérence d'un convexe est un convexe fermé) d'après le lemme ???. Alors tout point admet une base de voisinages convexes ouvert (resp. fermé) sur E . ■

Proposition 2.2.1 [?] *Dans un e.v.t.l.c réel, 0 admet une base de voisinages ouverts convexes symétriques.*

Preuve. En effet, si V est un voisinage ouvert convexe de 0, alors $V \cap (-V)$ est encore un voisinage ouvert convexe de 0, qui est symétrique et contenu dans V . ■

2.3 Topologie générée par une famille de semi-normes

2.3.1 Définitions et propriétés

Semi-normes

Définition 2.3.1 [?],[?],[?] Soit E un espace vectoriel.

Une semi-norme sur E est une fonction $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Exemple 2.3.1 [?] Pour toute forme linéaire $\mu : E \rightarrow \mathbb{K}$, la fonction $\varphi \mapsto |\mu(\varphi)|$ est une semi-norme sur E . Par exemple, si X est un ensemble et $x \in X$, alors la forme linéaire d'évaluation en x

$$\begin{aligned}\varepsilon_x : \mathbb{K}^X &\rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto \varphi(x)\end{aligned}$$

définit une semi-norme sur \mathbb{K}^X

$$\begin{aligned}\mathbb{K}^X &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \varphi &\mapsto |\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Définition 2.3.2 [?] Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E , alors pour tous $x \in E$ et $r > 0$, les ensembles

$$B_p(x, r) = \{y \in E; p(y - x) < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B}_p(x, r) = \{y \in E; p(y - x) \leq r\}$$

sont appelés semi-boule de centre x et de rayon r ouverte et fermé respectivement pour la semi-norme p .

Remarque 2.3.1 Dans le cas où $x = 0$, $B_p(0, r)$ et $\overline{B}_p(0, r)$ sont appelés semi-boules centré ouverte et fermé respectivement pour la semi-norme p .

Proposition 2.3.1 [?] *Si p est une semi-norme sur l'espace vectoriel E , alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $B_p(x, r) = x + B_p(0, r)$ et $\overline{B}_p(x, r) = x + \overline{B}_p(0, r)$.
2. $B_p(0, r) = rB_p(0, 1)$ et $\overline{B}_p(0, r) = r\overline{B}_p(0, 1)$.

Preuve.

1) soit $z \in B_p(x, r)$. On va montrer d'abord que

$$z \in x + B_p(0, r).$$

Puisque $p(z - x) < r$ (car $z \in B_p(x, r)$), alors

$$(z - x) \in B_p(0, r),$$

c'est-à-dire

$$z \in x + B_p(0, r),$$

donc

$$B_p(x, r) \subset x + B_p(0, r). \tag{2.1}$$

Soit maintenant $z \in x + B_p(0, r)$, alors

$$\exists y \in B_p(0, r) : z = x + y,$$

donc

$$p(z - x) = p(x + y - x) = p(y) < r.$$

ce qui entraîne que $z \in B_p(x, r)$. Donc

$$x + B_p(0, r) \subset B_p(x, r). \tag{2.2}$$

D'après (??) et (??), on obtient

$$B_p(x, r) = x + B_p(0, r).$$

De même on peut montrer que $\overline{B}_p(x, r) = x + \overline{B}_p(0, r)$.

2) Soit $x \in B_p(0, r)$ alors $p(x) < r$, de sorte que

$$\frac{1}{r}p(x) < 1,$$

c'est-à-dire

$$p\left(\frac{1}{r}x\right) < 1$$

donc

$$\frac{1}{r}x \in B_p(0, 1).$$

Alors $x \in rB_p(0, 1)$. Ce qui signifie que

$$B_p(0, r) \subset rB_p(0, 1). \tag{2.3}$$

Soit maintenant $x \in rB_p(0, 1)$ c'est-à-dire

$$\frac{x}{r} \in B_p(0, 1)$$

implique

$$p\left(\frac{x}{r}\right) < 1,$$

de sorte que $p(x) < r$ alors $x \in B_p(0, r)$.

Donc

$$rB_p(0, 1) \subset B_p(0, r). \tag{2.4}$$

De (??) et (??), on aura

$$rB_p(0, 1) = B_p(0, r).$$

De même va on montrer que $r\overline{B}_p(0, 1) = \overline{B}_p(0, r)$.

■

Proposition 2.3.2 [?],[?],[?] Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel E .

Alors

1. p est symétrique.
2. $p(0) = 0$.
3. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
4. $p(x) \geq 0$.

Preuve.

1. $p(x - y) = p(-(y - x)) = |-1|p(y - x) = p(y - x)$.
2. $p(0) = p(0.x) = 0.p(x) = 0$.
3. Cette assertion découle des inégalités suivantes

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x + y - y) \\ &\leq p(y) + p(x - y), \end{aligned}$$

et comme p est symétrique, on aura

$$\begin{aligned} p(y) &\leq p(x) + p(y - x) \\ &= p(x) + p(x - y), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$p(x) - p(y) \leq p(x - y)$$

et

$$p(y) - p(x) \leq p(x - y)$$

ce qui est équivalent à

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

4. Pour tout $x \in E$, on a alors

$$0 = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x).$$

■

Proposition 2.3.3 [?],[?],[?] Soit E un e.v.t et p une semi-norme sur E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. p est continue ;
2. $\{x; p(x) < 1\}$ est ouvert ;
3. $\{x; p(x) < 1\}$ est un voisinage de 0 ;
4. $\{x; p(x) \leq 1\}$ est un voisinage de 0 ;
5. p est continue en 0.

Preuve. Pour cela on va montrer d'abord que (1) implique (2) :

Puisque $I =] - \infty, 1[$ est ouvert, alors $p^{-1}(I) = \{x; p(x) < 1\}$ est ouvert par la continuité de p .

(2) implique (3) :

Supposons $\{x; p(x) < 1\}$ est ouvert. Comme $0 \in \{x; p(x) < 1\}$ et tout ouvert est un voisinage de chacun de ses points, alors $\{x; p(x) < 1\}$ est un voisinage de 0.

(3) implique (4) :

Il clair que $\{x; p(x) < 1\} \subset \{x; p(x) \leq 1\}$. Donc, on en déduit que $\{x; p(x) \leq 1\}$ est un voisinage de 0.

(4) implique (5) :

En utilisant la continuité de l'addition de l'e.v.t E et la remarque ??, on obtient directement que p continue en 0.

(5) implique (1) :

Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Il existe un voisinage V de 0 tel que $y \in V$ entraîne $p(y) < \epsilon$. Si $z \in x + V$ alors $z - x \in V$ de sorte que

$$|p(z) - p(x)| \leq p(z - x) < \epsilon,$$

d'après l'inégalité triangulaire. ■

Propriété 2.3.1 [?]/ L'ensemble $\{x; p(x) < 1\}$ est absolument convexe et absorbant.

Preuve.

- Si $p(x) < 1$ alors, pour tout $|\lambda| \leq 1$,

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x) < 1,$$

qui démontre que $\{x; p(x) < 1\}$ est équilibrée.

- Si $x, y \in \{x; p(x) < 1\}$ alors, pour tout $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} p(tx + (1-t)y) &\leq tp(x) + (1-t)p(y) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$tx + (1-t)y \in \{x; p(x) < 1\}.$$

donc M est convexe.

- Pour tout $x \in E$ et $\alpha > p(x)$, $p(\frac{x}{\alpha}) < 1$ i.e $x \in \alpha\{x; p(x) < 1\}$, donc $\{x; p(x) < 1\}$ est absorbant.

■

Définition 2.3.3 [?],[?] Une famille $\mathcal{P} = \{p_i, i \in I\}$ de semi-normes sur un espace vectoriel E est dite séparé si

$$\forall x \in E - \{0\}, \exists i \in I; p_i(x) \neq 0.$$

Exemple 2.3.2 [?] Soit $E = C([0, 1], \mathbb{C})$ et on considère

$$\mathcal{P} = \{p_x : x \in \mathbb{Q} \cup [0, 1]\},$$

où

$$p_x(f) = |f(x)|, \forall f \in E.$$

Si $0 \neq f \in E$, alors il existe $y \in [0, 1]$ de sorte que $f(y) \neq 0$. Par la continuité de f , il existe un voisinage V tel que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in V$. Alors il existe un nombre rationnel $q \in V$ afin que $0 \neq f(q)$ et donc $p_q(f) \neq 0$. Donc \mathcal{P} est une famille de semi-normes séparante.

Définition 2.3.4 [?],[?],[?](Jauge ou fonctionnelle de Minkowski d'un ensemble convexe)

Soit E un e.v.t réel, et V un voisinage convexe de 0. On appelle jauge ou fonctionnelle de Minkowski de V , l'application p_V définie par $p_V : E \rightarrow [0, +\infty]$

$$p_V(x) := \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\}. \quad (2.5)$$

Remarque 2.3.2 p_V peut être définie aussi par

$$p_V(x) := \inf\{t > 0 : x \in tV\}.$$

Propriété 2.3.2 [?],[?],[?] Soit E un e.v.t réel, et V un voisinage convexe de 0. La jauge vérifie les propriétés suivantes :

1. L'application p_V est continue.
2. $\{x \in E; p_V < 1\} \subset V \subset \{x \in E; p_V \leq 1\}$.
3. Si V est ouvert, alors

$$V = \{x \in E; p_V(x) < 1\}.$$

4. Si V est symétrique, alors la jauge de V est une semi-norme sur E .

Preuve.

1. Comme pour les normes, on déduit de la sous-additivité de p_V que

$$\forall x, y \in E, |p_V(x) - p_V(y)| \leq p_V(x - y).$$

Donc la continuité de p_V en un point quelconque de E découle de sa continuité en 0. On va montrer la continuité de p_V en 0. Soit $\epsilon > 0$, comme V est un voisinage de 0 et puisque

$$\frac{1}{\epsilon}x \longrightarrow 0 \text{ quand } x \longrightarrow 0,$$

il existe un voisinage W de 0 tel que,

$$\forall x \in W, \frac{1}{\epsilon}x \in V.$$

Par définition de la jauge, on a alors

$$p_V(x) \leq \epsilon, \forall x \in W.$$

2. Si $x \in V$, alors

$$1 \in \{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\},$$

entraîne

$$\begin{aligned} p_V(x) &= \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in V\} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Maintenant si $p_V < 1$, alors

$$\exists t \in]0, 1[\text{ tel que } \frac{1}{t}x \in V.$$

Puisque V est convexe et $0 \in V$ on a

$$t\left(\frac{1}{t}x\right) + (1-t).0 \in V$$

donc $x \in V$.

3. Pour tout $x \in V$, comme V est ouvert, si ϵ est assez petit, alors

$$(1 + \epsilon)x \in V,$$

donc

$$\begin{aligned} p_V(x) &= \inf\{t \geq 0 : \frac{1}{t}x \in V\} \\ &\leq \frac{1}{1 + \epsilon} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $x \in E$ et $p_V(x) < 1$, alors

$$\exists t \in]0, 1[\text{ tel que } \frac{1}{t}x \in V,$$

et donc par convexité

$$x = t\left(\frac{1}{t}x\right) + (1-t).0 \in V.$$

4. Pour montrer que p_V est une semi-norme, on va montrer d'abord que p_V est sous-additive.

Comme V est un voisinage de 0, pour tout x dans E , pour t assez grand, $\frac{1}{t}$ dans V , donc p_V est bien défini. Pour tout $x, y \in E$, on peut écrire

$$x = (p_V(x) + \epsilon)u \text{ et } y = (p_V(y) + \epsilon)v$$

avec $u, v \in V$. Alors

$$x + y = (p_V(x) + \epsilon + p_V(y) + \epsilon)w$$

où

$$w = \frac{1}{p_V(x) + \epsilon + p_V(y) + \epsilon}((p_V(x) + \epsilon)u + (p_V(y) + \epsilon)v) \in V,$$

Donc

$$p_V(x + y) \leq p_V(x) + \epsilon + p_V(y) + \epsilon.$$

Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire on obtient sous-additivité. De plus, si $V = -V$ on aura

$$p_V(x) = p_V(-x)$$

donc p_V est une semi-norme, ce qu'il fallait démontrer.

■

Théorème 2.3.1 [?] Soit E un e.v.t. Soit V un voisinage de 0, ouvert, absolument convexe. Alors il existe une unique semi-norme p telle que

$$V = \{x \in E; p(x) < 1\}. \quad (2.6)$$

Preuve. Soit $p = p_V$ défini par (??) rappelons que

$$p_V(x) := \inf\{t > 0 : x \in tV\}.$$

1. On va montrer que p_V est bien une semi-norme.

(a) Maintenant on va montrer la sous-additivité :

Soient $x, y \in E$. Pour $\epsilon > 0$, posons

$$t = p_V(x) + \epsilon \quad \text{et} \quad t = p_V(y) + \epsilon,$$

de sorte que, par définition de l'infimum,

$$\exists t_0 < t \text{ tel que } x \in t_0V.$$

Puisque V est équilibré, $t_0V \subset tV$ donc $\frac{x}{t} \in V$ alors $x \in tV$. De même, $\frac{y}{s} \in V$ de sorte que $y \in sV$. Soit

$$u = \frac{t}{t+s} \in [0, 1].$$

Par convexité de V , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+s}(x+y) &= \frac{\frac{x}{t}t + \frac{y}{s}s}{t+s} \\ &= \left(\frac{t}{t+s}\right)\frac{x}{t} + \left(\frac{s}{t+s}\right)\frac{y}{s} \\ &= \frac{u}{t}x + \left(\frac{s+t-t}{t+s}\right)\frac{1}{s}y \\ &= \left(u\frac{x}{t} + (1-u)\frac{y}{s}\right) \in V, \end{aligned}$$

donc

$$p_V(x+y) \leq t+s.$$

Autrement dit

$$p_V(x+y) \leq p_V(x) + p_V(y) + 2\epsilon,$$

ce qui donne le résultat.

(b) Si $s \geq 0$, il est clair que

$$p_V(sx) = sp_V(x).$$

Puisque V est équilibré on voit facilement que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda V = |\lambda|V$.

Donc

$$\lambda x \in tV \equiv x \in \frac{t}{|\lambda|}V,$$

alors

$$p_V(\lambda x) = |\lambda|p_V(x).$$

2. Même preuve de la propriété ??-(??).
3. On va montrer enfin l'unicité d'une telle semi-norme.

Si q est une semi-norme avec

$$V = \{x; p_V(x) < 1\} = \{x; q_V(x) < 1\},$$

on a,

$$\forall x \in E, q_V\left(\frac{x}{q_V(x)}\right) = 1$$

donc $\frac{x}{q_V(x)} \notin V$. D'autre part, $p_V\left(\frac{x}{q_V(x)}\right) \geq 1$, c'est à dire

$$p_V(x) \geq q_V(x).$$

Evidemment on montre de la même façon

$$q_V(x) \geq p_V(x)$$

donc

$$p_V(x) = q_V(x),$$

d'où l'unicité.

■

Corollaire 2.3.1 [?], [?], p vérifiant (??) est une jauge de l'ouvert convexe V .

Théorème 2.3.2 [?], [?], Soit \mathcal{V} une base de voisinage de 0 composée de voisinages absolument convexes. Alors,

1. $V = \{x \in E; p_V(x) < 1\}$ pour tout $V \in \mathcal{V}$.
2. $\{p_V, V \in \mathcal{V}\}$ est une famille de semi-normes continues et séparante.

Preuve.

1. Si $x \in V$, alors il existe $t < 1$ tel que $\frac{x}{t} \in V$.
Il s'ensuit que $p_V < 1$. Si $x \notin V$ l'inclusion $\frac{x}{t} \in V$ implique que $t \geq 1$, car V est équilibré, et donc $p_V(x) \geq 1$.
2. On sait que p_V est une semi-norme par la propriété ??-(??) du jauge. On fixe maintenant $\epsilon > 0$. Si $x - y \in \epsilon V$, alors il s'ensuit du point (??) de la proposition ?? que

$$|p_V(x) - p_V(y)| \leq p_V(x - y) < \epsilon,$$

d'où on conclut que p_V est continu. Si $x \in E$ est un élément non nul, alors il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $x \notin V$, et donc $p_V(x) \geq 1$. On conclut que la famille $\{p_V\}$ est séparée.

■

Définition 2.3.5 [?] Soient E un espace vectoriel et

$$\mathcal{P} = \{p_i; i \in I\} \tag{2.7}$$

une famille de semi-normes. La topologie générée par la famille $\mathcal{P} = \{p_i; i \in I\}$ est la topologie générée (selon la définition ??) par la famille d'ensemble

$$\{B_{p_i}(x, r) : x \in E, r > 0\}.$$

C-à-d, pour

$$\mathcal{F} = \{B_{p_{i,j}}(x, r) : i \in I, r > 0, x \in E\} \tag{2.8}$$

la topologie générée par \mathcal{P} est $\tau(\mathcal{F})$.

Théorème 2.3.3 [?] Soit $\mathcal{P} = \{p_i; i \in I\}$, une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E . Alors

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^n B_{p_{i_j}}(x, r) : n \in \mathbb{N}, i_j \in I, r > 0, x \in E \right\},$$

forme une base d'ouverts formée d'ensembles convexes pour la topologie générée par la famille de semi-normes \mathcal{P} .

Preuve. Supposons que U est un ouvert pour la topologie générée par la famille \mathcal{P} et soit $x \in U$. Pour montrer que \mathcal{B} est une base de topologie, on va montrer qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq U$. Par la caractérisation de la topologie générée par une famille d'ensembles (donné par le théorème ??) U est l'union quelconques des intersections finis d'éléments de \mathcal{F} donné par (??). Par conséquent, on a

$$x \in \bigcup_{j=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n B_{p_{i_j}}(x_j, r_j) \right),$$

pour $n \in \mathbb{N}, i_j \in I, r_j > 0$, et $x_j \in E$. Alors

$$x \in \bigcap_{j=1}^n B_{p_{i_j}}(x_j, r_j),$$

donc pour tout $j = \overline{1, n}$ $p_{i_j}(x - x_j) < r_j$. Par suite, si on pose

$$r = \min\{r_j - p_{i_j}(x - x_j), j = 1, \dots, n\},$$

alors on obtient

$$B_{p_{i_j}}(x, r) \subseteq B_{p_{i_j}}(x_j, r_j), j = 1, \dots, n.$$

Par suite, il suffit de prendre

$$B = \bigcap_{j=1}^n B_{p_{i_j}}(x, r),$$

et évidemment $x \in B \subseteq U$.

Il reste à montrer que les éléments de \mathcal{B} sont convexes.

Pour cela, on commence par montrer que $B_{p_i}(x, r)$ est convexe pour $p_i \in \mathcal{P}, x \in E$ et $r > 0$. Soient $y, z \in B_{p_i}(x, r)$ alors

$$p_i(x - z) < r \quad \text{et} \quad p_i(x - y) < r,$$

et pour tout $0 \leq t \leq 1$, on utilise la définition ?? d'une fonction convexe, donc

$$\begin{aligned} p_i((ty + (1 - t)z) - x) &= p_i(t(y - x) + (1 - t)(z - x)) \\ &\leq tp_i(y - x) + (1 - t)p_i(z - x) \\ &< tr + (1 - t)r \\ &= r, \end{aligned}$$

donc

$$(ty + (1 - t)z) \in B_{p_i}(x, r).$$

Il en résulte que $B_{p_i}(x, r)$ est convexe. Enfin, la convexité des éléments de \mathcal{B} résulte immédiatement de la proposition ??-(??). ■

Le corollaire suivant découle directement de la proposition ?? et le théorème ?? :

Corollaire 2.3.2 [?], [?] *La topologie générée par une famille de semi-normes est localement convexe.*

Proposition 2.3.4 [?], [?] *Un e.v.t.l.c E générée par la famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_i; i \in I\}$ est séparé si, et seulement si, l'intersection des voisinages de 0 est réduite au singleton $\{0\}$. Autrement dit, si la famille de semi-normes est séparé.*

Preuve. Supposons E séparé; si x est un élément non nul de E , alors on peut trouver un voisinage $V \in \mathcal{V}(0)$ tel que $x \notin V$, et donc $p_i(x) \geq 1$ ce qui signifie que x appartient à l'intersection des voisinages de 0.

Inversement, si

$$\bigcap_i \{x; p_i(x) = 0\} = \{0\}$$

et $x \neq 0$, alors x n'appartient pas à cette intersection ; c'est-à-dire il existe un indice i_0 tel que $p_{i_0}(x) \neq 0$. Posons $\eta = p_{i_0}(x)$. Immédiatement, $x \notin \eta V$; donc ηV est un voisinage ouvert de 0 qui sépare bien x de 0. ■

Théorème 2.3.4 [?] Soient E un e.v.t.l.c générée par une famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_i, i \in I\}$, $\{x_n\} \subset E$ et $x \in E$. Alors

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \text{ ssi } \forall i \in I, p_i(x - x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Preuve. On suppose que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, soit $i \in I$ (fixé) et $\epsilon > 0$. Alors

$$B_i(x, \epsilon) = \{y \in E : p_i(x - y) < \epsilon\}$$

est un voisinage ouvert de x .

Puisque $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n \in B(x, \epsilon).$$

Donc,

$$\forall n \geq n_0 : p_i(x - x_n) < \epsilon,$$

et par suite $p_i(x - x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Supposons maintenant que $p_i(x - x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ pour tout $i \in I$.

Soit U un voisinage ouvert de x , donc d'après le théorème ?? il existe $r > 0$ et

$i_1, \dots, i_p \in I$ tel que

$$x \in \bigcap_{j=1}^p B_{i_j}(x, r) \subset U.$$

On a pour tout

$$j = \overline{1, p} : p_{i_j}(x - x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc, pour tout

$$j = \overline{1, p}, \exists n_j \in \mathbb{N}, \forall n > n_j : p_{i_j}(x - x_n) < r.$$

Ainsi pour

$$n_0 = \max_{1 \leq j \leq p} n_j : \forall n \geq n_0 : p_i(x - x_n) < r,$$

et ceci pour tout $j = \overline{1, p}$. Donc

$$x_n \in \bigcap_{j=1}^n B_{i_j}(x, r) \subset U, \forall n \geq n_0,$$

par suite $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$. ■

2.4 Equivalence entre la topologie d'un e.v.t.l.c et celle générée par une famille de semi-normes

Théorème 2.4.1 [?],[?],[?] Une topologie sur un espace vectoriel E est localement convexe si, et seulement si, elle est générée par une famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_i; i \in I\}$ sur E .

Preuve. On voit que par le corollaire ?? la topologie générée par une famille de semi-normes \mathcal{P} sur E est localement convexe. Réciproquement, soit E un e.v.t.l.c et notons τ sa topologie. On pose

$$B := \{V \in \tau : V \text{ convexe symétrique}, 0 \in V\}.$$

Comme τ est une topologie localement convexe, alors 0 admet une base de voisinages convexes et avec la définition de B on en déduit qu'il forme une base de voisinages de 0. De plus, $x + B$ est une base de voisinages de x (la proposition ??), pour tout $x \in E$. On pose maintenant

$$\mathcal{P} := \{p_V, V \in B\}$$

où p_V la jauge de V . On sait que \mathcal{P} est une famille de semi-normes sur E d'après la propriété ??-(??) de jauge, on va montrer que τ coïncide avec la topologie générée par \mathcal{P} . Soit $U \in \tau$ et $x \in U$, il existe $V \in B$ tel que

$$x + V \subset U$$

ce qui est équivalent à

$$x + B_{p_V}(0, 1) \subset U,$$

par la définition ?? équivaut à

$$B_{p_V}(x, 1) \subset U,$$

immédiate de la proposition ?? avec U ouvert pour la topologie générée par \mathcal{P} .

Soit maintenant U ouvert dans la topologie générée par \mathcal{P} , pour tout $x \in U$, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$, V_1, \dots, C_k dans B et $r > 0$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^k B_{p_{V_i}}(x, r) \subset U$$

ce qui est encore équivalent à

$$\bigcap_{i=1}^k (x + B_{p_{V_i}}(0, r)) \subset U, \tag{2.9}$$

par la première assertion de la proposition ?? et aussi avec la deuxième assertion de la même proposition, (??) ce peut être écrit comme suit

$$x + r \bigcap_{i=1}^k B_{p_{V_i}}(0, 1) \subset U,$$

quand on utilise la définition ?? du semi-boules on aura

$$x + r \bigcap_{i=1}^k V_i \subset U,$$

ce qui donne

$$x + V \subset U,$$

et puisque $V \in B$, on en déduit que $U \in \tau$. ■

Voici ensuite quelques exemples usuels d'e.v.t.l.c :

2.5 Exemples

Exemple 2.5.1 [?],[?]

- 1) *Tout espace vectoriel normé réel ou complexe est e.v.t.l.c. En fait, dans cet espace la famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_i, i \in I\}$ est réduite à une seule norme.*
- 2) *Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,*

$$\begin{aligned} p_m : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup\{|x_i| : i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

est une semi-norme sur E et $\mathcal{P} = \{p_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ famille de semi-normes sur E . L'espace E est e.v.t.l.c (E, \mathcal{P}) .

- 3) *Les espaces de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions lisses à décroissance rapide sur \mathbb{R}^d ,*

$$S(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\},$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et la topologie générée par la famille de semi-

normes $\mathcal{P} = \{p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}$ de $S(\mathbb{R}^d)$ donné par

$$p_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)|, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Alors $(S(\mathbb{R}^d), \mathcal{P})$ est un e.v.t.l.c. séparé

4) Soit Ω un sous ensemble ouvert de \mathbb{R} de topologie euclidienne, l'espace $C(\Omega)$ des fonctions continues de Ω dans \mathbb{R} avec le soi-disant topologie de la convergence uniforme sur les ensembles compacts est un e.v.t.l.c.

Cette topologie est générée par la famille $\mathcal{P} = \{p_K; K \in \mathcal{K}\}$ de toutes les semi-normes sur $C(\Omega)$ donnés par

$$p_K(x) := \sup_{t \in K} |x(t)| \tag{2.10}$$

Notons que dans cet exemple l'ensemble des indices I introduit dans (??) est l'ensemble de tous les compacts sur Ω noté par \mathcal{K} .

En outre, $(C(\Omega), \tau_{\mathcal{P}})$ est séparé (de Hausdorff), parce que la famille \mathcal{P} est clairement séparante.

Remarque 2.5.1 La semi-norme p_K dans (??) peut être remplacé par toute autre norme sur $C(K)$.

Chapitre 3

Une version de théorie du point fixe dans les e.v.t.l.c et application

Dans se chapitre, nous allons exposé l'une des version de la théorie du point fixe dans les e.v.t.l.c dû à Sehgal. V. M. and Singh. S. P [?]. Nous allons ensuite, appliquer cette version à la résolution d'un problème différentiel à valeurs initiales dans un domaine de temps non borné.

3.1 Définitions et notations

Dans tout ce qui suit, E est un e.v.t.l.c et \mathcal{B} est une base de voisinages de 0 composé d'ensembles absolument convexe ouvert de E . Pour tout $V \in \mathcal{B}$, p_V est la jauge de V définie par (??). Pour $x, y \in E$, (x, y) est le segment défini par

$$(x, y) = \{z \in E : z = tx + (1 - t)y, 0 < t < 1\}.$$

Définition 3.1.1 [?] Soit S un sous ensemble non vide de E .

L'application $F : S \rightarrow E$ est une V -contraction ($V \in \mathcal{B}$) si et seulement si pour tout

$\epsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\epsilon, V) > 0$ tel que si $x, y \in S$ et si

$$x - y \in (\epsilon + \delta)V, \quad \text{alors } F(x) - F(y) \in \epsilon V. \quad (3.1)$$

Si $F : S \rightarrow E$ est une V -contraction pour tout $V \in \mathcal{B}$, alors F est dite une \mathcal{B} -contraction.

Remarque 3.1.1 [?] Si F est une \mathcal{B} -contraction, alors F est continue.

Lemme 3.1.1 [?] Soit $F : S \rightarrow E$ une \mathcal{B} -contraction, alors pour tout $V \in \mathcal{B}$,

$$\begin{cases} p_V(F(x) - F(y)) < p_V(x - y) & \text{si } p_V(x - y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $x, y \in S$ et supposons $p = p_V, p(x - y) = \epsilon > 0$. Alors $x - y \in (\epsilon + \delta)V$ pour chaque $\delta > 0$ et en particulier $x - y \in (\epsilon + \delta_0)V$ où $\delta_0 = \delta(V, \epsilon)$. De plus par (??) $(F(x) - F(y)) < \epsilon V$. Si $\epsilon = 0$, alors $x - y \in \epsilon V$ pour tout $\epsilon > 0$ et donc par (??) $(F(x) - F(y)) < \epsilon V$, ce qui implique que $p(F(x) - F(y)) = 0$. ■

3.2 Théorème du point fixe

Théorème 3.2.1 [?] Soient E un e.v.t.l.c complet et séparé dont \mathcal{B} est une base de voisinages convexes de 0, S un sous ensemble complet non vide de E et $F : S \rightarrow E$ une application \mathcal{B} -contractive. On suppose que F satisfait la propriété suivante

$$\forall x \in S \text{ avec } F(x) \notin S, \exists z \in (x, F(x)) \cap S \text{ tel que } F(z) \in S. \quad (3.2)$$

Alors F admet un point fixe unique dans S .

Preuve.

Existence :

Soit $x_0 \in S$. La condition (??) permet de définir la suite $\{x_n\} \subseteq S$ par induction

comme suit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n) & \text{si } F(x_n) \in S \\ x_{n+1} \in (x_n, F(x_n)) \cap S \text{ t.q. } F(x_{n+1}) \in S & \text{si } F(x_n) \notin S. \end{cases} \quad (3.3)$$

Il en résulte que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un $t_n \in [0, 1)$ satisfaisant

$$x_{n+1} = t_n x_n + (1 - t_n) F(x_n). \quad (3.4)$$

On va montrer que la suite $\{x_n\}$ définie par (??), satisfait

$$(a) \quad x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0. \quad (b) \quad x_n - F(x_n) \longrightarrow 0. \quad (3.5)$$

Notons que par (??), on a

$$x_{n+1} - x_n = (1 - t_n)(F(x_n) - x_n), \text{ et} \quad (3.6)$$

$$F(x_n) - x_{n+1} = t_n(F(x_n) - x_n). \quad (3.7)$$

Donc pour un $V \in \mathcal{B}$ avec $p = p_V$, il en résulte du lemme ?? que

$$\begin{aligned} p(F(x_{n+1}) - x_{n+1}) &\leq p(F(x_{n+1}) - F(x_n)) + p(F(x_n) - x_{n+1}) \\ &\leq p(x_{n+1} - x_n) + t_n(F(x_n) - x_{n+1}). \end{aligned}$$

On a par (??)

$$x_{n+1} - x_n = (1 - t_n)(F(x_n) - x_n) - t_n(F(x_n) - x_n)$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} p(F(x_{n+1}) - x_{n+1}) &\leq p(F(x_n) - x_n) - t_n(F(x_n) - x_n) + t_n(F(x_n) - x_n) \\ &= p(F(x_n) - x_n), \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $\{p(F(x_n) - x_n)\}$ est une suite décroissante de \mathbb{R}_+ et donc pour chaque $p = p_V$, $V \in \mathcal{B}$, il existe un $r(V) \geq 0$ avec

$$r(V) \leq p(F(x_n) - x_n) \longrightarrow r(V) \geq 0. \quad (3.8)$$

Montrons que $r(V) = 0$. Supposons que $r(V) > 0$. On choisit $\delta = \delta(r(V), V) > 0$ satisfaisant (??). Donc, par (??), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(F(x_n) - x_n) < r(V) + \delta$$

pour tout $n \geq n_0$.

Maintenant, on choisit un $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$ tel que $x_{m+1} = F(x_m)$. Alors pour ce m ,

$$p(x_m - x_{m+1}) = p(x_m - F(x_m)) < r(V) + \delta$$

et donc par (??)

$$p(x_{m+1} - F(x_{m+1})) = p(F(x_m) - F(x_{m+1})) < r(V),$$

qui contredit (??). Alors $r(V) = 0$ pour tout $V \in \mathcal{B}$ et cela implique que la suite

$$x_n - F(x_n) \longrightarrow 0.$$

Cela établit (??), suit par (??).

On va maintenant montrer que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans E . On suppose l'opposé. Soit pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = \{x_n : n \geq k\}.$$

Donc par l'hypothèse il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que

$$A_k - A_k \not\subseteq V$$

pour $k \in \mathbb{N}$. On choisit un ϵ avec $0 < \epsilon < 1$ et un δ avec $0 < \delta < \delta(\epsilon, V)$ satisfaisant $\epsilon + \delta < 1$. Il en résulte que

$$A_k - A_k \not\subseteq (\epsilon + \frac{\delta}{2})V$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers $n(k)$ et $m(k)$ avec $k \leq n(k) < m(k)$ tel que

$$x_{n(k)} - x_{m(k)} \not\subseteq (\epsilon + \frac{\delta}{2})V. \quad (3.9)$$

Soit $m(k)$ le moins entier dépassant $n(k)$ satisfaisant (??). Donc par (??)

$$\begin{aligned} x_{n(k)} - x_{m(k)} &= (x_{n(k)} - x_{m(k)-1}) + (x_{m(k)-1} - x_{m(k)}) \\ &\in (x_{m(k)-1} - x_{m(k)}) + (\epsilon + \frac{\delta}{2})V. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Maintenant par (??), il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_k - F(x_k) \in (\frac{\delta}{4})V \quad \text{et} \quad x_{k-1} - x_k \in (\frac{\delta}{4})V$$

quand $k \geq k_0$ et alors par (??),

$$\begin{aligned} x_{n(k)} - x_{m(k)} &\subseteq (\frac{\delta}{4})V + (\epsilon + \frac{\delta}{2})V \\ &\subseteq (\epsilon + \frac{3}{4}\delta)V \\ &\subseteq (\epsilon + \delta)V, \quad k \geq k_0. \end{aligned}$$

Il en découle, que pour tout $k \geq k_0$

$$F(x_{n(k)}) - F(x_{m(k)}) \in \epsilon V.$$

Mais pour $k \geq k_0$,

$$x_{n(k)} - x_{m(k)} = (x_{n(k)} - F(x_{n(k)})) + (F(x_{n(k)}) - F(x_{m(k)})) + (F(x_{m(k)}) - x_{m(k)})$$

et alors,

$$\begin{aligned} x_{n(k)} - x_{m(k)} &\in \left(\frac{\delta}{4}V + \epsilon V + \frac{\delta}{4}V\right) \\ &\subseteq \left(\epsilon + \frac{\delta}{2}\right)V, \quad k \geq k_0. \end{aligned}$$

qui contredit (??). Par conséquent, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans S et puisque E est complet alors toute suite de Cauchy converge dans S , i.e

$$\exists u \in S \text{ tel que } x_n \longrightarrow u.$$

Comme F est continue, il en résulte de (??(b)) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = F(u) \stackrel{??(b)}{=} u.$$

Ce qui montre l'existence.

Unicité :

Immédiate d'après la séparation de E et la définition ???. En effet, soient x, y deux points fixe de F , alors

$$F(x) = x \text{ et } F(y) = y$$

Comme E est séparé, alors pour $x \neq y$ on a

$$x - y \neq 0$$

implique

$$\exists i_0 \text{ tel que } p_{i_0}(x - y) \neq 0.$$

Puisque F est \mathcal{B} -contractive, on obtient

$$p(F(x) - F(y)) = p(x - y) < p(x - y),$$

ce qui est une contradiction, donc $x = y$. D'où l'unicité. ■

Lemme 3.2.1 [?/] *Soit S un sous ensemble fermé de E . Si $x \notin S$ et $y \in S$, alors il existe un $t \in [0, 1]$ tel que*

$$z = tx + (1 - t)y \in \partial(S),$$

c'est-à-dire

$$(x, y) \in \partial(S).$$

De plus, si $y \notin \partial(S)$ alors $0 < t < 1$.

Remarque 3.2.1 [?/] *Si S est un sous ensemble fermé, alors $S \cap \partial(S) = \partial(S)$.*

Corollaire 3.2.1 [?/] *Soient S un sous ensemble complet de E et $F : S \rightarrow E$ une \mathcal{B} -contraction. Si $F(S \cap \partial(S)) \subseteq S$, alors F admet un point fixe unique.*

3.3 Application à la résolution d'un problème à valeurs initiales

3.3.1 Position du problème et hypothèses imposées

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\tau_1(t)), x(\tau_2(t)), \dots, x(\tau_m(t))) & : t > 0 \\ x(t) = \varphi(t) & : t \leq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

avec la condition initiale :

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad (3.12)$$

où

$$\begin{aligned}\tau_i &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\forall 1 \leq i \leq m) \\ \varphi &: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R},\end{aligned}$$

et

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

sont des fonctions données.

On suppose que les données du problème (??)-(??) obéissent aux hypothèses suivantes :

- \mathcal{H}_1) φ est une fonction continument dérivable ($\varphi \in C^1(\mathbb{R}_-)$) et $\varphi(0) = \varphi_0 > 0$.
- \mathcal{H}_2) pour tout ($1 \leq i \leq m$), τ est continue et $\tau_i(t) \leq t$.
- \mathcal{H}_3) a) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \times [0, M] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifié la condition Lipschitzienne suivante

$$|f(t, \xi_1, \eta_1^1, \dots, \eta_m^1) - f(t, \xi_2, \eta_1^2, \dots, \eta_m^2)| \leq l_1 |\xi_1 - \xi_2| + l_2 \sum_{i=1}^m |\eta_i^1 - \eta_i^2|,$$

avec $l_1, l_2 > 0$.

- b) Il existe $M > \varphi_0$ tel que

$$\forall (t, \xi_1, \eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}_+ \times [0, M] \times \mathbb{R}^m : 0 \leq f(t, \xi_1, \eta_1, \dots, \eta_m) \leq 1 - \frac{\varphi_0}{M}.$$

- \mathcal{H}_4) Pour tout compact K dans \mathbb{R} , $0 \leq t \in K$ implique $\tau_i(t) \in K$.

3.3.2 Cadre fonctionnel approprié et notations considères

Soit $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on note par E , le sous-espace de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de fonctions qui coïncident avec φ pour $t \in \mathbb{R}_-$:

$$E = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid x(t) = \varphi(t) \forall t \in \mathbb{R}_-\}.$$

On considère la famille de semi-normes

$$\mathcal{P} = \{p_K, K \in \mathcal{K}\},$$

avec

$$p_K(x) = \sup_{t \in K} e^{-\lambda t} |x(t)|, \quad (3.13)$$

où \mathcal{K} est l'ensemble de tous les compacts de \mathbb{R} et λ est un réel positif à préciser plus tard.

Notons que $p_K(\cdot)$ définie par (??) est une norme équivalente à la norme uniforme sur K définie par (??). En effet

$$e^{-\lambda(\sup K)} \sup_{t \in K} |x(t)| \leq p_K(x) \leq \sup_{t \in K} |x(t)|.$$

Ainsi d'après la remarque ?? E muni de la famille de semi-normes \mathcal{P} est un e.v.t.l.c de Hausdorff et complet.

Soit S le sous ensemble fermé non vide de E définie par

$$S = \{x \in E : x(t) \leq M, t \in [0, M]\}.$$

où M est la constante donnée par (\mathcal{H}_3).

La frontière $\partial(S)$ de S est

$$\partial(S) = \{x \in E : \max_{t \in [0, M]} x(t) = M\},$$

pour tout compact $K \in \mathcal{K}$, on note

$$K_+ = K \cap \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad K_- = K \cap \mathbb{R}_-.$$

3.3.3 Existence et unicité de la solution du problème (??)-(??)

Dans ce qui suit, on va prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (??)-(??).

Pour cela, on va se servir du lemme suivant qui consiste un moyen utile dans cette étude où on va transformer le problème (??)-(??) à une équation intégrale qui peut être résolue en utilisant le corollaire ??.

Lemme 3.3.1 *Si f est continue et $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_-)$, alors x est solution du problème (??)-(??) avec $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si et seulement si x est solution de*

$$x(t) = \begin{cases} \varphi_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) & \text{si } t > 0 \\ \varphi(t) & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \quad (E.I)$$

avec $x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Preuve. On suppose que $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (??)-(??). Alors pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) ds \\ &= \varphi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) ds \\ &= \varphi_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) ds. \end{aligned}$$

Par suite x est solution de (E.I) et évidemment $x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

À l'inverse, supposons que $x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (E.I). Puisque

$$f(t, x(t), x(\tau_1(t)), x(\tau_2(t)), \dots, x(\tau_m(t)))$$

est continue,

$$x(t) = \begin{cases} \varphi_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) & \text{si } t > 0 \\ \varphi(t) & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

$x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\tau_1(t)), x(\tau_2(t)), \dots, x(\tau_m(t)))$, $t > 0$, et évidemment $x(0) = \varphi_0$.

Donc x est solution de (??)-(??). ■

Remarque 3.3.1 *Dans la résolution de l'équation intégrale (E.I), on peut chercher les solutions dans l'espace des fonctions continues, puisque toute solution continue de (E.I) est automatiquement différentiable. De plus la condition initiale (??) est construite par l'équation (E.I) même.*

On considère l'opérateur F défini par

$$F : S \rightarrow E$$

$$x(t) \mapsto \begin{cases} \varphi_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) & \text{si } t > 0 \\ \varphi(t) & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Nous allons préciser le caractère contractive de l'opérateur F défini sur un e.v.t.l.c qui est une généralisation d'un espace de Banach. Rappelons que cette notion est déjà définie au début de ce chapitre dans un cadre abstrait.

Définition 3.3.1 *L'opérateur F défini par (??) est contractive si*

$$\forall K \in \mathcal{K}, \forall x, y \in S : p_K(F(x) - F(y)) < p_K(x - y).$$

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_i)_{2 \leq i \leq 4}$ cités ci-dessus, on va montrer dans la proposition suivante, le caractère contractive de l'opérateur F défini par (??).

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_i)_{2 \leq i \leq 4}$, l'opérateur F défini par (??) est contractive.*

Preuve. Soit $K \in \mathcal{K}$. On distingue deux cas :

*1^{er} cas : $K_+ = \emptyset$

il est clair que F est contractive, car

$$\begin{aligned} \forall t \in K_-, \forall x, y \in S : p_K(F(x) - F(y)) &= \sup_{t \in K} e^{-\lambda t} |\varphi(t) - \varphi(t)| \\ &= 0 \leq p_K(x - y). \end{aligned}$$

*2^{eme} cas : $K_+ \neq \emptyset$

soient $t \in K_+$ et $x, y \in S$, alors

$$\begin{aligned} |F(x(t)) - F(y(t))| &= \left| \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) \right. \\ &\quad \left. - f(s, y(s), y(\tau_1(s)), y(\tau_2(s)), \dots, y(\tau_m(s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) \\ &\quad - f(s, y(s), y(\tau_1(s)), y(\tau_2(s)), \dots, y(\tau_m(s)))| ds \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_3 - a)$, on obtient

$$\begin{aligned} |F(x(t)) - F(y(t))| &\leq \int_0^t (l_1 |x(s) - y(s)| + l_2 \sum_{i=1}^m |x(\tau_i(s)) - y(\tau_i(s))|) ds \\ &\leq l_1 \int_0^t (e^{\lambda s} e^{-\lambda s} |x(s) - y(s)|) ds \\ &\quad + l_2 \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\lambda \tau_i(s)} e^{-\lambda \tau_i(s)} |x(\tau_i(s)) - y(\tau_i(s))| ds \end{aligned}$$

vue l'hypothèse (\mathcal{H}_4) , on a

$$\begin{aligned} |F(x(t)) - F(y(t))| &\leq l_1 \int_0^t (e^{\lambda s} \sup_{\xi \in K} e^{-\lambda \xi} |x(\xi) - y(\xi)|) ds \\ &\quad + l_2 \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\lambda \tau_i(s)} \sup_{\xi \in K} e^{-\lambda \xi} |x(\xi) - y(\xi)| ds \\ &\leq l_1 p_K(x - y) \int_0^t e^{\lambda s} ds + l_2 p_K(x - y) \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\lambda \tau_i(s)} ds \end{aligned}$$

et par l'hypothèse (\mathcal{H}_2) , on trouve

$$\begin{aligned} |F(x(t)) - F(y(t))| &\leq p_K(x - y) \left(\frac{1}{\lambda} l_1 (e^{\lambda t} - 1) + l_2 \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\lambda s} ds \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) (l_1 + ml_2) p_K(x - y) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} (l_1 + ml_2) p_K(x - y) \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres par $e^{-\lambda t}$, on obtient

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |F(x(t)) - F(y(t))| &\leq e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} (l_1 + ml_2) p_K(x - y) \\ &= \frac{1}{\lambda} (l_1 + ml_2) p_K(x - y) \end{aligned}$$

Maintenant, en choisissant λ introduit dans (??) suffisamment grand tel que

$$\frac{1}{\lambda} (l_1 + ml_2) < 1,$$

on obtient

$$p_K(F(x) - F(y)) < p_K(x - y).$$

Ce qui donne le résultat.

■

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_i)_{1 \leq i \leq 4}$, le problème (??)-(??) admet une seule solution dans S .*

Preuve. Notons d'abord que vue l'hypothèse (\mathcal{H}_1) et le lemme ??, la solution du problème (??)-(??) est un point fixe de l'opérateur F définie par (??).

Dans ce qui suit, on va montrer que $F(\partial(S)) \subseteq S$. En effet, soit $x \in \partial(S)$, alors

$$\max_{t \in [0, M]} x(t) = M,$$

ce qui implique que

$$x(t) \leq M, \forall t \in [0, M].$$

Donc, pour $t \in [0, M]$

$$F(x(t)) = \varphi_0 + \int_0^t f(s, x(s), x(\tau_1(s)), x(\tau_2(s)), \dots, x(\tau_m(s))) ds.$$

Vue l'hypothèse $(\mathcal{H}_3 - b)$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x(t)) &\leq \varphi_0 + \int_0^t \left(1 - \frac{\varphi_0}{M}\right) ds \\ &\leq \varphi_0 + \left(1 - \frac{\varphi_0}{M}\right)t \end{aligned}$$

Puisque $t \leq M$, on aura

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x(t)) &\leq \varphi_0 + \left(1 - \frac{\varphi_0}{M}\right).M \\ &= M. \end{aligned}$$

D'où $F(\partial(S)) \subseteq S$.

Puisque l'opérateur F est de plus contractive d'après la proposition ?? et $F(\partial(S)) \subseteq S$ et S est fermé, le résultat découle immédiatement du corollaire ??. ■

Bibliographie

- [1] Francis Nier Dragos Iftimie., *Introduction à la topologie, Université de Rennes 1, (1999).*
- [2] Frédéric Paulin., *Topologie, analyse et calcul différentiel, FIMFA, (2008-2009).*
- [3] G. L. Cain and M. Z. Nashed., *Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces, Pacific J. Math., 39, 581-592, (1971).*
- [4] Guillaume Garlier., *Analyse fonctionnelle, ENS (2009-2010).*
- [5] H. H. Schaefer et al., *Topological Vector Spaces , Springer, New York (1999).*
- [6] Jean Schmets., *Analyse fonctionnelle, Université de Lige, (2004-2005).*
- [7] Jeseph Grifone., *Algèbre linéaire 4^e édition, Cépadués, France (2011).*
- [8] Köthe G., *Topological vector spaces I, Springer Verlag, Berlin (1969).*
- [9] Laurent W. Marcoux., *An Introduction to fonctionnal Analysis, University of Waterloo (May 24, 2013).*
- [10] M. scott Osborne., *Locally Convex Spaces, Springer Switzerland, (2014).*
- [11] N. Bourbaki., *Espaces vectoriels topologiques, Springer Verlag, Berlin (2007).*
- [12] Sehgal. V. M. and Singh. S. P., *On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convex spaces, Pacific J. Math., 62, 561-567 (1976).*
- [13] Tarafdar. E., *An approach to fixed point theorems on uniform spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 191, 209-225 (1974).*
- [14] Vĩ Ngoc San., *Analyse fonctionnelle et distributions, Université de Rennes 1, (17 septembre 2011).*