N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Stabilité exponentielle de quelques problèmes en thérmoelasticité avec simple et double porosité

Présenté par: Asma TIR
Zineb NID

Soutenu devant le jury composé de

Abdelfeteh FAREH	Rapporteur	Univ. d'El Oued
Khaled HABITA	Président	Univ. d'El Oued
Nadjet DOUDI	Examinatrice	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2015 – 2016

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions le Dieu, notre créateur de nous avoire donnes les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Nous adressons le grand remerciement à notre encadreur ***Dr. Abdelfeteh Fareh*** *qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.*

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

D'ailleurs, nous remercions chaleureurement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue, nos professeurs dés la primmaire jusqu'au univerritaire, nos amies, nos proches .

En fin Nous remercions tous qui nous ont aidés de près ou de loin à l'élaboration de cette étude.

Notations générales

H^1, H_0^1, H^2	Espaces de Sbolev,
$\mathscr{L}(X)$	Espace des opérateures linéaires de X dans X,
X'	Espace dual de X,
$\langle , \rangle, (,)$	Produit scalaire et de dualité X', X,
∂	L'opérateur de différentiation partielle,
$D(\mathcal{A})$	Domaine de l'opérateure $\mathcal{A}$,
$\rho(\mathcal{A})$	Ensemble résolvant de l'opérateur $\mathcal{A}$,
$\sigma(\mathcal{A})$	Spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$,
$\overline{\lim}_{\lvert\beta\rvert\to\infty}\lVert(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\rVert$	$= \inf_{\lvert\beta\rvert}\left(\sup_{k\geq\lvert\beta\rvert}\lVert(ikI-\mathcal{A})^{-1}\rVert\right)$,
$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α,
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω,
$\mathcal{A}^*$	L'adjoint d'un opérateur $\mathcal{A}$,
$R(\lambda, T)$	Application résolvante de T pour λ .
$p.p$	*presque partout*

Table des matières

Introduction générale

L'étude de la comportement asymptotique des systèmes modélisant les milieux thermoélastique poreux a attiré l'attention des chercheurs depuis une trentaine d'années. Munoz Rivera [12] avait considéré le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0, \ \text{dans} \ \ (0, L) \times (0, T) \\ \theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{tx} = 0, \ \ \text{dans} \ \ (0, L) \times (0, T) \end{cases}$$

est montré que le couplage de l'équation de l'élasticité avec l'équation de la chaleur conduit le système à une stabilité exponentielle.

Dés ces jours plusieurs couplages élasticité-porosité-effet thermiques ont été considéré, l'un des points les plus discuter est l'effet du couplage sur la stabilité et le taux de décroissance en cas des systèmes stables.
Concernant le couplage porosité-elasticité, Quintanilla [23] avait considéré en 2002 le système suivant

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} = \mu u_{xx} + \beta\varphi_x, \ \text{dans} \ \ (0, L) \times (0, T) \\ \rho_0 \kappa \varphi_{tt} = \alpha\varphi_{xx} - \beta u_x - \xi\varphi - \tau\varphi_t \ \ \text{dans} \ \ (0, L) \times (0, T) \end{cases}$$

où φ désigne ici la fraction volumique d'un milieu poreux qui doit être compris entre 0 et 1. Il a montrer que ce couplage n'est pas fort et il ne puisse pas conduire le système à une stabilité forte, seulement une stabilité lente a été établi.

Divers dissipations ont été ajouté a ce système par Quintanilla et ses co-auteurs, Casas, Magaña, Ciarleta et Pamplona [17, 4, 5, 18, 20, 22, 21, 24, 19]., ils ont couplé le système avec l'équation de la température et la microtempérature, dissipation viscoélastique et viscoporeux et concluent qu'on ne peut avoir une stabilité exponentielle sauf si on prend une dissipation de la boite à droite et une de la boite à gauche du suivant diagramme.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Effet thermique}\\ \\ \text{Effet Viscoelastique}\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Elasticité}\\ \updownarrow \\ \text{Porosité}\end{array}} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Effets microthermique}\\ \\ \text{Effet visco-poreux}\end{array}}$$

Pour obtenir la stabilité des systèmes étudiés les auteurs utilisent une méthode basée sur un fameux théorème due à Gerhart et Pruss. Ce théorème lie la stabilité d'un système avec la structure de l'ensemble resolvant de l'opérateur infinitésimal définissant le problème d'évolution étudié.

Nous donnons une démonstration rigoureuse de ce théorème et on l'applique pour montrer la stabilité de plusieurs systèmes.

Nous notons aussi qu'il y a encore une autre méthode basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov, cette méthode est utilisée fréquemment par Messaoudi et ces co-auteurs, Guesmia, Said-Houari, Mustafa, Kafini et Fareh [1, 3, 2, 25, 26, 27, 30, 31, 28], nous ne s'interesserons pas par cette méthode dans ce mémoire.

Ce mémoire se compose des quatres chapitres :

Le premier chapitre sera consacré aux quelques définitions et théorèmes fondamentales qui sont utiles pour notre travail, tels que les espaces de Sobolev, quelques inégalités utiles, opérateurs linéaires bornés, la théorie de semi-groupes, le théorème de Hille-Yosida, le théorème de Lax-Milgrame.

Dans le second chapitre on présentera quelques théorèmes sur la stabilité exponentielle d'un semi-groupe fortement continu, avec un preuve détaillé du théorème (Gearhat 1978, Prüss 1984, Greiner 1985).

Le troixième chapitre contient quelques problèmes en thermoélasticité poreuse avec une seule porosité, où on prouve la stabilité exponentielle des solutions.

Le quatreième chapitre sera consacré à un problème en thermoélasticité poreuse avec double porosité, on a montrer que la presence de deux dissipations poreuses conduit sous certaines conditions- à une stabilité exponentielle, le problème considéré dans ce chapitre est nouveau, il n'a pas était considéré auparavent.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentales sur les espaces de Sobolev, l'espace de Hilbert et la théorie de semi-groupe comme le théorème de Lax-Milgram et le théorème de Hille-Yosida que nous utiliserons dans les chapitres 2, 3 et 4.
Commençons par rappeler quelques résultats généraux.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.*

1.2 Les espaces de Sobolev

Dans toute la suite $I =]a, b[$ *est un intervalle (borné ou non) et* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.1 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Définition 1.2.1 *[10] Pour* $1 \leq p < \infty$ *; on définit*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Définition 1.2.2 *[10] On définit*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f:\ \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{mesurable et } \exists \textit{ une constante } C \textit{ telle que } |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

C'est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C;\ |f(x)| \leq C \textit{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

Définition 1.2.3 *[10] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est défini par*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \quad \exists g \in L^p(I) \quad \textit{tel que} \quad \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note g par u' est on l'appelle dérivée faible de u.

Proposition 1.2.1 *L'espace $W^{1,p}$ muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

Pour $1 \leq p < \infty$, la norme ci-dessus est équivalente à la norme

$$(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $H^1(I)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

est un espace de Hilbert.

La norme associée est

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 1.2.4 *[10] Etant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par rècurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \Big\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \Big\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que pour $u \in W^{m,p}(I)$ on peut considérer les dérivées faibles successives

$u' = g_1$, $(u')' = g_2$... jusqu'à l'ordre m ; on les note Du, D^2u... $D^m u$.

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.2.3 Espace $W_0^{1,p}(I)$

Définition 1.2.5 *[10] Etant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture*

de $C_0^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(I)$; l' espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

Remark 1.2.1 *Si I est borné $W_0^{1,p}(I)$ sera muni de la norme $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \sum_{1 \leq i \leq n} \|D_i u\|_{L^2}$, c'est une norme équivalente à celle induite par $W^{1,p}(I)$.*

Theorem 1.2.1 *[10] Soit $u \in W^{1,p}(I)$, alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$, pour $x = a$, où $x = b$.*

1.3 Quelque inégalités utiles :

Les inégalités suivantes sont d'une grande importance

Inégalité de Young

Soient p et q deux réels conjugués : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En partieulier si u, $v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega |uv| \leq \varepsilon \int_\Omega |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$, alors,

$$\Big|(u,v)\Big| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H.$$

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tellque :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

1.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.4.1 *[10] On dit qu'une forme bilinéaire*

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est :

1. *Continue, s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \qquad \forall u, v \in H,$$

2. *Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Theorem 1.4.1 (Lax- Milgram) *[10]*
Soit H un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.
Alors, il existe $u \in H$ solution unique du probléme

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H,$$

de plus si a est symétrique u définie par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}(v, v) - L(v) \right\}$$

1.5 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.5.1 *Soit H un espace de Hilbert, une application $T : H \longrightarrow H$ est dite opérateur linéaire si*

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty \qquad \forall x, y \in H.$$

Définition 1.5.2 *On dit qu'un opérateur T défini sur H est borné s'il existe une constante C telle que*

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

Theorem 1.5.1 *Pour tout opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ la norme de T est donné par :*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

1.5.1 L'adjoint d'un opérateur

Proposition 1.5.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert $T \in \mathscr{L}(E,F)$, alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que pour tout $x \in E$, $y \in F$ on a*

$$< Tx, y >=< x, T^*y >$$

T^* est appelé l'adjoint de l'opérateur T.

Theorem 1.5.2 *Soient T et S deux opérateurs dans $\mathscr{L}(H)$; T^* et S^* leurs adjoints (respectivement), alors on a les propriètés suivantes :*
1. $\|T^*\| = \|T\|$
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^* \ \forall\alpha \in \mathbb{C}$
4. $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
5. $(TS)^* = S^*T^*$

1.5.2 Le spectre et l'ensemble résolvant d'un opérateur

Définition 1.5.3 *On appelle ensemble résolvant de T et on le note $\rho(T)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda I - T$sont inversible,*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : D(T) \subset H \to H, inversible\}$$

C'est un ensemble ouvert.
Le spectre de T est le complémentaire de $\rho(T)$, c'est un ensemble fermé dans $\mathbb{C}$ qu'on le note

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T non\ inversible\}$$

Définition 1.5.4 *(Application résolvante)*
Soit $T \in \mathscr{L}(t)$, on appelle application résolvante de T, l'opérateur

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} \qquad \forall\lambda \in \rho(T).$$

Theorem 1.5.3 *[8] Soit X un espace de Banach et soit $\{x_n\}$ une suite dans X. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge.*

Theorem 1.5.4 *[8] Soit X un espace de Banach. Si $T \in \mathscr{L}(X)$ est un opérateur tel que $\|T\| < 1$ alors $I - T$ est inversible et l'inverse est donnée par*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

1.6 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.6.1 *[32] Une famille $T(t)(0 \leq t < \infty)$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continu (en bref, un C_0-semigroupe) si*

1. *$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$,*
2. *$T(0) = I$,*
3. *Pour chaque $x \in X, T(.)x$ est continue en t sur $[0, \infty)$.*

Définition 1.6.2 *[6] Le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ de domaine*

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe \right\},$$

défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad pour \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

Proposition 1.6.1 *[13] Soit $T(t)$ un C_0-semigroupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$*

et $M \geq 1$ telles que :

$$\big\|T(t)\big\| \leq Me^{\omega t} \quad pour \quad 0 \leq t < \infty. \tag{1.1}$$

Proposition 1.6.2 *[13] Pour un opérateur borné $\mathcal{A}$ sur un espace de Banach X, le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est toujours compact et non vide, d'où son rayon spectral*

$$r(\mathcal{A}) := \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

est finie et satisfait $r(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$.

Définition 1.6.3 *[13] Soit $A : \ D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur fermé. Alors*

$$s(\mathcal{A}) := \ \sup\left\{Re\lambda : \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right\}$$

est appelée la borne spectrale de $\mathcal{A}$.

Pour le générateur $\mathcal{A}$ d'un semigroupe fortement continu $\tau = (T(t))_{t\geq 0}$, la borne spectrale $s(\mathcal{A})$ est toujours dominé par la borne de croissance

$$\omega_0 = \omega_0(\tau) = \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} \ \textit{il existe}\ M_\omega \geq 1 \ \textit{tel que}\ \|T(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t} \ \forall t \geq 0.\right\}$$

Définition 1.6.4 *[13] Pour la borne spéctrale $s(\mathcal{A})$ de générateur $\mathcal{A}$ et pour la borne*

de croissance ω_0 du semigroupe génére $(T(t))_{t\geq 0}$, on a

$$\begin{aligned}-\infty \leq s(\mathcal{A}) \leq \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} log\|T(t)\| \ &= \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{t} log\|T(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} log(r(T(t_0))) < \infty\end{aligned}$$

pour chaque $t_0 > 0$. En particulier, le rayon spectral de l'opérateur de semigroupe $T(t)$ est donné par

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Theorem 1.6.1 *[13] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X et soit $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ les constante qui verifient*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \textit{pour} \quad t \geq 0.$$

Pour le générateur $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ de $(T(t))_{t\geq 0}$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que*
$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds \tag{1.2}$$
existe pour tout $x \in X$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ et $R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda)$.

2. *Si $Re(\lambda) > \omega$, alors $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, et le résolvant $R(\lambda, \mathcal{A})$ est donné par l'expression d'intégrale (1.2).*

3. $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \dfrac{M}{Re\lambda - \omega}$ *pour tout $Re\lambda > \omega$.*

[13] Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\tau = (T(t))_{t\geq 0}$ sur X. Alors
$$T(t)x = \frac{(k-1)!}{t^{k-1}} \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_{\omega - in}^{\omega + in} e^{\lambda t} R(\lambda, \mathcal{A})^k x d\lambda$$
pour tout $\omega > \omega_0(\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$, et $x \in D(\mathcal{A}^k)$.

Proposition 1.6.3 *[13] Pour chaque $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ on a*
$$d(\lambda, \sigma(\mathcal{A})) = \frac{1}{r(R(\lambda, \mathcal{A}))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda, \mathcal{A})\|}.$$

1.7 Théorème de Hille-Yosida

Soit $T(t)$ un C_0-semigroupe. D'après le théorème 1.6.1 il s'ensuit qu'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour $t \geq 0$.

Définition 1.7.1 *[6] Si $\omega = 0$, $T(t)$ est dit uniformément borné et si de plus $M = 1$ il est appelé C_0-semigroupe de contractions.*

Theorem 1.7.1 (Hille-Yosida)*[6] Un opérateur linéaire (non borné) $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contraction $T(t)$, $t \geq 0$ si et seulement si :*

1. $\mathcal{A}$ *est fermé et* $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.

2. *L'ensemble résolvant* $\rho(\mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}$ *contient* $\mathbb{R}^+$ *et pour tout* $\lambda > 0$,

$$\left\|R(\lambda : \mathcal{A})\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Remark 1.7.1 *[6] Soit* $\mathcal{A}$ *le générateur infitésimal d'un semigroupe de contraction* $T(t)$. *L'ensemble résolvant de* $\mathcal{A}$ *contient toujoursle demi-plan ouvert droit, i.e,* $\{\lambda : \ Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$ *et pour* λ

$$\|R(\lambda, \lambda)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Définition 1.7.2 *[10] Soit* $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire non-borné. On dit que* $\mathcal{A}$ *est dissipatif si*

$$(\mathcal{A}v, v) \leq 0 \qquad \forall v \in D(\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ *est maximal* $Im(I - \mathcal{A}) = H$ *i.e.*

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(\mathcal{A}) \quad \textit{tel que} \quad u - \mathcal{A}u = f.$$

On dit que $\mathcal{A}$ *est monotone si* $-\mathcal{A}$ *est dissipatif i.e* $(\mathcal{A}u, u) \geq 0$ *pour tout* $u \in D(\mathcal{A})$.

Theorem 1.7.2 (Lumer-Phillips)*[11] Soit* $\mathcal{A} \ : D(A) \ \subset H \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire*

et $D(\mathcal{A})$ *dense dans* H. *Alors,* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semigroupe de contractions*

si et seulement si :

1. $\mathcal{A}$ *est dissipatif.*

2. *Il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = H$. *(*$\mathcal{A}$ *est maximal).*

1.8 Résolution d'un problème d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \mathcal{A}u = 0 \qquad sur \quad \Omega \times [0, +\infty[\\ \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

Theorem 1.8.1 (Hille-Yosida)*[10]Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal dissipatif dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ il existe une fonction unique*

$$u \in C^1\Big([0, +\infty[; H\Big) \cap C\Big([0, +\infty[; D(\mathcal{A})\Big)$$

solution du (1.3).

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Remark 1.8.1 *[10] L'intérêt principal du théorème 1.8.1 réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution (1.3) on se ramene à vérifier que $\mathcal{A}$ est maximal dissipatif, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u - \lambda\mathcal{A}u = f$.*

1.9 Quelque théorèmes utilisés

Theorem 1.9.1 (Plancherel)*[13]*
Soient H un espace de Hilbert et $f \in L^2(\mathbb{R}, H)$, alors

$$\|\mathscr{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2,$$

i.e, $1/\sqrt{2\pi}\ \mathscr{F}$ est une isométrie, où $\mathscr{F}$ est le transformé de Fourier.

Theorem 1.9.2 (Cauchy)
Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\mathcal{C}$ un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D. Alors

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

Chapitre 2

Stabilité exponentielle

2.1 Notions de stabilité

Définition 2.1.1 *[32] Le semigroupe $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $M \geq 1$ telle que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.1.2 *[13] Un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit :*

1. *Uniformément exponentiellement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ telle que :*

$$\lim_{t\to\infty} e^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0.$$

2. *Uniformément stable si :*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0.$$

3. *Fortement stable si :*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0 \quad \forall x \in X.$$

4. *Faiblement stable si :*

$$\lim_{t\to\infty} \langle T(t)x, x'\rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad et \quad x' \in X'.$$

Proposition 2.1.1 *[13] Pour un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ les assertion suivantes sont équivalentes :*

1. $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable.*

2. $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément stable.*

3. *Il existe* $\varepsilon > 0$ *telle que* $\lim_{t\to\infty} e^{\varepsilon t}\big\|T(t)x\big\| = 0 \quad \forall x \in X$.

Il est clair que, (1) implique (2) et (3).

D'après le définition (1.6.4) $e^{\omega_0 t} = r(T(t)) \leq \|T(t)\|$ *pour tout* $t \geq 0$ *car :*

$$\omega_0 = \inf_{t\geq 0} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|.$$

Alors $\omega_0 \leq \dfrac{1}{t} \log \|T(t)\| \quad \forall t \geq 0$, *donc* $e^{\omega_0 t} \leq \|T(t)\| \quad \forall t \geq 0$, *(2) implique* $\omega_0 < 0$ ($\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t\to 0} e^{-\omega t}\|T(t)\| = 0\}$), *donc* $\exists \omega$ *tel que* $\omega_0 < \omega < 0$ *tel que* $\lim_{t\to 0} e^{-\omega t}\|T(t)\| = 0$.

On choisit $\varepsilon = -\omega$

alors $\lim_{t\to 0} e^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0$ *donc (1).*

Si (3) est vérifiée, alors $(e^{\varepsilon t}T(t))_{t\geq 0}$ *est fortement donc uniformément, bornée, alors* $\exists \alpha > 0$ *tel que :* $\|e^{\varepsilon t}T(t)\| \leq \alpha$

$$\Longrightarrow \quad e^{\varepsilon t}\|T(t)\| \leq \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\frac{\varepsilon}{2}}\|T(t)\| \leq \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}$$

qui implique $\lim_{t\to\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\|T(t)\| = 0$ *donc (1)*

Proposition 2.1.2 *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *un semigroupe de générateur* A, *alors* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable si et seulement si*

$$\omega_0 < 0.$$

Proposition 2.1.3 *Pour un semigroupe fortement continu* $(T(t))_{t\geq 0}$, *les assertions suivante sont équivalentes*

1. $\omega_0 < 0$, *i.e,* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniforément exponentiellement stable.*

2. $\lim_{t\longrightarrow\infty} \|T(t)\| = 0$.

3. $\|T(t_0)\| < 1$ *pour certain* $t_0 > 0$.

4. $r(T(t_1)) < 1$ *pour certain* $t_1 > 0$.

Voir [13]

2.2 Stabilité exponentielle

Theorem 2.2.1 *[32] Soit* $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ *un* C_0*-semi-groupe sur un espace de Hilbert. Alors* $T(t)$ *est exponentiellement stable si et seulement si*

$$\sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0 \tag{2.1}$$

et

$$\sup_{Re\lambda\geq 0} \left\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < \infty. \tag{2.2}$$

Theorem 2.2.2 *[32] Soit* $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ *un* C_0*-semigroupe des contractions sur un espace de Hilbert. Alors* $T(t)$ *est exponentiallement stable si et seulement si*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{2.3}$$

et

$$\overline{\lim}_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \tag{2.4}$$

Dans la suite on donne la preuve de l'équivalence de ces deux théorème à la condition que $T(t) = e^{\mathcal{A}}$ *est un* C_0*-semigroupe des contractions sur un espace de Hilbert. D'abord, nous provons que (2.1)-(2.2) implique (2.3) et (2.4)*

Supposons que $\sup\{Re\lambda : \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$*, alors* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$*, si* $Re\lambda \geq 0$ *on a* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$*, par suite* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$*, donc (2.1) entraîne (2.3).*

Si $\sup_{Re\lambda > 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$*, alors*

$$\|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \quad \forall k \geq |\beta|$$

donc

$$\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} < \infty$$

ce qui implique que

$$\inf_{|\beta|} \left(\sup_{k \geq |\beta|} \|(ikI - \mathcal{A})^{-1}\| \right) < \infty$$

on a

$$\overline{\lim}_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty,$$

alors (2.2) entraîne (2.4).

Ensuite, nous prouvons que (2.3)-(2.4) implique (2.1) et (2.2) à condition que $\|T(t)\| \leq 1$. *D'après la remarque (1.7.1) l'ensemble résolvant* $\rho(\mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}$ *contient le demi-plan ouvert droit, i.e* $\{\lambda : \ Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(\mathcal{A})$*, et* $\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \dfrac{1}{Re\lambda}$.

Ceci implique que pour tout $\delta_0 < 0$ *donné, quand* $Re\lambda > |\delta_0|$*, nous avons*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{Re\lambda} < \frac{1}{|\delta_0|},$$

alors

$$\sup_{Re\lambda \geq |\delta_0|} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{|\delta_0|.} \tag{2.5}$$

Deuxièmement, nous montrons qu'il existe $\sigma_0 < 0$ *avec* $|\sigma_0|$ *étant suffisamment petite telle que* $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \{\lambda, \ Re\lambda \leq \sigma_0\}$.

En effet soit $\lambda = \mu + i\nu$,

$$\lambda I - \mathcal{A} = \mu I + i\nu I - \mathcal{A} = (\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)(i\nu I - \mathcal{A}).$$

D'après (2.3) $i\nu I - \mathcal{A}$ *est inversible et pour* $|\mu|$ *est suffisamment petit, par théorème*

(1.5.4) $\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I$ *est inversible.*

Ainsi (2.3) implique $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \{\lambda,\ Re\lambda \leq \sigma_0 < 0\}$ *avec* $|\sigma_0|$ *suffisamment petit,*

par conséquent $\sigma_0(\mathcal{A}) = \sup\{Re\lambda,\ \ \lambda \in \sigma(\mathcal{A}), Re(\lambda) \leq \sigma_0 < 0\}$ *et pour* $Re\lambda \leq |\delta_0| \leq |\sigma_0|$,

$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq 2M$ *car d'après (2.4)* $\sup_{\nu\in\mathbb{R}} \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M$ *et on choisit*

$|\mu| \leq \dfrac{1}{2M}$ *d'abord, on a*

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| &= \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \\
&\leq \|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|\|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \\
&\leq M\|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

et $|\mu| \leq \dfrac{1}{2M} \leq \dfrac{1}{2\|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|}$, *alors*

$$\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq |\mu|\|(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{2M}M < 1$$

donc par le théorème (1.5.4) $\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I$ *est inversible et l'inverse est donnée par*

$$(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})^n$$

donc

$$\begin{aligned}
\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| &= \|\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})^n\| \\
&\leq \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})^n\| \\
&\leq \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\|(\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1})\|^n \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|^n}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|}
\end{aligned}$$

comme $\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1$, *alors* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|^n}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|} = \dfrac{1}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|}$

donc

$$\|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1} + I)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mu(i\nu I - \mathcal{A})^{-1}\|}$$

comme $\|(i\nu I-\mathcal{A})^{-1}\| \leq M$ *et* $|\mu| < \dfrac{1}{2M}$ *on a*

$$\|\mu(i\nu I-\mathcal{A})^{-1}+I)^{-1}\| \leq 2 \tag{2.7}$$

additionnons (2.6) et (2.7), on obtient

$$\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\| \leq 2M.$$

En combinant ceci avec (2.5) on obtient (2.2).

Theorem 2.2.3 (Gearhart 1978, Prüss 1984, Greiner 1985)*[13] Soit* $\tau = (T(t))_{t\geq 0}$ *Un semi-*

groupe fortement continu sur un espace de Hilbert H *de génŕateur*

infinitésimal $\mathcal{A}$*, alors* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable si et*

seulement si le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$ *est contenu dans l'ensemble résol-*

vant $\rho(\mathcal{A})$ *du générateur* $\mathcal{A}$ *avec le résolvant satisfaisant*

$$M := \sup_{Re\lambda>0} \|R(\lambda,\mathcal{A})\| < \infty. \tag{2.8}$$

Si $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semigroupe uniformément exponentiellement stable alors*

d'après la proposition 2.1.2 $\omega_0 < 0$ *et comme* $\omega_0 = \inf\Big\{\omega \in \mathbb{R}$ *il existe* $M_\omega \geq 1$

tel que $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}\ \forall t \geq 0.\Big\}$*, alors* $\exists\ \omega$ *: tel que* $\omega_0 < \omega < 0$

d'après le théorème 1.6.1 (3) on a

$$\|R(\lambda,\mathcal{A})\| \leq \frac{M}{Re\lambda-\omega} \quad \forall Re\lambda > \omega$$

donc $\sup_{Re\lambda>0}\|R(\lambda,\mathcal{A})\| \leq \sup_{Re\lambda>0}\dfrac{M}{Re\lambda-\omega} \leq \dfrac{M}{-\omega}$ *donc l'estimation (2.8).*

Supposons que $\exists i\lambda_0 \in i\mathbb{R} : i\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A})$*, alors pour* ε *assez petit* $\varepsilon + i\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$

$$d(\varepsilon+i\lambda_0,\sigma(\mathcal{A})) \leq \varepsilon$$

d'après le proposition 4.17 on a

$$\|R(\varepsilon+i\lambda_0,\mathcal{A})\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

quand $\varepsilon \to 0$ *alors* $\|R(\varepsilon + i\lambda_0, \mathcal{A})\| \to +\infty$ *et* $Re(\varepsilon + i\lambda_0) = \varepsilon > 0$, *ce que contredit le fait que* $\sup_{Re\lambda>0} \|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \dfrac{M}{-\omega}$ *donc* $\forall \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $i\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{A})$, *par conséquent* $i\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$, *alors* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, *donc l'estimation (2.8) s'étend par continuité à* $Re\lambda \geq 0$.

Ensuite, on prenons $\omega > |\omega_0|+1$ *et considérons le semi-groupe réechelonné* $(T_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ *avec*

$$T_{-\omega}(t) := e^{-\omega t}T(t).$$

Puis, d'après (1.2) dans le théorme 1.6.1 et pour $x \in H$, $s \in \mathbb{R}$, *on a*

$$R(\omega + is, \mathcal{A})x = R(is, \mathcal{A} - \omega)x = \int_0^\infty e^{-ist}T_{-\omega}(t)xdt.$$

En utilisant la transformée de Fourier $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}, H) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, H)$, *nous obtenons*

$$R(\omega + is, \mathcal{A})x = \mathscr{F}(T_{-\omega}(.)x)(s)$$

où nous prolongeons $T_{-\omega}(.)$ *à* $\mathbb{R}$ *en mettant* $T_{-\omega}(t) := 0$ *pour* $t < 0$.

$(T_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable, car :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}, \exists M_\varepsilon \geq 1, \|T(t)\| \leq M_\varepsilon e^{\alpha_\varepsilon t}.$$

Comme $\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1 \quad \text{tell que} \quad \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0\}$, *donc* $\omega_0 \leq \alpha_\varepsilon < \omega_0 + \varepsilon$, *on peut choisir* $\alpha_\varepsilon = \omega_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}$, *alors*

$$\begin{aligned} \|T_{-\omega}(t)\| = \|e^{-\omega t}T(t)\| &\leq M_\varepsilon e^{-(\omega-\alpha)t} \\ &\leq M_\varepsilon e^{-(\omega-\omega_0-\frac{\varepsilon}{2})t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{comme} \quad \omega > |\omega_0| + 1 \quad &\Longrightarrow \omega > \omega_0 + 1 \\
&\Longrightarrow \omega - \omega_0 > 1 \\
&\Longrightarrow -(\omega - \omega_0) < -1 \\
&\Longrightarrow -(\omega - \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}) < -1 + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

donc $\|T_{-\omega}(t)\| \leq M_\varepsilon e^{-(1-\frac{\varepsilon}{2})t}$, *pour* $\varepsilon < 2$ $\quad (T_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable.*

Nous avons $T_{-\omega}(.)x \in L^2(\mathbb{R}, H)$, *car :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \;&= \int_0^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \\
&= \|x\|^2 \int_0^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)\|^2 dt,
\end{aligned}$$

puisque $(T_{-\omega}(t))_{t\geq 0}$ *est exponentiellement stable alors, il existe une constante positive* α *et* $M \geq 1$ *telle que :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \;&\leq \|x\|^2 \int_0^{+\infty} M^2 e^{-2\alpha t} \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x\|^2 M^2.
\end{aligned}$$

C'est à ce point que nous utilisons l'hypothèse que H *est un espace de Hilbert pour conclure, d'après le théorème 1.9.1, que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\omega + is, \mathcal{A})x\|^2 ds = 2\pi \int_0^{\infty} \|T_{-\omega}(t)x\|^2 dt \leq L^2.\|x\|^2$$

pour une certaine constante $L > 0$ *et pour* $x \in H$.

D'après l'équation résolvante nous avons

$\Big((\omega+is)I-\mathcal{A}\Big)^{-1}+\omega(isI-\mathcal{A})^{-1}\Big((\omega+is)I-\mathcal{A}\Big)^{-1}=(is-\mathcal{A})^{-1}\Big((is-\mathcal{A})\Big((\omega+is)I-\mathcal{A}\Big)^{-1}+\omega\Big((\omega+is)I-\mathcal{A}\Big)^{-1}\Big)=(is-\mathcal{A})^{-1}\Big((is-\mathcal{A})+\omega I\Big)\Big((\omega+is)I-\mathcal{A}\Big)^{-1}$
$=(is-\mathcal{A})^{-1}\Big(((is+\omega)I-\mathcal{A})\Big)\Big((\omega+is)I-\mathcal{A}\Big)^{-1}=(is-\mathcal{A})^{-1}$

on a

$$R(is,\mathcal{A})=R(\omega+is,\mathcal{A})+\omega R(is,\mathcal{A})R(\omega+is,\mathcal{A})$$

pour tout $s\in\mathbb{R}$ *et d'après (2.8) on obtient*

$$\|R(is,\mathcal{A})\|\leq M$$

donc

$$\begin{aligned}\|R(is,\mathcal{A})x\| &= \left\|\Big(R(\omega+is,\mathcal{A})+\omega R(is,\mathcal{A})R(\omega+is,\mathcal{A})\Big)x\right\|\\ &= \left\|\Big(I+\omega R(is,\mathcal{A})\Big)R(\omega+is,\mathcal{A})x\right\|\\ &\leq (\|I\|+\|\omega R(is,\mathcal{A})\|)\|R(\omega+is,\mathcal{A})x\|\\ &\leq (1+M\omega)\|R(\omega+is,\mathcal{A})x\|\end{aligned}$$

pour tout les $s\in\mathbb{R}$ *et tout* $x\in H$.

En combinant ces faits, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\|R(is,\mathcal{A})x\|^2ds &\leq (1+M\omega)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\|R(\omega+is,\mathcal{A})x\|^2ds\\ &\leq (1+M\omega)^2.L^2.\|x\|^2\end{aligned}\tag{2.9}$$

pour tout $x\in H$.

Comme $\|T\|=\|T^*\|$ *pour chaque* $T\in\mathscr{L}(H)$, *par symétrie l'estimation est vraie* *pour le résolvant du générateur $\mathcal{A}^*$ du semi-groupe adjoint $(T(t)^*)_{t\geq 0}$ i.e,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is,\mathcal{A}^*)y\|^2 ds \leq (1+M\omega)^2.L^2.\|y\|^2 \tag{2.10}$$

pour tout $y \in H$.

Ensuite, nous utilisons la formule d'inversion du corolaire 1.6 pour $k=2$, on conclut que

$$(tT(t)x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\omega+is)t}(R(\omega+is,\mathcal{A})^2x,y)ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}(R(is,\mathcal{A})^2x,y)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}(R(is,\mathcal{A})x,R(-is,\mathcal{A})^*y)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}(R(is,\mathcal{A})x,R(-is,\mathcal{A}^*)y)ds
\end{aligned}$$

pour tous $x \in D(\mathcal{A}^2)$ et $y \in H$. Pour la deuxième égalité, nous avons utilisé le théorème (1.9.2), qui est applicable puisque $R(\lambda,\mathcal{A})$ est uniformément borné pour $Re\lambda \geq 0$ et donc

$$\|R(\lambda,\mathcal{A})x\| = \frac{1}{|\lambda|}\|R(\lambda,\mathcal{A})\mathcal{A}x + x\| \leq \frac{1}{|\lambda|}(M\|\mathcal{A}x\| + \|x\|).$$

Avec, (2.9), (2.10), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
(tT(t)x,y) &\leq \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is,\mathcal{A})x\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(is,\mathcal{A}^*)y\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{(1+M\omega)^2.L^2}{2\pi}\|x\|.\|y\|
\end{aligned}$$

pour tous x, $y \in D(\mathcal{A}^2)$. Comme $D(\mathcal{A}^2)$ est dense dans H, cela implique

$$\begin{aligned}\|tT(t)\| &= \sup\{|(tT(t)x,y)| : x,y \in D(\mathcal{A}^2), \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \frac{(1+M\omega)^2.L^2}{2\pi}.\end{aligned}$$

par suite $\|T(t)\| \leq \dfrac{(1+M\omega)^2.L^2}{2\pi t}$.

Donc $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$ *et par suite* $T(t)$ *est uniformément exponentiellement stable d'après la proposition 2.1.3.*

Chapitre 3

Quelques problèmes en thermoélasticité poreuse avec une seule porosité

3.1 Problème 1 : Viscoélastique et poreuse dissipations

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\phi_x + \gamma u_{txx} \quad dans \quad]0,\pi[\times]0,+\infty[, \\ \\ J\phi_{tt} = \delta\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi - \tau\phi_t \quad dans \quad]0,\pi[\times]0,+\infty[, \end{cases} \tag{3.1}$$

oú u est la déplacement tranversale et ϕ est la fraction volumique d'un milieu poreu unidimentionnel de longeur π.
De plus on suppose que u, ϕ satisfant les conditions aux limites suivantes :

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \phi_x(0,t) = \phi_x(\pi,t) = 0 \quad t > 0, \tag{3.2}$$

et les conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \phi(x,0) = \phi_0(x), \phi_t(x,0) = \phi_1(x)$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert, oú

$$\mathscr{H} := \left\{(u,v,\phi,\varphi) \in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)\times H^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi), \int_0^\pi \phi(x)dx = \int_0^\pi \varphi(x)dx = 0\right\}$$

Le produit scalaire dans $\mathscr{H}$ est

$$\langle U, U^* \rangle = \int_0^\pi (\rho v\overline{v^*} + J\varphi\overline{\varphi^*} + \mu u_x\overline{u_x^*} + \delta\phi_x\overline{\phi_x^*} + \xi\phi\overline{\phi^*} + b(u_x\overline{\phi^*} + \overline{u_x^*}\phi))dx,$$

avec $U^* = (u^*, v^*, \phi^*, \varphi^*) \in \mathscr{H}$ et $\overline{u}$ désigne le conjugué de u, il convient de rappeler que ce produit est équivalent au produit habiituel dans l'espace $\mathscr{H}$.

On définit l'énergie du système (3.1) par

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\rho u_t^2 + J\phi_t^2 + \mu u_x^2 + \delta\phi_x^2 + \xi\phi^2 + bu_x\phi)dx$$

3.1.1 Existence et unicité

Proposition 3.1.1 *On suppose que les constantes du système vérifient la condition suivante*

$$\mu\xi > b^2,$$

alors, le système (3.1) admet une solution unique.

On pose $v = u_t$ *et* $\varphi = \phi_t$ *le système (3.1) et (3.2) devient*

$$\begin{cases} u_t = v, \\ \\ v_t = \dfrac{1}{\rho}(\mu u_{xx} + b\phi_x + \gamma v_{xx}), \\ \\ \phi_t = \varphi, \\ \\ \varphi_t = \dfrac{1}{J}(\delta\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi - \tau\varphi), \end{cases}$$

qui peut être écrit alors,

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $U = (u, v, \phi, \varphi)^T$, $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1)^T$ *et* $\mathcal{A}$ *est l'opérateur différentiel donné par*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \\ \dfrac{\mu}{\rho}D^2 & \dfrac{\gamma}{\rho}D^2 & \dfrac{b}{\rho}D & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \\ -\dfrac{b}{J}D & 0 & \dfrac{\delta D^2 - \xi}{J} & -\dfrac{\tau}{J} \end{pmatrix}$$

I *l'opérateur identité et* $D = \frac{d}{dx}$.

Le domaine de $\mathcal{A}$ est alors

$$D(\mathcal{A}) = \{(u,v,\phi,\varphi) \in \mathscr{H}; \mu u + \gamma v \in H^2, \phi \in H^2, \varphi \in H^1, v \in H_0^1\}$$

Pour montrer l'existence d'une solution du système (3.3), on applique le théorème de Hille-Yosida, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal.
1) $\mathcal{A}$ dissipatif
Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif il suffit de prouver que

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0.$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = & \int_0^\pi (\mu u_{xx}\overline{v} + b\phi_x\overline{v} + \gamma v_{xx}\overline{v} + \delta\phi_{xx}\overline{\varphi} - bu_x\overline{\varphi} - \xi\phi\overline{\varphi} - \tau\varphi\overline{\varphi} + \mu v_x\overline{u_x} + \delta\varphi_x\overline{\phi_x} \\
& +\xi\varphi\overline{\phi} + b(v_x\overline{\phi} + \overline{u_x}\varphi))dx \\
= & \ \mu\left[u_x\overline{v}\right]_0^\pi - \mu\int_0^\pi u_x\overline{v_x} + b\left[\phi\overline{v}\right]_0^\pi - b\int_0^\pi \phi\overline{v_x} + \gamma\left[v_x\overline{v}\right]_0^\pi - \gamma\int_0^\pi v_x\overline{v_x} + \delta\left[\phi_x\overline{\varphi}\right]_0^\pi \\
& -\delta\int_0^\pi \phi_x\overline{\varphi_x} - b\int_0^\pi u_x\overline{\varphi} - \xi\int_0^\pi \phi\overline{\varphi} - \tau\int_0^\pi \varphi^2 + \mu\int_0^\pi v_x\overline{u_x} + \delta\int_0^\pi \varphi_x\overline{\phi_x} \\
& +\xi\int_0^\pi \varphi\overline{\phi} + b\int_0^\pi v_x\overline{\phi} + b\int_0^\pi \overline{u_x}\varphi \\
= & \ \mu\int_0^\pi (v_x\overline{u_x} - \overline{v_x}u_x)dx + \delta\int_0^\pi (\varphi_x\overline{\phi_x} - \overline{\varphi_x}\phi_x)dx + \xi\int_0^\pi (\varphi\overline{\phi} - \overline{\varphi}\phi)dx \\
& +b\int_0^\pi ((\overline{u_x}\varphi - u_x\overline{\varphi}) + (v_x\overline{\phi} - \overline{v_x}\phi))dx - \gamma\int_0^\pi {v_x}^2 - \tau\int_0^\pi \varphi^2 \\
= & \ -\left(\int_0^\pi \gamma {v_x}^2 dx + \int_0^\pi \tau\varphi^2 dx\right) + 2i\mu\int_0^\pi Im(v_x\overline{u_x})dx + 2i\delta\int_0^\pi Im(\varphi_x\overline{\phi_x})dx \\
& +2i\xi\int_0^\pi Im(\varphi\overline{\phi})dx + 2ib\int_0^\pi (Im(\overline{u_x}\varphi) + Im(v_x\overline{\phi}))dx
\end{aligned}$$

Alors

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\varphi|^2)dx \leq 0$$

Donc $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2) $\mathcal{A}$ maximal
Pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}$, nous supposons que $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in \mathscr{H}$ et on cherche $U = (u,v,\phi,\varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $(I - \mathcal{A})U = F$ ceci s'écrit en

termes de composantes, comme suit

$$u - v = f^1, \tag{3.4}$$
$$-\mu u_{xx} + \rho v - \gamma v_{xx} - b\phi_x = \rho f^2, \tag{3.5}$$
$$\phi - \varphi = f^3, \tag{3.6}$$
$$bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi + J\varphi + \tau\varphi = Jf^4. \tag{3.7}$$

substituons (3.4), (3.6) dans (3.5) et (3.7) on obtient

$$\begin{cases} -\mu u_{xx} + \rho u - \gamma u_{xx} - b\phi_x = \rho(f^1 + f^2) - \gamma f^1_{xx} \\ bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi + (J + \tau)\phi = Jf^4 + (\tau + J)f^3 \end{cases}$$

Il reste à prouver qu'il existe u *et* ϕ *satisfaisant*

$$-(\mu + \gamma)u_{xx} + \rho u - b\phi_x = \rho(f^1 + f^2) - \gamma f^1_{xx} = g_1 \in H^{-1}(0, \pi) \tag{3.8}$$
$$-\delta\phi_{xx} + bu_x + (\xi + J + \tau)\phi = Jf^4 + (\tau + J)f^3 = g_2 \in L^2(0, \pi) \tag{3.9}$$

On définit l'espace $W = H^1_0(0, \pi) \times H^1(0, \pi)$.
En multipliant les deux équations (3.8) et (3.9) par des fonctions $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}) \in (C^1_0(0, \pi))^2$ *respectivement et on intègre sur* $(0, \pi)$*, on obtient*

$$(\mu + \gamma)\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx + \rho\int_0^\pi u\widetilde{u}dx - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx = \int_0^\pi g_1\widetilde{u}dx \tag{3.10}$$
$$\delta\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x dx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx + (J + \tau + \xi)\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx = \int_0^\pi g_2\widetilde{\phi}dx \tag{3.11}$$

Additionnons (3.10) et (3.11), on obtient

$$\int_0^\pi (g_1\widetilde{u} + g_2\widetilde{\phi})dx = (\mu + \gamma)\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx + \rho\int_0^\pi u\widetilde{u}dx - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx + \delta\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x dx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx$$
$$+ (J + \tau + \xi)\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx$$

Pour $U = (u, \phi)^T$ *et* $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{\phi})^T$ *on définit sur* W *une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *et une forme linéaire* $L(.)$ *par*

$$a(U, \widetilde{U}) = (\mu + \gamma)\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx + \rho\int_0^\pi u\widetilde{u}dx - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx + \delta\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x dx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx$$
$$+ (J + \tau + \xi)\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx$$
$$L(\widetilde{U}) = \int_0^\pi (g_1\widetilde{u} + g_2\widetilde{\phi})dx.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue, coercive et $L(.)$ est continue.
1) Continuité de $a(.,.)$

$$\begin{aligned}
\left|a(U,\widetilde{U})\right| &\leq (\mu+\gamma)\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}+\rho\|u\|_{L^2}\|\widetilde{u}\|_{L^2}+b\|\widetilde{u}\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2}+\delta\|\phi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}_x\|_{L^2}\\
&\quad +b\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2}+(\tau+J+\xi)\|\phi\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2}\\
&\leq \max(\mu+\gamma,\rho,b,\delta,\tau+J+\xi)\bigg(\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}\|\widetilde{u}\|_{L^2}+\|\widetilde{u}\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2}\\
&\quad +\|\phi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}_x\|_{L^2}+\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2}+\|\phi\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2}\bigg)\\
&\leq C_1\bigg(\|u\|_{H_0^1}+\|\phi\|_{H^1}\bigg)\bigg(\|\widetilde{u}\|_{H_0^1}+\|\widetilde{\phi}\|_{H^1}\bigg)\\
&\leq C_1\|U\|_W\|\widetilde{U}\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2) Coercivité de $a(.,.)$

$$a(U,U)=(\mu+\gamma)\int_0^\pi u_x^2dx+\rho\int_0^\pi u^2dx+2b\int_0^\pi \phi u_x dx+\delta\int_0^\pi \phi_x^2dx$$
$$+(J+\tau+\xi)\int_0^\pi \phi^2dx$$

On a d'aprés l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
-\int_0^\pi u_x\phi dx &\leq \int_0^\pi |u_x\phi|dx\\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{2}\int_0^\pi u_x^2dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\pi \phi^2dx
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\pi u_x\phi dx\geq -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^\pi u_x^2dx-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^\pi \phi^2dx$$

et on a

$$a(U,U)\geq(\mu+\gamma-\varepsilon b)\int_0^\pi u_x^2dx+\rho\int_0^\pi u^2dx+\delta\int_0^\pi \phi_x^2dx+(\tau+J+\xi-\frac{b}{\varepsilon})\int_0^\pi \phi^2dx$$

On choisit ε telle que $\mu+\gamma-\varepsilon b>0$ et $\tau+J+\xi-\frac{b}{\varepsilon}>0$, donc

$$\begin{aligned}
a(U,U) &\geq min\bigg(\mu+\gamma-\varepsilon b,\rho,\delta,\tau+J+\xi-\tfrac{b}{\varepsilon}\bigg)\int_0^\pi(u^2+u_x^2+\phi^2+\phi_x^2)dx\\
&\geq C_2||U||_W^2
\end{aligned}$$

et $a(.,.)$ est coercive.

3) Continuité de $L(.)$

$$\begin{aligned}
\|L(\widetilde{U})\| &= \| \textstyle\int_0^\pi g_1\widetilde{u} + \int_0^\pi g_2\widetilde{\phi}\| \\
&\leq \|g_1\|_{L^2}\|\widetilde{u}\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2} \\
&\leq max(\|g_1\|_{L^2}, \|g_2\|_{L^2})(\|\widetilde{u}\|_{L^2} + \|\widetilde{\phi}\|_{L^2}) \\
&\leq C_3(\|\widetilde{u}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\phi}\|_{H^1}) \\
&\leq C_3\|\widetilde{U}\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W, et $L(.)$ est linéaire et continue sur W. D'aprés le

théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $U^* = (u,\phi)^T \in W = H_0^1 \times H^1$ telle que

$$a(U^*, \widetilde{U}) = L(\widetilde{U}) \ \forall \widetilde{U} \in W.$$

Ce qui signifie que $u \in H_0^1(0,\pi), \phi \in H^1(0,\pi), v = u - f^1 \in H_0^1(0,\pi)$ et $\varphi = \phi - f^3 \in H^1(0,\pi)$.

il reste á montrer que $\mu u + \gamma v \in H^2(0,\pi)$ et $\phi \in H^2(0,\pi)$.

D'aprés (3.5), on a

$$\mu u_{xx} + \gamma v_{xx} = \rho v - \rho f^2 - b\phi_x \in L^2(0,\pi),$$

car $f^2, v \in L^2$ et $\phi \in H^1$.
Donc

$$\mu u + \gamma v \in H^2.$$

D'aprés (3.7), on a

$$\phi_{xx} = \frac{1}{\delta}(bu_x + \xi\phi + J\varphi + \tau\varphi - Jf^4) \in L^2,$$

car $u \in H_0^1$, $\varphi, f^4 \in L^2$ et $\phi \in H^1$.
Donc

$$\phi \in H^2$$

Donc, il existe $(u, v, \phi, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ *qui vérifie* $(I - \mathcal{A})U = F$ *pour tout* $F \in \mathscr{H}$*, et* $\mathcal{A}$ *est maximal.*

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (3.3). Alors le système (3.1) admet une solution unique, ceci termine la démonstration.

Lemma 3.1.1 *Soit* (u, ϕ) *est la solution due (3.1) alors l'énergie* $E(t)$ *vérifie*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^\pi u_{tx}^2 - \tau \int_0^\pi \phi_t^2 \leq 0.$$

On multiplie $(3.1)_1$ *par* u_t *et on intégre sur* $]0, \pi[$*, il vient*

$$\rho \int_0^\pi u_{tt} u_t dx = \mu \int_0^\pi u_{xx} u_t dx + b \int_0^\pi \phi_x u_t dx + \gamma \int_0^\pi u_{txx} u_t dx,$$

ce qui implique que

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi u_t^2 dx = \mu [u_x u_t]_0^\pi - \mu \int_0^\pi u_x u_{tx} dx + b \int_0^\pi \phi_x u_t dx + \gamma [u_{tx} u_t]_0^\pi - \gamma \int_0^\pi u_{tx}^2 dx,$$

vu que $u = 0$ *en* 0 *et* π *donc*

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi u_t^2 dx = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi u_x^2 dx + b \int_0^\pi \phi_x u_t dx - \int_0^\pi u_{tx}^2 dx. \tag{3.12}$$

On multiplie $(3.1)_2$ *par* ϕ_t *on intégre sur* $[0, \pi]$*, il vient*

$$\frac{J}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi \phi_t^2 dx = -\frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi \phi_x^2 dx - b \int_0^\pi u_x \phi_t dx - \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi \phi^2 dx - \tau \int_0^\pi \phi_t^2 dx, \tag{3.13}$$

combinons (3.12) et (3.13) on obtient

$$\frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2} \int_0^\pi [\rho u_t^2 + J\phi_t^2 + \mu u_x^2 + \delta \phi_x^2 + \xi \phi^2 + b u_x \phi] dx \right\} = -\gamma \int_0^\pi u_{tx}^2 dx - \tau \int_0^\pi \phi_t^2 dx.$$

D'où

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0,$$

alors le système (3.1) est dissipatif.

3.1.2 Stabilité exponentielle

Pour montrer la stabilité exponentielle, nous utilisons le théorème de Gearhart-Pruss qui montre qu'un semi-groupe de contractions sur un espace se Hilbert est exponentiellement stable, si et seulement si

$$i\mathbb{R} = \{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}). \tag{3.14}$$

et

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} ||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty \tag{3.15}$$

1)La preuve de (3.14) donnée en trois étapes :
Premièrement, on prouve que $0 \in \rho(\mathcal{A})$
Pour montrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, *on prend* $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in \mathscr{H}$ *et on cherche* $U = (u, v, \phi, \varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ *solution de* $\mathcal{A}U = F$ *ceci s'écrit en termes de composants, comme suit*

$$v = f^1, \tag{3.16}$$
$$\mu u_{xx} + \gamma v_{xx} + b\phi_x = \rho f^2, \tag{3.17}$$
$$\varphi = f^3, \tag{3.18}$$
$$-bu_x + \delta\phi_{xx} - \xi\phi - \tau\varphi = Jf^4. \tag{3.19}$$

substituons (3.16), (3.18) dans (3.17) et (3.19) on obtient

$$\begin{cases} \mu u_{xx} + b\phi_x = \rho f^2 - \gamma f^1_{xx} \\ -bu_x + \delta\phi_{xx} - \xi\phi = Jf^4 + \tau f^3 \end{cases}$$

Il reste à prouver qu'il existe u et ϕ *satisfaisant*

$$\mu u_{xx} + b\phi_x = \rho f^2 - \gamma f^1_{xx} = g_1 \in H^{-1}(0, \pi) \tag{3.20}$$
$$\delta\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi = Jf^4 + \tau f^3 = g_2 \in L^2(0, \pi) \tag{3.21}$$

On définit l'espace $W = H^1_0(0, \pi) \times H^1(0, \pi)$.

En multipliant les deux équations (3.20) et (3.21) par des fonctions $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}) \in (C_0^1(0,\pi))^2$ *respectivement et on intègre sur* $(0,\pi)$*, on obtient*

$$-\mu \int_0^\pi u_x \widetilde{u}_x dx + b \int_0^\pi \phi_x \widetilde{u} dx = \int_0^\pi g_1 \widetilde{u} dx \tag{3.22}$$

$$-\delta \int_0^\pi \phi_x \widetilde{\phi}_x dx - b \int_0^\pi u_x \widetilde{\phi} dx - \xi \int_0^\pi \phi \widetilde{\phi} dx = \int_0^\pi g_2 \widetilde{\phi} dx \tag{3.23}$$

Additionnons (3.22) et (3.23), on obtient

$$-\int_0^\pi (g_1 \widetilde{u} + g_2 \widetilde{\phi}) dx = \mu \int_0^\pi u_x \widetilde{u}_x dx - b \int_0^\pi \phi_x \widetilde{u} dx + \delta \int_0^\pi \phi_x \widetilde{\phi}_x dx + b \int_0^\pi u_x \widetilde{\phi} dx + \xi \int_0^\pi \phi \widetilde{\phi} dx$$

Pour $U = (u, \phi)^T$ *et* $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{\phi})^T$*, on définit sur* W *une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *et une forme linéaire* $L(.)$ *par*

$$a(U, \widetilde{U}) = \mu \int_0^\pi u_x \widetilde{u}_x dx - b \int_0^\pi \phi_x \widetilde{u} dx + \delta \int_0^\pi \phi_x \widetilde{\phi}_x dx + b \int_0^\pi u_x \widetilde{\phi} dx + \xi \int_0^\pi \phi \widetilde{\phi} dx$$

et

$$L(\widetilde{U}) = -\int_0^\pi (g_1 \widetilde{u} + g_2 \widetilde{\phi}) dx.$$

On montre que $a(.,.)$ *est continue coercive et* $L(.)$ *est continue.*

Remark 3.1.1 *La continuité de* $a(.,.)$ *et* $L(.)$ *se font de la même manière que pour la cas de maximalité de* $\mathcal{A}$*.*

Coercivité de $a(.,.)$

$$a(U, U) = \mu \int_0^\pi u_x^2 dx + 2b \int_0^\pi \phi u_x dx + \delta \int_0^\pi \phi_x^2 + \xi \int_0^\pi \phi^2 dx$$

On a d'aprés l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi u_x \phi dx &\leq \int_0^\pi |u_x \phi| dx \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\pi \phi^2 dx \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\pi u_x \phi dx \geq -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\pi \phi^2 dx$$

et on a

$$a(U, U) \geq (\mu - \varepsilon b) \int_0^\pi u_x^2 dx + \delta \int_0^\pi \phi_x^2 dx + (\xi - \frac{b}{\varepsilon}) \int_0^\pi \phi^2 dx$$

avec $\mu - \varepsilon b > 0$ *et* $\xi - \frac{b}{\varepsilon} > 0$*, alors* $\frac{b}{\xi} < \varepsilon < \frac{\mu}{b}$ *donc*

$$a(U, U) \geq min\left(\mu - \varepsilon b, \delta, \xi - \frac{b}{\varepsilon}\right) \int_0^\pi (u_x^2 + \phi^2 + \phi_x^2) dx$$

notons que $\int_0^\pi u_x^2 dx$ *définie une norme sur* $H_0^1(0,\pi)$, *on aura*

$$a(U,U) \geq C_4 ||U||_W^2$$

Donc $a(.,.)$ *est coercive.*

$a(.,.)$ *bilinéaire, continue et coercive sur* W, *et* $L(.)$ *est linéaire est continue sur* W. *D'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique* $U^* = (u,\phi)^T \in W = H_0^1 \times H^1$ *telle que*

$$a(U^*, \widetilde{U}) = L(\widetilde{U}) \quad \forall \widetilde{U} \in W.$$

Ce qui signifie que $u \in H_0^1(0,\pi), \phi \in H^1(0,\pi), v = f^1 \in H_0^1(0,L)$ *et* $\varphi = f^3 \in H^1(0,L)$.

il reste á montrer que $\mu u + \gamma v \in H^2(0,\pi)$ *et* $\phi \in H^2(0,\pi)$.

D'aprés (3.17), on a

$$\mu u_{xx} + \gamma v_{xx} = \rho f^2 - b\phi_x \in L^2(0,\pi),$$

car $f^2 \in L^2$, *et* $\phi_x \in H^1$.
Donc

$$\mu u + \gamma v \in H^2(0,\pi).$$

D'aprés (3.19), on a

$$\phi_{xx} = \frac{1}{\delta}(Jf^4 + bu_x + \xi\phi + \varphi) \in L^2,$$

car $f^4, \varphi \in L^2, u \in H_0^1$ *et* $\varphi \in H^1$.
Donc

$$\phi \in H^2(0,\pi).$$

Donc il existe $(u,v,\phi,\varphi)^T \in D(\mathcal{A})$ *qui vérifie* $\mathcal{A}U = F$ *pour tout* $F \in \mathscr{H}$, *et* $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

(i) Puisque $0 \in \rho(\mathcal{A})$ *à était démontrer alors, en utilisant le théorème (1.5.4)on*

constate que $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ *est inversible pour* $||\lambda\mathcal{A}^{-1}|| < 1$.

Par conséquent $i\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ *est inversible pour* $|\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$.*En*

outre $||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||$ *est continue dans l'intervalle* $(-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1})$.

(ii) Si $sup\{||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||, |\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}\} = M < \infty$, *alors pour* $|\lambda_0| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$

l'opérateur

$$i\lambda I - \mathcal{A} = (i\lambda_0 I - \mathcal{A})(I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1})$$

est inversible si $||i(\lambda_0 - \lambda)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}|| < 1$ *ce qui donne* $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{||(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}||}$, *alors* $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{M}$. *Pour* λ_0 *proche de* $||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$ *et en utilisant la définition de* M *on obtient* $\{\lambda, |\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} + M^{-1}\} \subset \rho(\mathcal{A})$ *et* $||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||$ *est continue dans l'intervalle* $(-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} - M^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} + M^{-1})$.

Le point(ii)signifie que chaque fois ou sup$\{||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||, |\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} = M < \infty$, *le domaine d'inversibilité de* $\lambda I - \mathcal{A}$ *est prolongeable à l'intervalle* $(-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} - M^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} + M^{-1})$.

(iii) Supposons que $\{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas inclu dans* $\rho(\mathcal{A})$, *de (ii) ci-dessus on conclut qu'il existe* $\sigma \geq ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$ *tel que* $\{i\lambda, |\lambda| < \sigma\} \subset \rho(\mathcal{A})$, *mais* *sup*$\{||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||, |\lambda| < \sigma\} = \infty$.

Dans ce cas, nous pouvons trouver une suite de nombres réels (λ_n) *telle que* $\lambda_n \to \sigma, |\lambda_n| < |\sigma|$ *et une suite de vecteurs unitaires* $(U_n) \subset D(\mathcal{A}), U_n = (u_n, v_n, \phi_n, \varphi_n)$ *et*

$$||(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n|| \to 0 \tag{3.24}$$

Ce qui peut s'écrire

$$i\lambda_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad H_0^1 \tag{3.25}$$
$$-\mu D^2 u_n + i\rho\lambda_n v_n - \gamma D^2 v_n - bD\phi_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.26}$$
$$i\lambda_n \phi_n - \varphi_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad H^1 \tag{3.27}$$
$$bDu_n + \xi\phi_n - \delta D^2\phi_n + iJ\lambda_n\varphi_n + \tau\varphi_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.28}$$

Nous avons tout d'abord

$$Re\langle(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle \longrightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} Re\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle &= Re(\langle i\lambda_n U_n, U_n\rangle - \langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle) \\ &= Re(i\lambda_n ||U_n||^2 - \langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle) \\ &= -Re\langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle \\ &= \gamma \int_0^\pi ||Dv_n||^2 + \tau \int_0^\pi ||\varphi_n||^2 \end{aligned}$$

Donc

$$Dv_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2$$
$$\varphi_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2$$

On a d'aprés l'inégalité de Poincaré $||v_n||_{L^2} \leq C||Dv_n||_{L^2}$*, alors* $v_n \to 0$*, d'aprés (3.25)*
et (3.27), $u_n \to 0$ *et* $\phi_n \to 0$*, alors (3.26) et (3.28) s'écrivent*

$$-\mu D^2 u_n - \gamma D^2 v_n - bD\phi_n \to 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.29}$$

et

$$bDu_n - \delta D^2\phi_n \to 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.30}$$

On prend le produit scalaire de (3.29),(3.30) par u_n, ϕ_n *respectivement, on obtient*

$$\mu\langle Du_n, Du_n\rangle - \gamma\langle D^2 v_n, u_n\rangle - b\langle D\phi_n, u_n\rangle \to 0, \tag{3.31}$$
$$b\langle Du_n, \phi_n\rangle - \delta\langle D^2\phi_n, \phi_n\rangle \to 0. \tag{3.32}$$

Puisque $\phi_n \to 0$*,* $Dv_n \to 0$ *et* $u_n \to 0$ *dans* L^2*, on obtient*

$$\delta\langle D\phi_n, D\phi_n\rangle \to 0,$$
$$\mu\langle Du_n, Du_n\rangle \to 0.$$

Alors $D\phi_n \to 0$ *et* $Du_n \to 0$*, et par suite* $(u_n, v_n, \phi_n, \varphi_n) \longrightarrow 0$ *dans* $\mathscr{H}$.

Ce qui contredit le fait que $||U_n||_{\mathscr{H}} = 1$ *et la preuve (3.14) est terminé.*

2) Preuve de (3.15)
Supposons $\overline{\lim}_{|\lambda|\to\infty}||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty$ *n'est pas vrai alors, il existe une suite* $(\lambda_n) \subset \rho(\mathcal{A}), |\lambda_n| \to \infty$

et une suite de vecteurs unitaires (U_n) *dans* $D(\mathcal{A})$*, tel que*

$$\lim_{n\to\infty} ||(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}|| = \infty.$$

Comme

$$Re\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle \longrightarrow 0$$

Par conséquent $\varphi_n \to 0$ et $Dv_n \to 0$ dans L^2, alors d'aprés l'inégalité de Poincaré $v_n \to 0$.

En substituant dans (3.25) et (3.27) on obtient

$$i\lambda_n u_n \to 0 \quad dans \quad L^2$$

et

$$i\lambda_n \phi_n \to 0 \quad dans \quad L^2$$

De même $u_n \to 0$ et $\phi_n \to 0$ dans L^2 car

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{i\lambda_n} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n}{i\lambda_n} = 0$$

On prend le produit scalaire de (3.26) par u_n on obtient

$$-\mu\langle D^2u_n, u_n\rangle + i\rho\lambda_n\langle v_n, u_n\rangle - \gamma\langle D^2v_n, u_n\rangle - b\langle D\phi_n, u_n\rangle \to 0.$$

Intégrons par partie et utilisant (3.25)

$$\mu||Du_n||^2 + \rho||v_n||^2 \to 0$$

Alors $Du_n \to 0$.

Maintenant on prend le produit scalaire de (3.28) par ϕ_n et on intégrons par partie on obtient

$$\delta||D\phi_n||^2 - J||\varphi_n||^2 \to 0$$

Donc $D\phi_n \to 0$.

Ce qui contredit le fait que $||U_n||_{\mathscr{H}} = 1$ et la preuve de (3.15) est terminé.

3.2 Problème 2 : Thérmique et poreuse dissipations

On considère le problème suivant avec une seule porosité :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x & dans \quad]0,\pi[\times]0,+\infty[, \\ J\phi_{tt} = \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \tau\phi_t & dans \quad]0,\pi[\times]0,+\infty[, \\ c\theta_t = k\theta_{xx} - \beta u_{tx} - m\phi_t & dans \quad]0,\pi[\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{3.33}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(0,t) = \phi_x(0,t) = \theta_x(0,t) = 0 \quad t > 0 \tag{3.34}$$

$$u(\pi,t) = \phi_x(\pi,t) = \theta_x(\pi,t) = 0 \quad t > 0 \tag{3.35}$$

et les conditions initiales :

$$\begin{gathered} u(x,0) = u_0(x), \phi(x,0) = \phi_0(x), \theta(x,0) = \theta_1(x) \qquad x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = u_1(x), \phi_t(x,0) = \phi_1(x) \qquad x \in [0,\pi] \end{gathered}$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert

$$\mathscr{H} = \left\{ \begin{array}{c} (u,v,\phi,\varphi,\theta) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \\ \displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)dx = \int_0^\pi \phi(x)dx = \int_0^\pi \theta(x)dx = 0. \end{array} \right\}$$

On le munit du produit scalaire :

$$< U, U^* >_{\mathscr{H}} = \int_0^\pi (\rho v\overline{v^*} + J\varphi\overline{\varphi^*} + c\theta\overline{\theta^*} + \mu u_x\overline{u_x^*} + \alpha\phi_x\overline{\phi_x^*} + \xi\phi\overline{\phi^*} + b(u_x\overline{\phi^*} + \overline{u_x^*}\phi))dx,$$

où $\overline{u}$ désigne le conjugué de u, il convient de rappeler que ce produit et équivalent au produit habituel dans l'espace $\mathscr{H}$.
On définit l'énergie du système (3.33) par

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi (\rho u_t^2 + J\phi_t^2 + \mu u_x^2 + \alpha\phi_x^2 + \xi\phi^2 + c\theta^2 + bu_x\phi)dx$$

3.2.1 Existence et unicité

Proposition 3.2.1 *On suppose que les constantes du système vérifient la condition suivante*

$$\mu\xi > b^2$$

alors, le système (3.33) admet une solution unique.

On pose $v = u_t$ et $\varphi = \phi_t$ le système (3.33), (3.34) et (3.35) s'écrit

$$\begin{cases} u_t = v, \\ \\ v_t = \dfrac{1}{\rho}(\mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x), \\ \\ \phi_t = \varphi, \\ \\ \varphi_t = \dfrac{1}{J}(\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \tau\varphi), \\ \\ \theta_t = \dfrac{1}{c}(k\theta_{xx} - \beta v_x - m\varphi) \end{cases}$$

ce qui on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{A}U & = U_t, \\ \\ U(0) & = U_0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Où $U = (u, v, \phi, \varphi, \theta)^T$ et $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, \theta_1)^T$ et $\mathcal{A}$ est l'opérateur différentiel donné par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \\ \dfrac{\mu}{\rho}D^2 & 0 & \dfrac{b}{\rho}D & 0 & \dfrac{-\beta}{\rho}D \\ \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \\ \dfrac{-b}{J}D & 0 & \dfrac{\alpha}{J}D^2 - \dfrac{\xi}{J} & \dfrac{-\tau}{J} & \dfrac{m}{J} \\ \\ 0 & \dfrac{-\beta}{c}D & 0 & \dfrac{-m}{c} & \dfrac{k}{c}D^2 \end{pmatrix}$$

où I *est l'opérateur identité. Le domaine de $\mathcal{A}$ est alors*

$$D(\mathcal{A}) = H^2 \cap H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1 \cap H^2 \times H_0^1 \times H^2$$

Pour montrer l'existence d'une solution du système (3.36), on applique le théorème de Hille-Yosida, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal.
1) $\mathcal{A}$ dissipatif
Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif il suffit de prouver que

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0.$$

On a

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\mu}{\rho}u_{xx} + \frac{b}{\rho}\phi_x - \frac{\beta}{\rho}\theta_x \\ \\ \varphi \\ \\ \frac{\alpha}{J}\phi_{xx} - \frac{b}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\phi + \frac{m}{J}\theta - \frac{\tau}{J}\varphi \\ \\ \frac{k}{c}\theta_{xx} - \frac{\beta}{c}v_x - \frac{m}{c}\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = & \int_0^\pi (\mu u_{xx}\overline{v} + b\phi_x\overline{v} - \beta\theta_x\overline{v} + \alpha\phi_{xx}\overline{\varphi} - bu_x\overline{\varphi} - \xi\phi\overline{\varphi} + m\theta\overline{\varphi} - \tau\varphi\overline{\varphi} + k\theta_{xx}\overline{\theta} \\
& -\beta v_x\overline{\theta} - m\varphi\overline{\theta} + \mu v_x\overline{u_x} + \alpha\varphi_x\overline{\phi_x} + \xi\varphi\overline{\phi} + b(v_x\overline{\phi} + \overline{u_x}\varphi)dx \\
= & \ \mu[u_x\overline{v}]_0^\pi - \mu\int_0^\pi u_x\overline{v_x} + b[\phi\overline{v}]_0^\pi - b\int_0^\pi \phi\overline{v_x} - \beta[\theta\overline{v}]_0^\pi + \alpha[\phi_x\overline{\varphi}]_0^\pi - \int_0^\pi \phi_x\overline{\varphi} \\
& +b\int_0^\pi (\overline{u_x}\varphi - u_x\overline{\varphi}) + \xi\int_0^\pi (\varphi\overline{\phi} - \overline{\varphi}\phi) + m\int_0^\pi (\theta\overline{\varphi} - \overline{\theta}\varphi) - \tau\int_0^\pi |\varphi|^2 + k[\theta_x\overline{\theta}]_0^\pi \\
& -k\int_0^\pi |\theta_x|^2 + \beta\int_0^\pi (\theta\overline{v_x} - \overline{\theta}v_x) + \mu\int_0^\Pi v_x\overline{u_x} + \alpha\int_0^\pi \varphi_x\overline{\phi_x} + b\int_0^\Pi v_x\overline{\phi} \\
= & -\tau\int_0^\pi |\varphi|^2 - k\int_0^\Pi |\theta_x|^2 + 2i\int_0^\pi Im(\mu v_x\overline{u_x} + bv_x\overline{\phi} + \alpha\varphi_x\overline{\phi_x} + b\overline{u_x}\varphi + \xi\varphi\overline{\phi} \\
& +m\theta\overline{\varphi} + \beta\theta\overline{v_x})dx
\end{aligned}$$

Alors

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\tau\int_0^\pi |\varphi|^2 - k\int_0^\pi |\theta_x|^2 \leq 0$$

Donc $\mathcal{A}$ est dissipatif.
2) $\mathcal{A}$ maximal
Pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}$, nous supposons que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathscr{H}$ et on cherche
$U = (u, v, \phi, \varphi, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $(I - \mathcal{A})U = F$ ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$u - v = f_1, \tag{3.37}$$
$$v - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = \rho f_2, \tag{3.38}$$
$$\phi - \varphi = f_3, \tag{3.39}$$
$$-\alpha\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta + (\tau + J)\varphi = Jf_4, \tag{3.40}$$
$$-k\theta_{xx} + \beta v_x + m\varphi + c\theta = cf_5 \tag{3.41}$$

Substituons (3.37) et (3.39) dans (3.38),(3.40) et (3.41) on obtient

$$-\mu u_{xx} + u - b\phi_x + \beta\theta_x = \rho f_2 + f_1 = g_1 \tag{3.42}$$
$$-\alpha\phi_{xx} + bu_x + (\xi + \tau + J)\phi - m\theta = Jf_4 + (\tau + J)f_3 = g_2 \tag{3.43}$$
$$-k\theta_{xx} + \beta u_x + m\phi + c\theta = cf_5 + \beta f_1 + mf_3 = g_3 \tag{3.44}$$

Alors $g_1, g_2, g_3 \in L^2(0,\pi)$. *On définit l'espace* $W = H_0^1(0,\pi) \times H^1(0,\pi) \times H^1(0,\pi)$. *En multipliant les trois équation (3.42),(3.43) et (3.44) par des fonctions* $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\theta}) \in (C_0^1(0,\pi))^3$ *respectivement et on inetègre sur* $[0,\pi]$, *on obtient*

$$\mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx + \int_0^\pi u\widetilde{u} - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx + \beta\int_0^\pi \theta_x\widetilde{u}dx = \int_0^\pi g_1\widetilde{u}dx \tag{3.45}$$
$$\alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x dx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx + (\xi+\tau+J)\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx - m\int_0^\pi \theta\widetilde{\phi} = \int_0^\pi g_2\widetilde{\phi}dx \tag{3.46}$$
$$k\int_0^\pi \theta_x\widetilde{\theta}_x dx + \beta\int_0^\pi u_x\widetilde{\theta}dx + m\int_0^\pi \phi\widetilde{\theta}dx + c\int_0^\pi \theta\widetilde{\theta}dx = \int_0^\pi g_3\widetilde{\theta}dx \tag{3.47}$$

additionnons (3.45),(3.46) et (3.47), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (g_1\widetilde{u}+g_2\widetilde{\phi}+g_3\widetilde{\theta})dx &= \mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx+\int_0^\pi u\widetilde{u}dx-b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx+\beta\int_0^\pi \theta_x\widetilde{u}dx+\alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x dx\\ &+b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx+(\xi+\tau+J)\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx-m\int_0^\pi \theta\widetilde{\phi}dx+k\int_0^\pi \theta_x\widetilde{\theta}_x dx+\beta\int_0^\pi u_x\widetilde{\theta}dx+m\int_0^\pi \phi\widetilde{\theta}\\ &+c\int_0^\pi \theta\widetilde{\theta}dx.\end{aligned}$$

Pour $U = (u,\phi,\theta)$ *et* $\tilde{U} = (\widetilde{u}, \tilde{\phi}, \widetilde{\theta})$ *on définit sur* W *une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *et une forme linéaire* $L(.)$ *par*

$$\begin{aligned}a(U,\widetilde{U}) &= \mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx + \int_0^\pi u\widetilde{u}dx - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx + \beta\int_0^\pi \theta_x\widetilde{u}dx + \alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x dx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx\\ &+(\xi+\tau+J)\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx - m\int_0^\pi \theta\widetilde{\phi}dx + k\int_0^\pi \theta_x\widetilde{\theta}_x dx + \beta\int_0^\pi u_x\widetilde{\theta}dx + m\int_0^\pi \phi\widetilde{\theta}\\ &+c\int_0^\pi \theta\widetilde{\theta}dx\end{aligned}$$

$$L(\widetilde{U}) = \int_0^\pi (g_1\widetilde{u} + g_2\widetilde{\phi} + g_3\widetilde{\theta})dx.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue coercive et $L(.)$ est continue.
1) Continuité de $a(.,.)$

$$\begin{aligned}
|a(U,\widetilde{U})| &\leq \mu\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|\widetilde{u}\|_{L^2} + b\|\phi\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2} + \beta\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2} \\
&+\alpha\|\phi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}_x\|_{L^2} + b\|u\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}_x\|_{L^2} \\
&+(\xi+\tau+J)\|\phi\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2} + m\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2} + k\|\theta_x\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}_x\|_{L^2} + \beta\|u\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}_x\|_{L^2} \\
&+m\|\phi\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}\|_{L^2} + c\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}\|_{L^2} \\
&\leq \max(\mu,1,b,\alpha,\beta,(\xi+\tau+J),m,k,c)(\|u\|_{H_0^1} + \|\phi\|_{H^1}\| + \theta\|_{H^1}) \\
&(\|\widetilde{u}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\phi}\|_{H^1} + \|\widetilde{\theta}\|_{H^1}) \\
&\leq C'\|u\|_W\|\widetilde{u}\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.
2) Coercivité de $a(.,.)$

$$\begin{aligned}
a(U,U) &= \mu\int_0^\pi u_x^2dx + \int_0^\pi u^2dx + b\int_0^\pi \phi u_xdx - \beta\int_0^\pi \theta u_xdx + \alpha\int_0^\pi \phi_x^2dx \\
&-b\int_0^\pi u\phi_xdx + (\xi+\tau+J)\int_0^\pi \phi^2dx - m\int_0^\pi \theta\phi dx + k\int_0^\pi \theta_x^2dx \\
&-\beta\int_0^\pi u\theta_xdx + m\int_0^\pi \phi\theta dx + c\int_0^\pi \theta^2 \\
&\geq \mu\int_0^\pi u_x^2dx + \alpha\int_0^\pi \phi_x^2dx + k\int_0^\pi \theta_x^2dx \\
&\geq \min(\mu,\alpha,k)\int_0^\pi (u_x^2+\phi_x^2+\theta_x^2)dx \\
&\geq C_1'(\|u\|_{H_0^1} + \|\phi\|_{H^1} + \|\theta\|_{H^1}) \\
&\geq C_1'\|U\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.

3) Continuité de L

$$\begin{aligned}|L(\widetilde{U})| &= |\int_0^\pi g_1\widetilde{u} + g_2\widetilde{\phi} + g_3\widetilde{\theta}dx| \\ &\leq \|g_1\|_{L^2}\|\widetilde{u}\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2}\|\widetilde{\phi}\|_{L^2} + \|g_3\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}\|_{L^2} \\ &\leq \max(\|g_1\|_{L^2}, \|g_2\|_{L^2}, \|g_3\|_{L^2})(\|\widetilde{u}\|_{L^2} + \|\widetilde{\phi}\|_{L^2}, \|\widetilde{\theta}\|_{L^2}) \\ &\leq C_2'(\|\widetilde{u}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\phi}\|_{H^1} + \|\widetilde{\theta}\|_{H^1}) \\ &\leq C_2'\|\widetilde{U}\|_W.\end{aligned}$$

Donc $L(.)$ est continue.
$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W, et $L(.)$ est linéaire et continue sur W. D'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $(u,\phi,\theta)^T \in W = H_0^1 \times H^1 \times H^1$ telle que

$$a(U,\widetilde{U}) = L(\widetilde{U}) \qquad \forall \widetilde{U} \in W$$

ce que signifie que $u \in H_0^1(0,\pi), \phi \in H^1(0,\pi), \theta \in H^1, v = u - f_1 \in H_0^1$ et $\varphi = \phi - f_3 \in H^1$

il reste à montrer que u, ϕ et $\theta \in H^2$.

On prend $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\theta}) = (\widetilde{u}, 0, 0) \in C_0^1(0,\pi) \times C_0^1(0,\pi) \subset W$ dans (3.45) elle devient

$$\mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x dx + \int_0^\pi u\widetilde{u}dx + b\int_0^\pi \phi\widetilde{u}_x dx - \beta\int_0^\pi \theta\widetilde{u}_x dx = \int_0^\pi g_1\widetilde{u}dx.$$

Alors

$$\int_0^\pi u_x\widetilde{u_x}dx = -\int_0^\pi \frac{1}{\mu}(u - b\phi_x - \beta\theta_x - g_1)\widetilde{u}dx \qquad \forall \widetilde{u} \in C_0^1$$

ce que signifie que u_x admet une dérivèe faible dans $L^2(0,\pi)$, car

$$(u - b\phi_x - \beta\theta_x - g_1) \in L^2(0,\pi)$$

et on a

$$u_{xx} = (u_x)_x = \frac{1}{\mu}(u - b\phi_x - \beta\theta_x - g_1)$$

par suit $u_x \in H_0^1(0,\pi)$ donc $u \in H^2(0,\pi)$. De la même manière si on prend $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\theta}) = (0, \widetilde{\phi}, 0)$ et

$(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\theta}) = (0, 0, \widetilde{\theta})$. On prouve que $\phi \in H^2(0,\pi)$ et $\theta \in H^2(0,\pi)$.

Donc il existe $(u, v, \phi, \varphi, \theta)^T \in D(A)$ qui vérifie $(I - \mathcal{A})U = F$ pour tout $F \in H$, et $\mathcal{A}$ est maximal.

Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (3.36).

Lemma 3.2.1 *Soit (u, ϕ, θ) est la solution du (3.33) alors l'énergie $E(t)$ vérifie*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k\int_0^\pi \theta_x^2 - \tau\int_0^\pi \phi_t^2 \leq 0$$

On multiplie (3.33)$_1$ par u_t et on intègre sur $]0,\pi[$, il vient

$$\rho\int_0^\pi u_{tt}u_t dx - \mu\int_0^\pi u_{xx}u_t dx - b\int_0^\pi \phi_x u_t dx + \beta\int_0^\pi \theta_x u_t dx = 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi u_t^2 dx + \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi u_x^2 dx + b\int_0^\pi \phi u_{tx} dx - \beta\int_0^\pi \theta u_{tx} dx = 0. \tag{3.48}$$

On multiplie (3.33)$_2$ par ϕ_t on intègre sur $]0,\pi[$, il vient

$$\frac{J}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi \phi_t^2 dx + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi \phi_x^2 dx + b\int_0^\pi u_x\phi_t dx + \frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi \phi^2 dx - m\int_0^\pi \theta\phi_t dx + \tau\int_0^\pi \phi_t^2 dx = 0. \tag{3.49}$$

On multiplie (3.33)$_3$ par θ et on intègre sur $]0,\pi[$, il vient

$$\frac{c}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi \theta^2 dx + k\int_0^\pi \theta_x^2 dx + \beta\int_0^\pi u_{tx}\theta dx + m\int_0^\pi \phi_t\theta dx = 0. \tag{3.50}$$

Additionnons (3.48),(3.49) et (3.50) on obtient

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\pi (\rho u_t^2 + J\phi_t^2 + \mu u_x^2 + \alpha\phi_x^2 + \xi\phi^2 + c\theta^2 + bu_x\phi)dx\right\} = -k\int_0^\pi \theta_x^2 dx - \tau\int_0^\pi \phi_t^2 dx.$$

D'où

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0,$$

alors le problème (3.33) est dissipatif.

3.2.2 Stabilité exponentielle

Pour montrer la stabilité exponentielle, nous utilisons le théorème comme dans le problème précédent

$$i\mathbb{R} = \{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{3.51}$$

et

$$\overline{\lim}_{|\lambda|\to+\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \tag{3.52}$$

La preuve de (3.51) sera donnée en trois étapes :

Premiérement, on prouve que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.
Pour montrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, *on prend* $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathscr{H}$ *et on cherche* $U = (u, v, \phi, \varphi, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ *solution de* $\mathcal{A}U = F$ *ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit*

$$v = f_1, \tag{3.53}$$
$$\mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x = \rho f_2, \tag{3.54}$$
$$\varphi = f_3, \tag{3.55}$$
$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta - \tau\varphi = Jf_4, \tag{3.56}$$
$$k\theta_{xx} - \beta v_x - m\varphi = cf_5 \tag{3.57}$$

Substituons (3.53) et (3.55) dans (3.54) et (3.56) on obtient

$$\mu u_{xx} + b\phi_x - \beta\theta_x = \rho f_2 \tag{3.58}$$

$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi + m\theta = Jf_4 + \tau f_3 \tag{3.59}$$

et d'aprés (3.57) il existe $\theta \in H^2$ *tel que*

$$\theta_{xx} = \frac{1}{k}(cf_5 + \beta f_{1x} + mf_3)$$

Alors (3.58) et (3.59) on obtient

$$\begin{cases} \mu u_{xx} + b\phi_x = \rho f_2 + \beta\theta_x \\ \\ \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi = Jf_4 + \tau f_3 - m\theta \end{cases}$$

Il reste à prouver qu'il existe u et ϕ *satisfaisant*

$$u_{xx} + b\phi_x = \rho f_2 + \beta\theta_x = g_1 \in L^2(0,\pi) \tag{3.60}$$
$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi = Jf_4 + \tau f_3 - m\theta = g_2 \in L^2(0,\pi) \tag{3.61}$$

On définit l'espace $W = H_0^1(0,\pi) \times H^1(0,\pi)$.

En multipliant les deux équations (3.60) et (3.61) par des fonctions $\widetilde{u} \in C_0^1(0,\pi), \widetilde{\phi} \in C_0^1(0,\pi)$ *respectivement et on intègre sur* $[0,\pi]$ *on obtient*

$$\begin{aligned} \mu\int_0^\pi u_{xx}\widetilde{u}dx + b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx &= \int_0^\pi g_1\widetilde{u}dx \\ \alpha\int_0^\pi \phi_{xx}\widetilde{\phi}dx - b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx - \xi\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx &= \int_0^\pi g_2\widetilde{\phi}dx \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mu[u_x\widetilde{u}]_0^\pi - \mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_x + b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u} &= \int_0^\pi g_1\widetilde{u}dx \\ \alpha[\phi_x\widetilde{\phi}]_0^\pi - \alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_xdx - b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx - \xi\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx &= \int_0^\pi g_2\widetilde{\phi}dx \end{aligned}$$

Donc

$$-\mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_xdx + b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx = \int_0^\pi g_1\widetilde{u}dx \tag{3.62}$$
$$-\alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_x - b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi} - \xi\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi} = \int_0^\pi g_2\widetilde{\phi}dx. \tag{3.63}$$

Additionnons (3.62) et (3.63) on obtient

$$-\int_0^\pi (g_1\widetilde{u}+g_2\widetilde{\phi}) = \mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_xdx - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx + \alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_xdx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx + \xi\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx$$

Pour $U = (u,\phi)$ *et* $\widetilde{U} = (\widetilde{u},\widetilde{\phi})$ *on définit sur* W *une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *et une forme linéaire* $L(.)$ *par*

$$a(u,\widetilde{u}) = \mu\int_0^\pi u_x\widetilde{u}_xdx - b\int_0^\pi \phi_x\widetilde{u}dx + \alpha\int_0^\pi \phi_x\widetilde{\phi}_xdx + b\int_0^\pi u_x\widetilde{\phi}dx + \xi\int_0^\pi \phi\widetilde{\phi}dx$$

$$L(\widetilde{u}) = -\int_0^\pi (g_1\widetilde{u} + g_2\widetilde{\phi})dx.$$

On montre que $a(.,.)$ *est continue coercive et* $L(.)$ *est continue.*

Remark 3.2.1 *La continuité de $a(.,.)$ et $L(.)$ se font de la même manière que pour la cas de maximalité de $\mathcal{A}$.*

Coercivité de $a(.,.)$

$$a(U,U) = \mu \int_0^\pi u_x^2 dx + 2b \int_0^\pi \phi u_x dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx + \xi \int_0^\pi \phi^2 dx$$

en utilisant l'inégalité de Young on aura

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi u_x \phi dx &\leq \int_0^\pi |u_x \phi| dx \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\pi \phi^2 dx \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\pi u_x \phi dx \geq \frac{-\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\pi \phi^2 dx$$

On a

$$\begin{aligned} a(U,U) &\geq \mu \int_0^\pi u_x^2 dx - 2b(\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\pi \phi^2 dx) + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx + \xi \int_0^\pi \phi^2 dx \\ &\geq (\mu - b\varepsilon) \int_0^\pi u_x^2 dx + (\xi - \frac{b}{\varepsilon}) \int_0^\pi \phi^2 dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx \end{aligned}$$

on choisit $\mu - b\varepsilon > 0$ et $\xi - \frac{b}{\varepsilon} > 0$, alors $\frac{b}{\xi} < \varepsilon < \frac{\mu}{b}$
Donc

$$\begin{aligned} a(U,U) &\geq (\mu - b\varepsilon) \int_0^\pi u_x^2 dx + (\xi - \frac{b}{\varepsilon}) \int_0^\pi \phi^2 dx + \alpha \int_0^\pi \phi_x^2 dx \\ &\geq \min(\mu - b\varepsilon, \xi - \tfrac{b}{\varepsilon}, \alpha) \int_0^\pi (u_x^2 + \phi_x^2 + \phi^2) dx \end{aligned}$$

Notons que $\int_0^\pi u_x^2 dx$ est définie une norme sur $H_0^1(0,\pi)$ on aura

$$a(U,U) \geq C_4 \|U\|_W^2.$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W, et $L(.)$ est linéaire et continue sur W. D'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $(u,\phi)^T \in W = H_0^1 \times H^1$ telle que

$$a(U, \widetilde{U}) = L(\widetilde{U}) \quad \forall \widetilde{U} \in W$$

Ce que signifie que $u \in H_0^1(0,\pi), \phi \in H^1(0,\pi), v = f_1 \in H_0^1, \varphi = f_3 \in H^1$ *et* $\theta \in H^2$.

il reste à montrer que $u, \phi \in H^2$,
On prend $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}) = (\widetilde{u}, 0) \in C_0^1(0,\pi) \times C_0^1(0,\pi) \subset W$ *dans (3.62) et (3.63) elle devient*

$$-\mu \int_0^\pi u_x \widetilde{u}_x dx + b \int_0^\pi \phi_x \widetilde{u} dx = \int_0^\pi g_1 \widetilde{u} dx$$

Alors

$$\int_0^\pi u_x \widetilde{u}_x dx = -\int_0^\pi \frac{1}{\mu}(-b\phi_x + g_1)\widetilde{u} dx \qquad \forall \widetilde{u} \in C_0^1$$

Ce qui signifie que u_x *admet une dérivée faible dans* $L^2(0,\pi)$, *car*

$$-b\phi_x + g_1 \in L^2(0,\pi)$$

et on a

$$u_{xx} = (u_x)_x = \frac{1}{\mu}(-b\phi_x + g_1)$$

par suit $u_x \in H_0^1(0,\pi)$ *donc* $u \in H^2(0,\pi)$. *De la même manière si en prend* $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}) = (0, \widetilde{\phi})$, *on*

prouve que $\phi \in H^2(0,\pi)$.

Donc, il existe $(u, v, \phi, \varphi, \theta)^T \in D(A)$ *qui vérifie* $\mathcal{A}U = F$ *pour tout* $F \in H$ *et* $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Les points (i) et (ii) de la démonstration du théorème se font de la même manière que dans la démonstration du problème (3.1).
(iii) Supposons que $\{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas inclu dans* $\rho(\mathcal{A})$, *de (ii) ci-dessus, on conclut qu'il existe* $\sigma \geq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ *tel que* $\{i\lambda, |\lambda| < \sigma\} \subset \rho(\mathcal{A})$, *mais* $\sup\left\{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \sigma\right\} = \infty$. *Dans ce cas, nous pouvons trouver une suite de nombres réels* (λ_n) *et une suite de vecteurs unitaires* $(U_n) \subset D(\mathcal{A})$, *telle que* $|\lambda_n| < \sigma$, $\lambda_n \longrightarrow \sigma$ *et*

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\| \longrightarrow 0. \tag{3.64}$$

C'est-à-dire

$$i\lambda_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad H^1 \tag{3.65}$$
$$i\lambda_n \rho v_n - \mu D^2 u_n - bD\phi_n + \beta D\theta_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.66}$$
$$i\lambda_n \phi_n - \varphi_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad H^1 \tag{3.67}$$
$$i\lambda_n J\varphi_n - (\alpha D^2\phi_n - \xi\phi_n) + bDu_n + \tau\varphi_n - m\theta_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.68}$$
$$i\lambda_n c\theta_n - kD^2\theta_n + \beta Dv_n + m\varphi_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.69}$$

Nous avons tout d'abord

$$Re\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle \longrightarrow 0$$

alors

$$Re\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle = \tau \int_0^\pi \|\varphi_n\|^2 + k\int_0^\pi \|D\theta_n\|^2$$

Donc

$$\|\varphi_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2$$
$$\|D\theta_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2$$

On a d'aprés l'inégalité de Poincaré $\|\theta_n\|_{L^2} \leq c\|D\theta_n\|_{L^2}$*, alors* $\theta_n \longrightarrow 0$ *dans* L^2*. Donc (3.69) donne*

$$-kD^2\theta_n + \beta Dv_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.70}$$

Integrons (3.70)

$$\begin{aligned}\int_0^x (-kD^2\theta_n + \beta Dv_n)dx &= -k(D\theta_n(x) - D\theta_n(0)) + \beta(v_n(x) - v_n(0))\\ &= -kD\theta_n + \beta v_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2\end{aligned}$$

Alors $v_n \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^2$.

On a $v_n \longrightarrow 0$ *et* $\varphi_n \longrightarrow 0$*, alors d'aprés (3.65) et (3.67)* $u_n \longrightarrow 0$ *et* $\phi_n \longrightarrow 0$.

Maintenant on prend le produit scalaire de (3.66), (3.68) par u_n, ϕ_n *on obtient respectivement*

$$-\mu\langle D^2u_n, u_n\rangle - b\langle D\phi_n, u_n\rangle \longrightarrow 0$$
$$-\alpha\langle D^2\phi_n, \phi_n\rangle + b\langle Du_n, \phi_n\rangle \longrightarrow 0$$

comme $u_n \rightarrow 0$ *et* $\phi_n \longrightarrow 0$ *on obtient*

$$\mu\|Du_n\|^2 \longrightarrow 0$$

et

$$\alpha\|D\phi_n\|^2 \longrightarrow 0$$

Alors $Du_n \to 0$ *et* $D\phi_n \longrightarrow 0$*, et par suite* $(u_n, v_n, \phi_n, \varphi_n, \theta_n) \longrightarrow 0$ *dans* $\mathscr{H}$*.*
Ce qui contredit le fais que $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$*.*

2) Preuve de (3.52) :
Supposons que $\overline{\lim}_{|\lambda|\longrightarrow\infty}\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$ *n'est pas vrai, alors il existe une suite*

$(\lambda_n) \subset \rho(\mathcal{A})$, $|\lambda_n| \to \infty$ *et une suite de vecteurs unitaires* (U_n) *dans* $D(\mathcal{A})$*.tel*

que

$$\lim_{n\to\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| = \infty.$$

Comme

$$Re\langle(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle \longrightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} Re\langle(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle &= Re(\langle i\lambda_n U_n, U_n\rangle - \langle \mathcal{A}U_n, U_n\rangle) \\ &= \tau\int_0^\pi ||\varphi_n||^2 + k\int_0^\pi ||D\theta_n||^2 \end{aligned}$$

par conséquent $\varphi_n \to 0, D\theta_n \to 0$ *dans* L^2*, alors d'aprés l'inégalité de Poincaré* $\theta_n \to 0$ *dans* L^2*.*
On divise (3.69) par λ_n *en utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient*

$$\frac{1}{\lambda_n}(kD^2\theta_n - \beta Dv_n) \to 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.71}$$

On divise (3.65) par λ_n *et utilison (3.71), on obtient*

$$\frac{1}{\lambda_n}kD^2\theta_n - i\beta Du_n \to 0 \quad dans \quad L^2 \tag{3.72}$$

Comme $\|Du_n\|$ *est borné, alors* $\|\frac{1}{\lambda_n}kD^2\theta_n\|$ *est borné, on prend le produit scalaire de (3.72) par* Du_n*, on obtient*

$$\langle\frac{1}{\lambda_n}kD^2\theta_n, Du_n\rangle - i\beta\|Du_n\|^2 \to 0 \tag{3.73}$$

Integrons par partie on obtient

$$\langle\frac{1}{\lambda_n}kD^2\theta_n, Du_n\rangle = -\langle\frac{1}{\lambda_n}kD\theta_n, D^2u_n\rangle.$$

on divise (3.66) par λ_n *on en déduit que* $\|\frac{1}{\lambda_n}D^2u_n\|$ *est borné.*
Alors

$$\langle kD\theta_n, \frac{1}{\lambda_n}D^2u_n\rangle \to 0$$

D'aprés (3.73), $\|Du_n\| \to 0$ *et* $\frac{1}{\lambda_n} Dv_n \to 0$.

On prend le produit scalaire (3.66) par v_n *et divisons par* λ_n *on obtient :*

$$i\rho\|v_n\|^2 + \mu\langle Du_n, \frac{1}{\lambda_n} Dv_n\rangle - b\langle D\phi_n, \frac{1}{\lambda_n} Dv_n\rangle \to 0$$

De plus, on obtient $v_n \to 0$ *dans* L^2.
multipluons (3.68) par ϕ_n*, on obtient*

$$J\langle i\lambda_n\varphi_n, \phi_n\rangle + \alpha\|D\phi_n\|^2 + \xi\|\phi_n\|^2 \to 0$$

en utilisant (3.67) on obtient

$$-\|\varphi_n\|^2 + \alpha\|D\phi_n\|^2 + \xi\|\phi_n\|^2 \to 0$$

Ce qui implique $D\phi_n \to 0$ *et* $\phi_n \to 0$ *dans* L^2 *et par suite* $(u_n, v_n, \phi_n, \varphi_n, \theta_n) \to 0$ *dans* $\mathscr{H}$.
Ce qui contredit le fait que $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$*, et la preuve de (3.52) est terminé.*

Chapitre 4

Un problème poreux avec double porosité

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudiera l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution d'un système linéaire en théorie de porosité avec double porosité.

On considère le problème suivant avec double porosité :

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,+\infty[, \\ k_1\varphi_{tt} = \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \tau_1\varphi_t - \tau_3\psi_t & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,+\infty[, \\ k_2\psi_{tt} = b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} - du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta - \tau_4\varphi_t - \tau_2\psi_t & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,+\infty[, \\ c\theta_t = k\theta_{xx} - \beta T_0 u_{tx} - \gamma_1 T_0\varphi_t - \gamma_2 T_0\psi_t & \textit{dans} \quad]0,L[\times]0,+\infty[. \end{cases} \tag{4.1}$$

où u est le deplacement transversal, θ est la différence de temperature et φ et ψ les variables de porosité.
Avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(x,t) = \varphi_x(x,t) = \psi_x(x,t) = \theta_x(x,t) = 0 \quad t > 0 \textit{ et } x = 0, L \tag{4.2}$$

et les conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x), \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \theta(x,0) = \theta_1(x)$$
$$u_t(x,0) = v_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x)$$

On désigne par $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert

$$\mathscr{H} = \left\{ \begin{array}{c} U \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H^1(0,L) \\ \displaystyle\int_0^L \varphi(x)dx = \int_0^L \phi(x)dx = \int_0^L \theta(x)dx = \int_0^L \psi(x)dx = \int_0^L w(x)dx = 0. \end{array} \right\}$$

où $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi, w, \theta)$
On le munit du produit scalaire :

$$\begin{aligned} < U, U^* >_{\mathscr{H}} = & \int_0^L (\rho_0 v\overline{v^*} + k_1\phi\overline{\phi^*} + k_2 W\overline{w^*} + \frac{c}{T_0}\theta\overline{\theta^*} + \mu u_x\overline{u_x^*} + \alpha\varphi_x\overline{\varphi_x^*} + \alpha_1\varphi\overline{\varphi^*} \\ & +\gamma\psi_x\overline{\psi_x^*} + b_1(\varphi_x\overline{\psi_x^*} + \overline{\varphi_x^*}\psi_x) + \alpha_3(\varphi\overline{\psi^*} + \overline{\varphi^*}\psi) + d(u_x\overline{\psi^*} + \overline{{}^*_x}\psi) \\ & +b(u_x\overline{\varphi^*} + \overline{{}^*_x}\varphi))dx \end{aligned}$$

où $\bar{u}$ désigne le conjugué de u, il convient de rappeler que ce produit et équivalent au produit habituel dans l'espace $\mathscr{H}$.
On définit l'énergie du système (4.1) par

$$\begin{aligned} E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L & (\rho_0 T_0 u_t^2 + k_1 T_0\varphi_t^2 + k_2 T_0\psi_t^2 + c\theta^2 + \mu T_0 u_x^2 + \alpha T_0\varphi_x^2 + \alpha_1 T_0\varphi^2 + \gamma T_0\psi_x^2 + \alpha_2 T_0\psi^2 \\ & +2bT_0 u_x\varphi + 2dT_0 u_x\psi + 2\alpha_3 T_0\varphi\psi + 2b_1 T_0\varphi_x\psi_x)dx \end{aligned}$$

4.2 Existence et unicité

Proposition 4.2.1 *On suppose que les constantes du système vérifient la condition suivante : Les matrices*
$A = \begin{pmatrix} \mu & b & d \\ b & \alpha_1 & \alpha_3 \\ d & \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & b_1 \\ b_1 & \gamma \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\tau_3+\tau_4}{2} \\ \frac{\tau_3+\tau_4}{2} & \tau_2 \end{pmatrix}$ *sont définies positives, alors, le système (4.1) admet une solution unique.*

On pose $v = u_t$ et $\phi = \varphi_t$ et $w = \psi_t$ le problème (4.1)et (4.2) devient

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = \dfrac{1}{\rho_0}(\mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x), \\ \varphi_t = \phi, \\ \phi_t = \dfrac{1}{k_1}(\alpha\varphi_{xx} - b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \tau\phi - \tau_3 w), \\ \psi_t = w \\ w_t = \dfrac{1}{k_2}(b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} - du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\theta - \tau_4\phi - \tau_2 w) \\ \theta_t = \dfrac{1}{c}(k\theta_{xx} - \beta T_0 v_x - \gamma_1 T_0\phi - \gamma_2 T_0 w) \end{cases}$$

il peut écrit alors,

$$\begin{cases} \mathcal{A}U & = U_t, \\ U(0) & = U_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Où $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi, w, \theta)^T$ *et* $U_0 = (u_0, u_1, \varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1, \theta)^T$ *et* $\mathcal{A}$ *est l'opérateur différentiel donné par*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu}{\rho_0}D^2 & 0 & \dfrac{b}{\rho_0}D & 0 & \dfrac{d}{\rho_0}D & 0 & \dfrac{-\beta}{\rho_0}D \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-b}{k_1}D & 0 & \dfrac{\alpha}{k_1}D^2 - \dfrac{\alpha_1}{k_1} & \dfrac{-\tau_1}{k_1} & \dfrac{b}{k_1}D^2 - \dfrac{\alpha_3}{k_1} & \dfrac{-\tau_3}{k_1} & \dfrac{\gamma_1}{k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \dfrac{-d}{k_2}D & 0 & \dfrac{1}{k_2}(b_1 D^2 - \alpha_3) & \dfrac{-\tau_4}{k_2} & \dfrac{1}{k_2}(\gamma D^2 - \alpha_2) & \dfrac{-\tau_2}{k_2} & \dfrac{\gamma_2}{k_2} \\ 0 & \dfrac{-\beta T_0}{c}D & 0 & \dfrac{-\gamma_1 T_0}{c} & 0 & \dfrac{-\gamma_2 T_0}{c} & \dfrac{k}{c}D^2 \end{pmatrix}$$

et I *est l'opérateur identité. Le domaine de* $\mathcal{A}$ *est*

$$D(\mathcal{A}) = H^2 \cap H_0^1 \times H_0^1 \times H^2 \times H^1 \times H^2 \times H^1 \times H^2$$

Pour montrer l'existence d'une solution du système (4.3), on applique le théorème de Hille-Yosida, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal
1) $\mathcal{A}$ dissipatif
Pour montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif il suffit de prouver que

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} \leq 0.$$

On a

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\mu}{\rho_0}u_{xx} + \frac{b}{\rho_0}\varphi_x + \frac{d}{\rho_0}\psi_x - \frac{\beta}{\rho_0}\theta_x \\ \phi \\ \frac{\alpha}{k_1}\varphi_{xx} + \frac{b_1}{k_1}\psi_{xx} - \frac{-b}{k_1}u_x - \frac{\alpha_1}{k_1}\varphi - \frac{\alpha_3}{k_1}\psi + \frac{\gamma_1}{k_1}\theta - \frac{\tau_1}{k_1}\phi - \frac{\tau_3}{k_1}w \\ w \\ \frac{b_1}{k_2}\varphi_{xx} + \frac{\gamma}{k_2}\psi_{xx} - \frac{d}{k_2}u_x - \frac{\alpha_3}{k_2}\varphi - \frac{\alpha_2}{k_2}\psi + \frac{\gamma_2}{k_2}\theta - \frac{\tau_4}{k_2}\phi - \frac{\tau_2}{k_2}w \\ \frac{k}{c}\theta_{xx} - \frac{\beta T_0}{c}\phi - \frac{\gamma_2 T_0}{c}\phi - \frac{\gamma_2 T_0}{c}w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = \ & \int_0^L (\mu u_{xx}\overline{v} + b\varphi_x\overline{v} + d\psi_x\overline{v} - \beta\theta_x\overline{v} + \alpha\varphi_{xx}\overline{\phi} + b_1\psi_{xx}\overline{\phi} - bu_x\overline{\phi} \\
& -\alpha_1\varphi\overline{\phi} - \alpha_3\psi\overline{\phi} + \gamma_1\theta\overline{\phi} - \tau_1\phi^2 - \tau_3 w\overline{\phi} + b_1\varphi_{xx}\overline{w} + \gamma\psi_{xx}\overline{w} - du_x\overline{w} \\
& -\alpha_3\varphi\overline{w} - \alpha_2\psi\overline{w} + \gamma_2\theta\overline{w} - \tau_4\phi\overline{w} - \tau_2 w^2 + \frac{k}{T_0}\theta_{xx}\overline{\theta} - \beta v_x\overline{\theta} - \gamma_1\phi\overline{\theta} \\
& -\gamma_2 w\overline{\theta} + \mu v_x\overline{u_x} + \alpha\phi_x\overline{\varphi_x} + \alpha_1\phi\overline{\varphi} + \gamma w_x\overline{\psi_x} + \alpha_2 w\overline{\psi} + b_1\phi_x\overline{\psi_x} + b_1 w_x\overline{\varphi_x} \\
& +\alpha_3\phi\overline{\psi} + \alpha_3 w\overline{\varphi} + dv_x\overline{\psi} + dw\overline{u_x} + bv_x\overline{\varphi} + b\phi\overline{u_x})dx \\
= \ & -\int_0^L [\tau_1\phi^2 + \tau_2 w^2 + \frac{k}{T_0}\theta_x^2 + (\tau_3+\tau_4)Re(\phi\overline{w})]dx + 2i\int_0^L Im(\mu v_x\overline{u_x} \\
& +bv_x\overline{\varphi} + dv_x\overline{\psi} + \beta\theta\overline{v_x} + \alpha\phi_x\overline{\varphi_x} + b_1\phi_x\overline{u_x} + b\phi\overline{u_x} + \alpha_1\phi\overline{\varphi} + \alpha_3\phi\overline{\psi} + \gamma_1\theta\overline{\phi} \\
& +b_1 w_x\overline{\varphi_x} + \gamma w_x\overline{\psi_x} + dw\overline{u_x} + \alpha_3 w\overline{\varphi} + \gamma_2\theta\overline{w} + \alpha_2 w\overline{\psi})dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathscr{H}} = -\int_0^L (\tau_1\phi^2 + \tau_2 w^2 + \frac{k}{T_0}\theta_x^2 + (\tau_3+\tau_4)Re(\phi\overline{w}))dx \leq 0$$

Donc $\mathcal{A}$ est dissipatif.
2) $\mathcal{A}$ maximal
Pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}$, nous prenons $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7)^T \in \mathscr{H}$ et on cherche $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi, w, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $(I - \mathcal{A})U = F$ ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$
\begin{aligned}
u - v &= f^1, && (4.4)\\
-\mu u_{xx} - \rho_0 v - b\varphi_x - d\psi_x + \beta\theta_x &= \rho_0 f^2, && (4.5)\\
\varphi - \phi &= f^3, && (4.6)\\
bu_x - \alpha\varphi_{xx} + \alpha_1\varphi + k_1\phi + \tau_1\phi - b_1\psi_{xx} - bu_x + \alpha_3\psi + \tau_3 w - \gamma_1\theta &= k_1 f^4, && (4.7)\\
\psi - w &= f^5, && (4.8)\\
du_x - b_1\varphi_{xx} - \gamma\psi_{xx} + \alpha_3\varphi + \alpha_2\psi + \tau_4\phi + k_2 w + \tau_2 w - \gamma_2\theta &= k_2 f^6, && (4.9)\\
-k\theta_{xx} + \beta T_0 v_x + \gamma_1 T_0\phi + \gamma_2 T_0 w + c\theta &= cf^7. && (4.10)
\end{aligned}
$$

substituons (4.4), (4.6) et (4.8) dans (4.5) , (4.7), (4.9) et (4.10) on obtient

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\rho_0 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x - d\psi_x + \beta\theta_x = \rho_0(f^1 + f^2) = g_1\\
bu_x + (k_1 + \tau_1 + \alpha_1)\varphi - \alpha\varphi_{xx} - b_1\psi_{xx} + (\alpha_3 + \tau_3)\psi - \gamma_1\theta = k_1(f^3 + f^4) - \tau_1 f^3 - \tau_3 f^5 = g_2\\
(\alpha_3 + \tau_4)\varphi - b_1\varphi_{xx} + (\alpha_2 + k_2 + \tau_2)\psi - \gamma\psi_{xx} + du_x - \gamma_2\theta = k_2 f^6 + \tau_4 f^3 + (k_2 + \tau_2) f^5 = g_3\\
\beta u_x + \gamma_1\varphi + \gamma_2\psi + \frac{c}{T_0}\theta - \frac{k}{T_0}\theta_{xx} = \frac{c}{T_0} f^7 + \beta f^1_x + \gamma_1 f^3 + \gamma_2 f^5 = g_4.
\end{array}
\right.
\tag{4.11}
$$

où $g_1, g_2, g_3, g_4 \in L^2(0, L)$. On note par $W = H^1_0(0, L) \times H^1(0, L) \times H^1(0, L) \times H^1(0, L)$.
En multipliant les quatres équations $(4.11)_1, (4.11)_2, (4.11)_3$ et $(4.11)_4$ par des fonctions $(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta}) \in (C^1_0(0, L))^4$ respectivement et on intègre sur $(0, L)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\mu \int_0^L u_x\widetilde{u}_x dx + b\int_0^L \varphi\widetilde{u}_x + d\int_0^L \psi\widetilde{u}_x - \beta\int_0^L \theta\widetilde{u}_x - \rho_0\int_0^L u\widetilde{u} = \int_0^L g_1\widetilde{u}\\
&b\int_0^L u_x\widetilde{\varphi} + (k_1 + \tau_1 + \alpha_1)\int_0^L \varphi\widetilde{\varphi} + \alpha\int_0^L \varphi_x\widetilde{\varphi}_x + b_1\int_0^L \psi_x\widetilde{\varphi}_x + (\alpha_3 + \tau_3)\int_0^L \psi\widetilde{\varphi} - \gamma_1\int_0^L \theta\widetilde{\varphi} dx\\
&\qquad = \int_0^L g_2\widetilde{\varphi} dx\\
&d\int_0^L u_x\widetilde{\psi} dx + (\alpha_3 + \tau_4)\int_0^L \widetilde{\psi} + b_1\int_0^L \widetilde{\psi}_x\varphi_x dx + (\alpha_2 + k_2 + \tau_2)\int_0^L \widetilde{\psi} + \gamma\int_0^L \widetilde{\psi}_x\psi_x dx - \gamma_2\int_0^L \widetilde{\psi}\\
&\qquad = \int_0^L g_3\widetilde{\psi} dx\\
&\beta\int_0^L \widetilde{\theta}u_x + \gamma_1\int_0^L \widetilde{\theta}\varphi + \gamma_2\int_0^L \widetilde{\theta}\psi + \frac{c}{T_0}\int_0^L \widetilde{\theta}\theta + \frac{k}{T_0}\int_0^L \widetilde{\theta}_x\theta_x = \int_0^L g_4\widetilde{\theta}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Additionnons les équations de (4.12), on obtient

$$\int_0^L (g_1\widetilde{u}+g_2\widetilde{\varphi}+g_3\widetilde{\psi}+g_4\widetilde{\theta})dx = \mu\int_0^L u_x\widetilde{u}_x+\rho_0\int_0^L u\widetilde{u}+\int_0^L \widetilde{u}_x(b\varphi+d\psi-\beta\theta)+\int_0^L u_x(d\widetilde{\psi}+\beta\widetilde{\theta}+b\widetilde{\psi})$$

$$+(k_1+\tau_1+\alpha_1)\int_0^L \varphi\widetilde{\varphi}+\alpha\int_0^L \varphi_x\widetilde{\varphi}_x+b_1\int_0^L \psi_x\widetilde{\varphi}_x+(\alpha_3+\tau_3)\int_0^L \psi\widetilde{\varphi}-\gamma_1\int_0^L \theta\widetilde{\varphi}+b_1\int_0^L \varphi_x\widetilde{\psi}_x$$

$$+(\alpha_2+k_2+\tau_2)\int_0^L \psi\widetilde{\psi}+\gamma\int_0^L \psi_x\widetilde{\psi}_x+(\alpha_3+\tau_4)\int_0^L \varphi\widetilde{\psi}-\gamma_2\int_0^L \theta\widetilde{\psi}+\frac{c}{T_0}\int_0^L \theta\widetilde{\theta}+\frac{k}{T_0}\int_0^L \theta_x\widetilde{\theta}_x$$

$$+\gamma_2\int_0^L \psi\widetilde{\theta}+\gamma_1\int_0^L \varphi\widetilde{\theta}$$

Pour $U=(u,\varphi,\psi,\theta)^T$ *et* $\widetilde{U}=(\widetilde{u},\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},\widetilde{\theta})^T$ *on définit sur* W *une forme bilinéaire* $a(.,.)$ *et une forme linéaire* $L(.)$ *par*

$$a(U,\widetilde{U}) = \mu\int_0^L u_x\widetilde{u}_x+\rho_0\int_0^L u\widetilde{u}+\int_0^L \widetilde{u}_x(b\varphi+d\psi-\beta\theta)+\int_0^L u_x(d\widetilde{\psi}+\beta\widetilde{\theta}+b\widetilde{\psi})$$

$$+(k_1+\tau_1+\alpha_1)\int_0^L \varphi\widetilde{\varphi}+\alpha\int_0^L \varphi_x\widetilde{\varphi}_x+b_1\int_0^L \psi_x\widetilde{\varphi}_x+(\alpha_3+\tau_3)\int_0^L \psi\widetilde{\varphi}-\gamma_1\int_0^L \theta\widetilde{\varphi}+b_1\int_0^L \varphi_x\widetilde{\psi}_x$$

$$+(\alpha_2+k_2+\tau_2)\int_0^L \psi\widetilde{\psi}+\gamma\int_0^L \psi_x\widetilde{\psi}_x+(\alpha_3+\tau_4)\int_0^L \varphi\widetilde{\psi}-\gamma_2\int_0^L \theta\widetilde{\psi}+\frac{c}{T_0}\int_0^L \theta\widetilde{\theta}+\frac{k}{T_0}\int_0^L \theta_x\widetilde{\theta}_x$$

$$+\gamma_2\int_0^L \psi\widetilde{\theta}+\gamma_1\int_0^L \varphi\widetilde{\theta}$$

$$L(\widetilde{U}) = \int_0^L (g_1\widetilde{u}dx+g_2\widetilde{\varphi}dx+g_3\widetilde{\psi}dx+g_4\widetilde{\theta})dx.$$

On montre que $a(.,.)$ *est continue coercive et* $L(.)$ *est continue.*

1) Continuité de $a(.,.)$

$$
\begin{aligned}
\left|a(U,\widetilde{U})\right| \leq\ & \mu\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}+\rho_0\|u\|_{L^2}\|\widetilde{u}\|_{L^2}+b\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}+d\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}+\beta\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}\\
&+d\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2}+\beta\|u_x\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}\|_{L^2}+b\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2}\|\widetilde{u}_x\|_{L^2}+(k_1+\tau_1+\alpha_1)\|\varphi\|_{L^2}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2}\\
&+\alpha\|\varphi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\varphi}_x\|_{L^2}+b_1\|\psi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}_x\|_{L^2}+(\alpha_3+\tau_3)\|\psi\|_{L^2}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2}+\gamma_1\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^2}\\
&+(\alpha_1+k_2+\tau_2)\|\psi\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2}+b_1\|\varphi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}_x\|_{L^2}+\gamma\|\psi_x\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}_x\|_{L^2}\\
&+(\alpha_3+\tau_4)\|\varphi\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2}+\gamma_2\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2}+c\|\theta\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}\|_{L^2}+k\|\theta_x\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}_x\|_{L^2}\\
&+\gamma_2\|\psi\|_{L^2}\|\widetilde{\theta}\|_{L^2}+\gamma_1\|\varphi\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2}\\
\leq\ & \max(\mu,\rho_0,b,d,\beta,k_1+\tau_1+\alpha_1,\alpha,b_1,\alpha_3+\tau_3,\gamma_1,\alpha_1+k_2+\tau_2,\gamma,\alpha_3+\tau_4,\gamma_2,c,k,\alpha_2)\\
&\left(\|u\|_{H_0^1}+\|\varphi\|_{H^1}+\|\psi\|_{H^1}+\|\theta\|_{H^1}\right)\left(\|\widetilde{u}\|_{H_0^1}+\|\widetilde{\varphi}\|_{H^1}+\|\widetilde{\psi}\|_{H^1}+\|\widetilde{\theta}\|_{H^1}\right)\\
\leq\ & C_1\|U\|_W\|\widetilde{U}\|_W.
\end{aligned}
$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2) Coercivité de $a(.,.)$

$$
\begin{aligned}
a(U,U)=\ & \mu\int_0^L u_x^2dx+\rho_0\int_0^L u^2dx+2\int_0^L u_x(b\varphi+d\psi-\beta\theta)dx+(k_1+\tau_1+\alpha_1)\int_0^L \varphi^2+\alpha\int_0^L \varphi_x^2dx\\
&+2b_1\int_0^L \varphi_x\psi_xdx+(2\alpha_3+\tau_3+\tau_4)\int_0^L \varphi\psi dx+(\alpha_2+k_2+\tau_2)\int_0^L \psi^2+\gamma\int_0^L \psi_x^2dx+\frac{c}{T_0}\int_0^L \theta^2dx\\
&+\frac{k}{T_0}\int_0^L \theta_x^2dx
\end{aligned}
$$

Comme la matrice $A=\begin{pmatrix}\mu & b & d\\ b & \alpha_1 & \alpha_3\\ d & \alpha_3 & \alpha_2\end{pmatrix}$ *est définie positif, alors il existe un* $\varepsilon>0$ *assez petit tel que* $A-\varepsilon I$ *est définie positive, de plus* $C=\begin{pmatrix}\tau_1 & \frac{\tau_3+\tau_4}{2}\\ \frac{\tau_3+\tau_4}{2} & \tau_2\end{pmatrix}$ *est définie positive.*

$$
\begin{aligned}
a(U,U) = & \int_0^L \begin{pmatrix} u_x & \varphi & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu-\varepsilon & b & d \\ b & \alpha_1-\varepsilon & \alpha_3 \\ d & \alpha_3 & \alpha_2-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \varphi & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & \frac{\tau_3+\tau_4}{2} \\ \frac{\tau_3+\tau_4}{2} & \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} u & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 & -\beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix} \\
& + \varepsilon u_x^2 + (\varepsilon+k_1)\varphi^2 + \alpha\varphi_x^2 + (\varepsilon+k_2)\psi^2 + \gamma\psi_x^2 + \tfrac{c}{T_0}\theta^2 + \tfrac{k}{T_0}\theta_x^2 \\
\geq \ & min(k_1+\varepsilon, \varepsilon, k_2+\varepsilon, \gamma, \alpha, \tfrac{c}{T_0}, \tfrac{k}{T_0}) \int_0^L (u_x^2+\varphi^2+\varphi_x^2+\psi^2+\psi_x^2+\theta+\theta_x^2)dx \\
\geq \ & C_2(\|u\|_{H_0^1} + \|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1} + \|\theta\|_{H^1}) \\
\geq \ & C_2\|U\|_W.
\end{aligned}
$$

Donc a est coercive.

3) Continuité de $L(.)$

$$
\begin{aligned}
\|L(\widetilde{U})\| \ & = \| \int_0^L g_1\widetilde{u} + \int_0^L g_2\widetilde{\varphi} + \int_0^L g_3\widetilde{\psi} + \int_0^L g_4\widetilde{\theta}\| \\
& \leq \|g_1\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{L^2} + \|g_2\|_{L^2}\|\tilde{\varphi}\|_{L^2} + \|g_3\|_{L^2}\|\widetilde{\psi}\|_{L^2} + \|g_4\|_{L^2}\|\tilde{\theta}\|_{L^2} \\
& \leq max(\|g_1\|_{L^2}, \|g_2\|_{L^2}, \|g_3\|_{L^2}, \|g_4\|_{L^2})(\|\widetilde{u}\|_{L^2} + \|\widetilde{\varphi}\|_{L^2}\| + \widetilde{\psi}\|_{L^2} + \|\widetilde{\theta}\|_{L^2}) \\
& \leq C_3(\|\widetilde{u}\|_{H_0^1} + \|\widetilde{\varphi}\|_{H^1} + \|\widetilde{\psi}\|_{H^1} + \|\widetilde{\theta}\|_{H^1}) \\
& \leq C_3\|\widetilde{U}\|_W.
\end{aligned}
$$

Donc $L(.)$ est continue.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W, et $L(.)$ est linéaire et continue sur W. D'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $U^* = (u,\varphi,\psi,\theta)^T \in W = H_0^1 \times H^1 \times H^1 \times H^1$ telle que

$$a(U^*, \widetilde{U}) = L(\widetilde{U}) \qquad \forall \widetilde{U} \in W.$$

Ce qui signifie que $u \in H_0^1(0,L), \varphi \in H^1(0,L), \psi \in H^1(0,L), \theta \in H^1(0,L)$,

$v = u - f^1 \in H_0^1(0,L), \phi = \varphi - f^3 \in H^1(0,L)$ *et* $w = \psi - f^5 \in H^1(0,L)$.

il reste á montrer que u, φ, ψ *et* $\theta \in H^2(0,L)$.
On prend $(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta}) = (\widetilde{u}, 0, 0, 0) \in (C_0^1(0,L))^4 \subset W$ *dans (4.12)*$_1$ *elle devient*

$$\int_0^L u_x \widetilde{u}_x dx = -\int_0^L \frac{1}{\mu}(-b\varphi_x - d\psi_x + \beta\theta_x + \rho_0 u + g_1)\widetilde{u} dx \qquad \forall\ \widetilde{u} \in C_0^1(0,L).$$

Ce qui signifie que u_x *admet une derivée faible dans* L^2 *car*

$$(-b\varphi_x - d\psi_x + \beta\theta_x + \rho_0 u + g_1) \in L^2$$

et on a

$$u_{xx} = (u_x)_x = \frac{1}{\mu}(-b\varphi_x - d\psi_x + \beta\theta_x + \rho_0 u + g_1)$$

Par suite $u_x \in H_0^1(0,L)$, *donc* $u \in H^2(0,L)$.

De la même manière si on prend $(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\theta}) = (0,0,0,\widetilde{\theta})$, *on prouve que* $\theta \in H^2(0,L)$.
D'aprés (4.11)$_2$ *et* (4.11)$_3$ *on a*

$$bu_x + (k_1 + \tau_1 + \alpha_1)\varphi - \alpha\varphi_{xx} - b_1\psi_{xx} + (\alpha_3 + \tau_3)\psi - \gamma_1\theta = g_2,$$

$$(\alpha_3 + \tau_4)\varphi - b_1\varphi_{xx} + (\alpha_2 + k_2 + \tau_2)\psi - \gamma\psi_{xx} + du_x - \gamma_2\theta = g_3.$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -\alpha D^2 & -b_1 D^2 \\ -b_1 D^2 & -\gamma D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + \tau_1 + \alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 + \tau_4 & \alpha_2 + k_2 + \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 - bu_x + \gamma_1\theta \\ g_3 - du_x + \gamma_2\theta \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Où

$$\Delta \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 - bu_x + \gamma_1\theta \\ g_3 - du_x + \gamma_2\theta \end{pmatrix}$$

tel que $(g_2 - bu_x + \gamma_1\theta, g_3 - du_x + \gamma_2\theta)^T \in L^2 \times L^2$ *car* $u \in H^2(0,L)$ *où* $u_x \in H^1(0,L)$ *et* $\theta \in H^2$.

Alors il existe une solution $(\varphi, \psi)^T \in H^2(0,L) \times H^2(0,L)$ *satisfait l'équation (4.13)*

Donc, il existe $(u, v, \varphi, \phi, \psi, w, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ *qui vérifie* $(I - \mathcal{A})U = F$ *pour tout* $F \in \mathscr{H}$, *et* $\mathcal{A}$ *est maximal.*

Le théorème de Hill-Yosida assure l'existance et l'unicité d'une solution de (4.3), ceci termine la démonstration.

Lemma 4.2.1 *Soit $(u, \varphi, \psi, \theta)$ la solution du système (4.1) alors l'énergie $E(t)$ vérifie*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\tau_1 \int_0^L \varphi_t^2 - \tau_2 \int_0^L \psi_t^2 - k \int_0^L \theta_x^2 - (\tau_3 + \tau_4) \int_0^L \varphi_t \psi_t \leq 0$$

On multiplie $(4.1)_1$ par u_t et on intégre sur $]0, L[$, il vient

$$\rho_0 \int_0^L u_{tt} u_t = \mu \int_0^L u_{xx} u_t + b \int_0^L \varphi_x u_t + d \int_0^L \psi_x u_t - \beta \int_0^L \theta_x u_t,$$

ce qui implique que

$$\frac{\rho_0}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 = \mu [u_x u_t]_0^L - \frac{\mu}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L u_x + b \int_0^L \varphi_x u_t + d \int_0^L \psi_x u_t - \beta \int_0^L \theta_x u_t,$$

vu que $u = 0$ en 0 et L donc

$$\frac{\rho_0}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 = -\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L u_x + b \int_0^L \varphi_x u_t + d \int_0^L \psi_x u_t - \beta \int_0^L \theta_x u_t, \qquad (4.14)$$

Aussi en multipliant $(4.1)_2, (4.1)_3$ et $(4.1)_4$ par ψ_t ,φ_t et θ respectivement on obtient :

$$\tfrac{k_1}{2}\tfrac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 = -\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_x^2 - b_1 \int_0^L \varphi_{xt}\psi_x - b \int_0^L \psi_t u_x - \frac{\alpha_1}{2}\frac{d}{dt} \int_0^L \varphi^2 - \alpha_3 \int_0^L \psi\varphi_t + \gamma_1 \int_0^L \theta\varphi_t$$

$$-\tau_1 \int_0^L \varphi_t^2 - \tau_3 \int_0^L \psi_t \varphi_t, \qquad (4.15)$$

$$\frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t^2 = -\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x^2 - b_1\int_0^L \varphi_x\psi_{xt} - d\int_0^L \psi_t u_x - \frac{\alpha_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi^2 - \gamma_2\int_0^L \psi_t\theta - \gamma_3\int_0^L \varphi\psi_t$$

$$-\tau_4\int_0^L \varphi_t\psi_t - \tau_2\int_0^L \psi_t^2 \tag{4.16}$$

$$\frac{c}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \theta^2 = -k\int_0^L \theta_x^2 + \beta T_0\int_0^L u_t\theta_x - \gamma_1 T_0\int_0^L \varphi_t\theta - k_2 T_0\int_0^L \psi_t\theta, \tag{4.17}$$

En multipliant (4.14),(4.15) et (4.16) par T_0 et en additionant avec (4.17) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\Bigg\{\frac{1}{2}\int_0^L (\rho_0 T_0 u_t^2 + k_1 T_0\varphi_t^2 + k_2 T_0\psi_t^2 + c\theta^2 + \mu T_0 u_x^2 + \alpha T_0\varphi_x^2 + \alpha_1 T_0\varphi^2 + \gamma T_0\psi_x^2 + \alpha_2 T_0\psi^2$$
$$+2bT_0u_x\varphi + 2dT_0u_x\psi + 2\alpha_3 T_0\varphi\psi + 2b_1T_0\varphi_x\psi_x)dx\Bigg\} = -\tau_1\int_0^L \varphi_t^2 - \tau_2\int_0^L \psi_t^2 - k\int_0^L \theta_x^2$$
$$-(\tau_3+\tau_4)\int_0^L \varphi_t\psi_t.$$

D'où

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0,$$

alors le probème (4.1) est dissipatif

4.3 Stabilité exponentielle

Pour montrer la stabilité exponentielle, nous utilisons le théorme de à Gearhart-Pruss ,qui montre qu'un semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert est exponentiellement stable, si et seulement si

$$i\mathbb{R} = \{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{4.18}$$

et

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty \tag{4.19}$$

1) La preuve de (4.18) sera donnée en trois étapes :
Premièrement, on prouve que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Pour montrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, en prend $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7)^T \in \mathscr{H}$ et on cherche $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi, w, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$ ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$\begin{aligned} v &= f^1, & (4.20)\\ \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x &= \rho_0 f^2, & (4.21)\\ \phi &= f^3, & (4.22)\\ \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \tau_1\phi - \tau_3 w &= k_1 f^4, & (4.23)\\ w &= f^5, & (4.24)\\ b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} - du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta - \tau_4\phi - \tau_2 w &= k_2 f^6, & (4.25)\\ k\theta_{xx} - \beta T_0 v_x - \gamma_1 T_0\phi - \gamma_2 T_0 w &= cf^7. & (4.26) \end{aligned}$$

substituons (4.22) et (4.24) dans (4.23) , (4.25) et (4.26) on obtient

$$\begin{aligned} \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x &= \rho_0 f^2, & (4.27)\\ \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta &= k_1 f^4 + \tau_1 f^3 + \tau_3 f^5, & (4.28)\\ b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} + du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta &= k_2 f^6 + \tau_4 f^3 + \tau_2 f^5, & (4.29)\\ \theta_{xx} &= \frac{1}{k}(cf^7 + \beta T_0 f^1_x + \gamma_1 T_0 f^3 + \gamma_2 T_0 f^5) \in L^2(0,\pi). & (4.30) \end{aligned}$$

Alors, il existe $\theta \in H^2(0,\pi)$ tel que $\theta_{xx} = \frac{1}{K}(cf^7 + \beta T_0 f^1_x + \gamma_1 T_0 f^3 + \gamma_2 T_0 f^5) \in L^2(0,\pi)$.

Il reste á prouver qu'il existe u, φ et ψ satisfaisant

$$\begin{aligned} \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x &= \rho_0 f^2 + \beta\theta_x = g_1 \in L^2 & (4.31)\\ \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi &= k_1 f^4 + \tau_1 f^3 + \tau_3 f^5 - \gamma_1\theta = g_2 \in L^2 & (4.32)\\ b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} + du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi &= k_2 f^6 + \tau_4 f^3 + \tau_2 f^5 - \gamma_2\theta = g_3 \in L^2 & (4.33) \end{aligned}$$

On définit l'espace $W = H^1_0(0,\pi) \times H^1_0(0,\pi) \times H^1(0,\pi)$.

En multipliant les trois équations (4.31), (4.32) et (4.33) par des fonctions $\widetilde{u} \in C^1_0(0,\pi)$,
$\widetilde{\varphi} \in C^1_0(0,\pi)$, $\widetilde{\psi} \in C^1_0(0,\pi)$ respectivement et on intègre sur $(0,\pi)$ on obtien

$$\mu\int_0^L u_{xx}\widetilde{u}dx + b\int_0^L \varphi_x\widetilde{u}dx + d\int_0^L \psi_x\widetilde{u}dx = \int_0^L g_1\widetilde{u}dx,$$

$$\alpha\int_0^L \varphi_{xx}\widetilde{\varphi}dx + b_1\int_0^L \psi_{xx}\widetilde{\varphi}dx - b\int_0^L u_x\widetilde{\varphi}dx - \alpha_1\int_0^L \varphi\widetilde{\varphi}dx - \alpha_3\int_0^L \psi\widetilde{\varphi}dx = \int_0^L g_2\widetilde{\varphi}dx,$$

$$b_1\int_0^L \varphi_{xx}\widetilde{\psi}dx + \gamma\int_0^L \psi_{xx}\widetilde{\psi}dx + d\int_0^L u_x\widetilde{\psi}dx - \alpha_3\int_0^L \varphi\widetilde{\psi}dx - \alpha_2\int_0^L \psi\widetilde{\psi}dx = \int_0^L g_3\widetilde{\psi}dx,$$

Ce qui implique que

$$\mu[u_x\widetilde{u}]_0^L-\mu\int_0^L u_x\widetilde{u}_x dx+b[\varphi\widetilde{u}]_0^L-b\int_0^L\varphi\widetilde{u}_x dx+d[\psi\widetilde{u}]_0^L-d\int_0^L\psi\widetilde{u}_x dx=\int_0^L g_1\widetilde{u}dx,$$

$$\alpha[\varphi_x\widetilde{\varphi}_x]_0^L-\alpha\int_0^L\varphi_x\widetilde{\varphi}_x dx+b_1[\psi_x\tilde{\varphi}]_0^L-b_1\int_0^L\psi_x\widetilde{\varphi_x}dx-b\int_0^L u_x\widetilde{\varphi}dx-\alpha_1\int_0^L\varphi\widetilde{\varphi}dx-\alpha_3\int_0^L\psi\widetilde{\varphi}dx$$
$$=\int_0^L g_2\widetilde{\varphi}dx,$$

$$b_1[\varphi_x\widetilde{\psi}]_0^L-b_1\int_0^L\varphi_x\widetilde{\psi}_x dx+\gamma[\psi_x\widetilde{\psi}]_0^L-\gamma\int_0^L\psi_x\widetilde{\psi}_x dx-d\int_0^L u_x\widetilde{\psi}dx-\alpha_3\int_0^L\varphi\widetilde{\psi}dx-\alpha_2\int_0^L\psi\widetilde{\psi}dx$$
$$=\int_0^L g_3\widetilde{\psi}dx,$$

Donc

$$\begin{aligned}-\mu\int_0^L u_x\widetilde{u}_x dx-b\int_0^L\varphi\widetilde{u}_x dx-d\int_0^L\psi\widetilde{u}_x dx &= \int_0^L g_1\widetilde{u},\\ -\alpha\int_0^L\varphi_x\widetilde{\varphi}_x dx-b_1\int_0^L\psi_x\widetilde{\varphi}_x dx-b\int_0^L u_x\widetilde{\varphi}dx-\alpha_1\int_0^L\varphi\widetilde{\varphi}dx-\alpha_3\int_0^L\psi\widetilde{\varphi}dx &= \int_0^L g_2\widetilde{\varphi},\\ -b_1\int_0^L\varphi_x\widetilde{\psi}_x dx-\gamma\int_0^L\psi_x\widetilde{\psi}_x dx-d\int_0^L u_x\widetilde{\psi}dx-\alpha_3\int_0^L\varphi\widetilde{\psi}dx-\alpha_2\int_0^L\psi\widetilde{\psi}dx &= \int_0^L g_3\widetilde{\psi},\end{aligned} \tag{4.34}$$

Additionnons les équations de (4.34) on obtient

$$-\int_0^L(g_1\widetilde{u}+g_2\widetilde{\varphi}+g_3\widetilde{\psi})dx=\mu\int_0^L u_x\widetilde{u}_x dx+b\int_0^L\varphi\widetilde{u}_x dx+d\int_0^L\psi\widetilde{u}_x dx+\alpha\int_0^L\varphi_x\widetilde{\varphi}dx$$
$$+b_1\int_0^L\psi_x\widetilde{\varphi}_x dx+b\int_0^L u_x\widetilde{\varphi}dx+\alpha_1\int_0^L\varphi\widetilde{\varphi}dx+\alpha_3\int_0^L\psi\widetilde{\varphi}dx+b_1\int_0^L\varphi_x\widetilde{\psi}_x dx+\gamma\int_0^L\psi_x\widetilde{\psi}_x dx$$
$$+d\int_0^L u_x\widetilde{\psi}dx+\alpha_3\int_0^L\varphi\widetilde{\psi}dx+\alpha_2\int_0^L\psi\widetilde{\psi}dx$$

Pour $U=(u,\varphi,\psi)^T$ et $\widetilde{U}=(\widetilde{u},\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^T$ on définit sur W une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une forme linéaire $L(.)$ par

$$a(U,\widetilde{U})=\mu\int_0^L u_x\widetilde{u}_x dx+b\int_0^L\varphi\widetilde{u}_x dx+d\int_0^L\psi\widetilde{u}_x dx+\alpha\int_0^L\varphi_x\widetilde{\varphi}dx+b_1\int_0^L\psi_x\widetilde{\varphi}_x dx+b\int_0^L u_x\widetilde{\varphi}dx$$
$$+\alpha_1\int_0^L\varphi\widetilde{\varphi}dx+\alpha_3\int_0^L\psi\widetilde{\varphi}dx+b_1\int_0^L\varphi_x\widetilde{\psi}_x dx+\gamma\int_0^L\psi_x\widetilde{\psi}_x dx+d\int_0^L u_x\widetilde{\psi}dx+\alpha_3\int_0^L\varphi\widetilde{\psi}dx$$
$$+\alpha_2\int_0^L\psi\widetilde{\psi}dx$$

$$L(\widetilde{U}) = -\int_0^L (g_1\widetilde{u} + g_2\widetilde{\varphi} + g_3\widetilde{\psi})dx.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue coercive et $L(.)$ est continue.

Remark 4.3.1 *La continuité de $a(.,.)$ et $L(.)$ se font de la même manière que pour la cas de maximalité de $\mathcal{A}$.*

Coercivité de $a(.,.)$

$$a(U,U) = \mu\int_0^L u_x^2+2b\int_0^L \varphi u_x+2d\int_0^L \psi u_x+\alpha\int_0^L \varphi_x^2+2b_1\int_0^L \varphi_x\psi_x+\alpha_1\int_0^L \varphi^2+2\alpha_3\int_0^L \varphi\psi$$
$$+\gamma\int_0^L \psi_x^2 + \alpha_2\int_0^L \psi^2$$

Comme les deux matrices $A = \begin{pmatrix} \mu & b & d \\ b & \alpha_1 & \alpha_3 \\ d & \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & b_1 \\ b_1 & \gamma \end{pmatrix}$ sont définie positif, alors il existe un $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $A - \varepsilon I$ et $B - \varepsilon I$ sont définie positif.
et on a

$$\begin{aligned} a(U,U) = & \int_0^L \Bigg(\begin{pmatrix} u_x & \varphi & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu-\varepsilon & b & d \\ b & \alpha_1-\varepsilon & \alpha_3 \\ d & \alpha_3 & \alpha_2-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \varphi_x & \psi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-\varepsilon & b_1 \\ b_1 & \gamma-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \psi_x \end{pmatrix} + \varepsilon u_x^2 + \varepsilon\varphi^2 + \varepsilon\psi^2 + \varepsilon\varphi_x^2 + \varepsilon\psi_x^2 \Bigg) dx \\ \geq & \int_0^L \varepsilon(u_x^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2 + \varphi^2 + \psi^2)dx \\ \geq & C_4(\|u\|_{H_0^1} + \|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1}) \\ \geq & C_4\|U\|_W. \end{aligned}$$

Donc a est coercive.

$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W, et $L(.)$ est linéaire et continue sur W. D'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $U^* = (u,\varphi,\psi)^T \in W = H_0^1 \times H^1 \times H^1$ telle que

$$a(U^*,\widetilde{U}) = L(\widetilde{U}) \qquad \forall\widetilde{U} \in W.$$

Ce qui signifie que $u \in H_0^1(0,L), \varphi \in H^1(0,L), \psi \in H^1(0,L), v = f^1 \in H_0^1(0,L)$, $\phi = f^3 \in H^1, w = f^5 \in H^1(0,L)$ et $\theta \in H^2(0,L)$. il reste á montrer que u, φ et $\psi \in H^2(0,L)$.

On prend $(\widetilde{u}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = (\widetilde{u}, 0, 0) \in C_0^1 \times C_0^1 \times C_0^1 \subset W$ dans (4.34) elle devient

$$-\mu \int_0^L u_x \widetilde{u}_x - b \int_0^L \varphi \widetilde{u}_x - d \int_0^L \psi \widetilde{u}_x = \int_0^L g_1 \widetilde{u}$$

Où

$$-\mu \int_0^L u_x \widetilde{u}_x + b \int_0^L \varphi_x \widetilde{u} + d \int_0^L \psi_x \widetilde{u} = \int_0^L g_1 \widetilde{u}$$

Alors

$$\int_0^L u_x \widetilde{u}_x = -\int_0^L \frac{1}{\mu}(-b\varphi_x - d\psi_x + g_1)\widetilde{u} \qquad \forall\ \widetilde{u} \in C_0^1(0,L)$$

Ce qui signifie que u_x admet une derivée faible dans L^2 car

$$-b\varphi_x - d\psi_x + g_1 \in L^2(0,L),$$

et on a

$$u_{xx} = (u_x)_x = \frac{1}{\mu}(-b\varphi_x - d\psi_x + g_1).$$

Par suite $u_x \in H_0^1(0,L)$ donc $u \in H^2(0,L)$.

D'aprés (4.31) et (4.32) on a

$$\begin{aligned} \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi &= g_2, \\ b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} + du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi &= g_3. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{pmatrix} \alpha D^2 & b_1 D^2 \\ b_1 D^2 & \gamma D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha_3 \\ -\alpha_3 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 + bu_x \\ g_3 - du_x \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

Où

$$\Delta \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2 + bu_x \\ g_3 - du_x \end{pmatrix}$$

tel que $(g_2 + bu_x, g_3 - du_x)^T \in L^2 \times L^2$ car $u \in H^2(0,L)$ où $u_x \in H^1(0,L)$.

Alors il existe une solution $(\varphi, \psi)^T \in H^2(0,L) \times H^2(0,L)$ satisfait l'équation (4.35). Donc, il existe $(u, v, \varphi, \phi, \psi, w, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ qui vérifie $\mathcal{A}U = F$ pour tout $F \in \mathscr{H}$, et $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Les points (i) et (ii) de la démonstration du théorème se font de la même manière que dans la démonstration du problème (3.1).

iii) Supposons que $\{i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ n'est pas inclu dans $\rho(\mathcal{A})$, de (ii) ci-dessus, on conclut qu'il existe $\sigma \geq \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ tel que $\{i\lambda, |\lambda| < \sigma\} \subset \rho(\mathcal{A})$, mais $\sup\Big\{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \sigma\Big\} = \infty$. Dans ce cas, nous pouvons trouver une suite de nombres réels (λ_n) et une suite de vecteurs unitaires $(U_n) \subset D(\mathcal{A})$, telle que $|\lambda_n| < \sigma$, $\lambda_n \longrightarrow \sigma$ et

$$\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\| \longrightarrow 0. \tag{4.36}$$

C'est à dire

$$\begin{array}{rl} i\lambda_n u_n - v_n & \to 0 \text{ dans } H_0^1 \\ -\mu D^2 u_n + i\rho_0\lambda_n v_n - bD\varphi_n - dD\psi_n + \beta D\theta_n & \to 0 \text{ dans } L^2 \\ i\lambda_n\varphi_n - \phi_n & \to 0 \text{ dans } H^1 \\ bDu_n - \alpha D^2\varphi_n + \alpha_1\varphi_n + ik_1\lambda_n\phi_n + \tau_1\phi_n - b_1D^2\psi_n + \alpha_3\psi_n + \tau_3 w_n - \gamma_1\theta_n & \to 0 \text{ dans } L^2 \\ i\lambda_n\psi_n - w_n & \to 0 \text{ dans } H^1 \\ dDu_n - b_1D^2\varphi_n + \alpha_3\varphi_n + \tau_4\phi_n - \gamma D^2\psi_n + \alpha_2\psi_n + ik_2\lambda_n w_n + \tau_2 w_n - \gamma_2\theta_n & \to 0 \text{ dans } L^2 \\ \beta T_0 Dv_n + \gamma_1 T_0\phi_n + \gamma_2 T_0 w_n + i\lambda_n c\theta_n - kD^2\theta_n & \to 0 \text{ dans } L^2 \end{array} \tag{4.37}$$

Nous avons tout d'abord

$$Re\langle(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle \longrightarrow 0$$

avec

$$\begin{aligned} Re\langle(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle = \ & \tau_1\int_0^L \|\phi_n\|^2 + \tau_2\int_0^L \|w_n\|^2 + \frac{k}{T_0}\int_0^L \|D\theta_n\|^2 \\ & +(\tau_3+\tau_4)\int_0^L Re(\phi_n\overline{w_n}) \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \phi_n &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2, \\ w_n &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2, \\ D\theta_n &\longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2. \end{aligned}$$

de plus puisque $\|\theta_n\|_{H^1} \leq c\|D\theta_n\|_{L^2}$, d'aprés l'inégalité de Poincaré, on constate que $\theta_n \longrightarrow 0$.

D'aprés $(4.37)_3$ *et* $(4.37)_5$ $\varphi_n \longrightarrow 0$ et $\psi_n \longrightarrow 0$ dans L^2.

D'aprés $(4.37)_7$ *on obtient*

$kD^2\theta_n - \beta Dv_n \longrightarrow 0(4.38)$

Integrons (4.38) sur (0,x) on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^x (kD^2\theta_n - \beta Dv_n)dx = &\quad k(D\theta_n(x) - D\theta_n(0)) - \beta(v_n(x) - v_n(0)) \\ = &\quad kD\theta_n - \beta v_n \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Donc

$$v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2.$$

Alors d'aprés $(4.37)_1$,

$u_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2$.

On prend le produit scalaire de $(4.37)_2, (4.37)_4$ *et* $(4.37)_6$ *par* u_n, φ_n et ψ_n, respectivement on obtient,

$$\begin{gathered}\mu\|Du_n\|^2 + b\langle\varphi_n, Du_n\rangle + d\langle\psi_n, Du_n\rangle \longrightarrow 0 \\ \alpha\|D\varphi_n\|^2 + b_1\langle D\psi_n, D\varphi_n\rangle + b\langle Du_n, \varphi_n\rangle + \alpha_1\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle + \alpha_3\langle\psi_n, \varphi_n\rangle \longrightarrow 0 \\ \gamma\|D\psi_n\|^2 + d\langle Du_n, \psi_n\rangle + b_1\langle D\varphi_n, D\psi_n\rangle + \alpha_3\langle\varphi_n, \psi_n\rangle + \alpha_2\langle\psi_n, \psi_n\rangle \longrightarrow 0\end{gathered}$$

Par additions, on obtient

$$\begin{gathered}\mu\|Du_n\|^2 + \alpha\|D\varphi_n\| + \gamma\|D\psi_n\| + 2bRe\langle Du_n, \varphi_n\rangle + 2dRe\langle Du_n, \psi_n\rangle \\ +2b_1Re\langle D\varphi, D\psi\rangle \to 0\end{gathered}$$

Comme $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$, alors $\|Du_n\|_{L^2}$ est borné, donc

$$2bRe\langle Du_n, \varphi_n\rangle + 2dRe\langle Du_n, \psi_n\rangle \longrightarrow 0$$

D'autre part, en utilisant le fait que $B = \begin{pmatrix} \alpha & b_1 \\ b_1 & \gamma \end{pmatrix}$ est definie possitive, on obtient

$$\mu\|Du_n\|^2 + \|D\varphi_n\|^2 + \gamma\|D\psi\|^2 + 2b_1\langle D\varphi_n, D\psi_n\rangle$$

$$\geq \mu\|Du_n\|^2 + (\alpha - \varepsilon)\|D\varphi_n\|^2 + (\gamma - \varepsilon)\|D\psi_n\|^2 \longrightarrow 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, Ainsi

$$Du_n, D\varphi_n, D\psi_n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2.$$

Finalement

$$\|U_n\|^2_{\mathscr{H}} = \|Du_n\|^2 + \|v_n\|^2 + \|D\varphi_n\|^2 + \|\phi_n\|^2 + \|D\psi_n\|^2 + \|w_n\|^2 + \|\theta_n\|^2 \to 0$$

Ce qui contredit le fait que $\|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$.

2) Preuve de (4.19)
Supposons que $\overline{\lim}_{|\lambda|\longrightarrow\infty}\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$ n'est pas vrai, alors il existe une suite $(\lambda_n) \subset \rho(\mathcal{A})$, $|\lambda_n| \to \infty$ et une suite de vecteurs unitaires (U_n) dans $D(\mathcal{A})$. Telque

$$\lim_{n\to\infty} \|(i\lambda_n - \mathcal{A})^{-1}\| = \infty.$$

Comme

$$Re\langle(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n\rangle \longrightarrow 0$$

par conséquent $\phi_n \to 0, w_n \to 0$ et $D\theta_n \to 0$ dans L^2, alors d'aprés l'inégalité de Poincaré $\theta_n \to 0$ dans L^2.
Substituant dans $(4.37)_3$ *et* $(4.37)_5$ *on obtient*

$$i\lambda_n\varphi_n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2$$

et

$$i\lambda_n\psi_n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2$$

De même $\varphi_n \to 0$ et $\psi_n \to 0$ dans L^2 car

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n}{i\lambda_n} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{i\lambda_n} = 0$$

On divise $(4.37)_7$ $par\lambda_n$ on obtient

$$\lambda_n^{-1}(kD^2\theta_n - \beta T_0 Dv_n) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2 \tag{4.39}$$

D'aprés $(4.37)_1$ *on obtient*
$i\lambda_n Du_n - Dv_n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2.$
On divisons par λ_n et on prenant en compte (4.39), on obtient

$$i\beta T_0 Du_n - \frac{k}{\lambda_n} D^2\theta_n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2.$$

Comme $\|Du_n\|$ est borné, on conclut que $\|\lambda_n^{-1} D^2\theta_n\|$ est borné.

Ainsi,

$$\langle i\beta T_0 Du_n - \frac{k}{\lambda_n} D^2\theta_n, Du_n\rangle = i\beta T_0\|Du_n\|^2 - \langle \frac{k}{\lambda_n} D^2\theta_n, Du_n\rangle \to 0$$

Intégration par partie, nous arrivons à

$$i\beta T_0\|Du_n\|^2 + \langle \frac{k}{\lambda_n} D\theta_n, D^2u_n\rangle \to 0 \tag{4.40}$$

On divise $(4.37)_2$ *par* λ_n est en utilisant le fait que $v_n, D\varphi_n$ et $D\psi_n$ sont bornés, on conclut que

$\|\lambda_n^{-1} D^2u_n\|$ est borné

$$\begin{aligned}
\langle k\lambda_n^{-1} D\theta_n, D^2u_n\rangle = & \; k\int_0^L \lambda_n^{-1} D\theta_n \overline{D^2u_n} dx \\
\leq & \; k\|D\theta_n\|\|\lambda_n^{-1} D^2u_n\| \\
\leq & \; k\|D\theta_n\|\|\lambda_n^{-1} D^2u_n\| \to 0.
\end{aligned}$$

Donc, (4.38) implique que $\|Du_n\| \to 0$ dans L^2,

Alors d'aprés $(4.37)_1$, $\overline{\lambda_n^{-1}} Dv_n \to 0$ dans L^2. On divisons $(4.37)_2$ *par* $\lambda_n \quad \rho_0$, ainsi on prend le produit scalaire par v_n on obtient

$$i\|v_n\|^2 + \rho_0^{-1}\mu\langle Du_n, \overline{\lambda_n^{-1}} Dv_n\rangle - \rho_0 b\langle D\varphi_n, \overline{\lambda_n^{-1}} v_n\rangle - \rho_0^{-1}\langle D\psi_n, \overline{\lambda_n^{-1}} v_n\rangle \to 0$$

Donc

$$v_n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2.$$

On prend le produit scalaire de $(4.37)_4$ *et* $(4.37)_6$ *par* φ_n et ψ_n respectivement on obtient

$$ik_1\langle \lambda_n\phi_n, \varphi_n\rangle + \alpha\|D\varphi_n\|^2 + b_1\langle D\psi_n, D\varphi_n\rangle \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2$$

$$ik_1\langle\lambda_n w_n,\psi_n\rangle + b_1\langle D\varphi_n, D\psi_n\rangle + \gamma\|D\psi_n\|^2 \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2$$

Prenant en compte $(4.37)_3$ *et* $(4.37)_5$ *on obtient*

$$-k_1\langle\phi_n,\phi_n\rangle + \alpha\langle D\varphi_n, D\varphi_n\rangle + b_1\langle D\psi_n, D\varphi_n\rangle \to 0(4.41)$$

$$-k_2\langle w_n, w_n\rangle + b_1\langle D\varphi_n, D\psi_n\rangle + \gamma\langle D\psi_n, D\psi_n\rangle \to 0 \tag{4.42}$$

puisque $\phi_n, w_n \to 0$ dans L^2, (4.41) et utilisant (4.42) obtient

$$\alpha\langle D\varphi_n, D\varphi_n\rangle + b_1\langle D\psi_n, D\varphi_n\rangle \to 0, \quad \text{dans} \quad L^2$$

$$b_1\langle D\varphi_n, D\psi_n\rangle + \gamma\langle D\psi_n, D\psi_n\rangle \to 0, \quad \text{dans} \quad L^2$$

Comme B est definie positif, alors

$$\|D\varphi_n\|, \|D\psi_n\| \to 0.$$

En combinant tous les résultats ci-dessus, nous concluons que $U_n \to 0$ dans $\mathscr{H}$ qui est en contradiction avec $|U_n\|_{\mathscr{H}} = 1$.

Donc les conditions du théorème de Gearhart-Pruss sont satisfaites et la solution du système (4.1) est exponentiellement stable, c'est-à-dire

$$E(t) \leq \eta e^{-wt} \qquad \forall t \geq 0,$$

pour η, w des constantes positives.

Bibliographie

[1] A. Guesmia and S.A. Messaoudi, *On the control of solutions of a viscoelastic equation*, Applied Math and Computations Vol. 206 # 2 (2008), 589-597.

[2] A. Guesmia, S. A. Messaoudi, A. Wahbe, Uniform decay in mildly damped Timoshenko system with non-equal wave speed propagation, Dynamic Systems and Applications, **21** (2012), 133-146.

[3] A. Guesmia, S. A. Messaoudi, General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping, Math. Methods Appl. Sci. **32** (2009), 2102âĂŞ2122.

[4] A. Magaña and R. Quintanilla, On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials, Internat. J. Solids Struct. **43** (2006), 3414-3427.

[5] A. Magaña and R. Quintanilla, On the time decay of solutions in porous-elasticity with quasi-static microvoids, J. Math. Anal. Appl. **331** # **1** (2007), 617-630.

[6] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Sepringer-Verlag New York, 1983*

[7] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces, Elservier Science PUBLISHERS B.V.1988.*

[8] Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson, *Linear Functional Analysis, Springer-Verlage London Limited 2008.*

[9] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, *Exponential stability for the thimoshenko system with two weak dampings, Elsevier Ltd. All rights reserved, 2005.*

[10] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.*

[11] Ioan I.Vrabie, C_0*-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.*

[12] J.E. Muñoz-Rivera, Energy decay rate in linear thermoelasticity, Funkcial Ekvac. **35** (1992), 19-30.

[13] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995.*

[14] M. C. Leseduarte, A. Magaña, R. Quintanilla, On the time decay of solutions in porous-thermo-ealsticity of type II, Disc. Cont. Dyn. Systems, B 13 (2012) 375-391.

[15] Pamplona, J.E. Muñoz Revira and R. Quintanilla, On the decay of solutions for porous-elastic system with history, J. Math. Anal. Appl. **319** (2011), 682-705.

[16] P.S. Casas and R. Quintanilla, Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures, Internat. J. Eng. Sci. **43** (2005), 33-47.

[17] P.S. Casas, R. Quintanilla, Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity, Mach. Research Commun. **32** (2005), 652-658.

[18] P.X. Pamplona, J.E. Muñoz Rivera and R. Quintanilla, Stabilization in elastic solids with voids, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 37-49.

[19] R. Quintanilla, Convergence and structural stability in thermoelasticity, AppMath. and Comp., **153** (2003), 287-300.

[20] R. Quintanilla, Instability and non-existence in the nonlinear theory of thermoelasticity without energy dissipation, Continuum Mech. Thermodyn., **13** (2001), 121-129.

[21] R. Quintanilla, On existence in thermoelasticity without energy dissipation, J. Thermal Stresses, **25** (2002), 195-202.

[22] R. Quintanilla, Structural stability and continous dependence of solutions in thermoelasticity of type III, Discrete and Continous Dynamical Systems B, **1** (2001), 463-470.

[23] R. Quintanilla, Slow decay in one-dimensional porous dissipation elasticity, Applied Math. Letters **16** (2003), 487-491.

[24] R. Quintanilla, Thermoelasticity with out energy dissipation of materials with microstructure, App. Math. Modelling, 26 (2002), 1125-1137.

[25] S.A. Messaoudi and A. Fareh, General decay for a porous thermoelastic system with memory : The case of equal speeds, Nonlinear analysis : TMA **74** (2011), 6895-6906.

[26] S.A. Messaoudi and A. Fareh, General decay for a porous thermoelastic system with memory : The case of nonequal speeds, Acta Mathimatica Scientia, **33** (2013), 23-40.

[27] S.A. Messaoudi and A. Fareh, Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with different wave-propagation speeds, Arab. J. of Math. **1** (2013).

[28] S.A. Messaoudi and M.I. Mustafa, A stability result in a memory-type Timoshenko system. Dynamic Systems and Applications **18** (2009), 457-468.

[29] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, *Energy decay in Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III*, J. Math. Anal. Appl. **384** (2008) 298-307.

[30] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III, Adv. Diff. Equa. **14** (2009), 375-400.

[31] S.A. Messaoudi and B. Said-Houari, Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history, J. Math. Anal. Appl. **360** (2009), 459-475.

[32] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems, Chapman* & *Hall, 1999.*