

Investigation dans l'analyse vibratoire des structures en membrane par la méthode des éléments finis

BOUSBIA SALAH Seif Eddine*

*1 Département de Génie Mécanique, U. d'El-Oued, p. seif79bousbia@gmail.com

Résumé—Dans ce travail une investigation dans l'analyse vibratoire des structures en membrane par la méthode des éléments finis est faite. Les éléments Q4 (élément rectangulaire à Quatre nœuds), Q8 (élément rectangulaire à huit nœuds) et E-P (Élément Poutre) utilisés dans cette étude sont basés sur l'approche de déplacement. Nous avons pu utiliser l'élément T6 (élément Triangulaire à 6 nœuds) pour cette analyse vibratoire. Nous avons testé la performance de l'élément T6 dans les problèmes vibratoires forcés et libres des structures et faire la comparaison avec les éléments Q4, Q8 et E Poutre. Ensuite tous les résultats obtenus à l'aide de ces éléments sont comparés aux solutions exactes (solution analytique).

Mots Clés—analyse vibratoire, structures en membrane, éléments finis.

I. INTRODUCTION

Pour évaluer les caractéristiques vibratoires dans la conception des produits, des pièces mécaniques et des structures, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement dynamique de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique.

En effet l'utilisation des éléments finis a champs de déplacement pour l'analyse statique, non linéaires et vibratoire connaît une certaine extension fantastique qui va de pair avec l'évolution de l'industrie. Dans le contexte d'avoir de bons résultats dans l'analyse structurale, l'ingénieur a besoin de plus en plus aux outils numériques de simulation par éléments finis à la place de outils de prototypage ou expérimentale qui sont très coûteux. Dans ce travail une investigation dans le comportement dynamique des éléments à champs de déplacement Q4 (élément rectangulaire à Quatre nœuds), Q8 (élément rectangulaire à huit nœuds), EP (Élément Poutre) et l'élément à champs de déplacement T6 (élément Triangulaire à 6 nœuds) dans l'analyse vibratoire libre et forcée est décrite.

II. FORMULATION DE QUELQUES ÉLÉMENTS BASÉS SUR LE CHAMP DE DÉPLACEMENT

Ce titre est une synthèse bibliographique des références [1], [2], [3], [4], [5].

A. Principes de la MEF

- La MEF est basée sur une idée simple: subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds.
- Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, (c-a-d Pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ reliant les degrés de libertés (déplacements) nodaux $\{U_e\}$ et les forces, $\{F_e\}$ appliquées aux nœuds : $[K_e] \{U_e\} = \{F_e\}$)
- puis nous assemblons ces éléments. (Assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global $[K] \{U\} = \{F\}$)
- La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

B. Formulation de la Matrice de Rigidité d'Élément Fini

Pour déterminé la matrice de rigidité $[K_e]$ des éléments à champs de déplacement en doit calculer l'intégrale suivant:

$$[K^e] = \int_v [B]^T [D] [B] d(vol) \quad (1)$$

$[B]$: matrice de déformation reliant les déplacements nodaux aux déformations nodales de l'élément.

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\} \quad (2)$$

$[D]$: matrice d'élasticité reliant les déformations aux contraintes, qui dépend du matériau considéré.

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad (3)$$

C. Présentation de quelques éléments basés sur le champ de déplacement

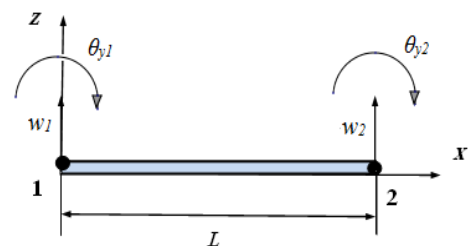


Fig. 1. Déplacements transversaux et de rotation à chaque extrémité de l'élément de poutre EP.

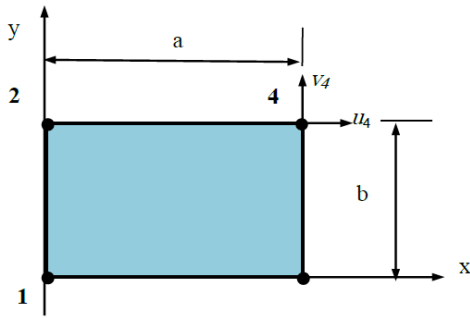


Fig. 2. : Elément quadrilatère bilinéaire Q4

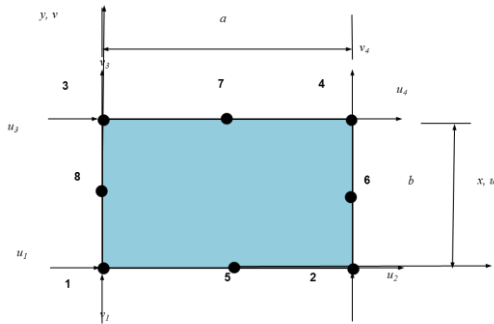


Fig. 3. Elément quadratique quadrilatéral Q8

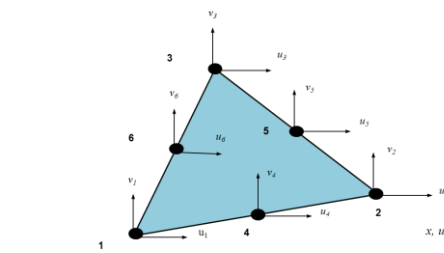


Fig. 4. (élément Triangulaire à 6 noeuds)T6

III. VALIDATION NUMÉRIQUE DES ÉLÉMENTS À CHAMPS DE DÉPLACEMENT EN ANALYSE VIBRATOIRE

Ce titre est une synthèse bibliographique des références [6], [7], [8], [9].

La détermination des modes propres de vibration d'une structure par la technique des éléments finis conduit à une relation du type suivant:

$$[K][X_i] = \lambda_i [M] \{X_i\} \quad (4)$$

$[K]$: La rigidité du système,

$[M]$: La matrice des masses,

$\{X_i\}$: Le vecteur des déplacements de la structure définissant l'i-ème mode propre de vibration, l'amplitude de déplacement, Le carré de la pulsation correspondante ou la fréquence angulaire.

Résoudre un problème de valeurs propres consiste à trouver des couples $\lambda_i \{X_i\}$ qui satisfont la relation précédent. A chaque valeur λ_i correspond un vecteur propre $\{X_i\}$.

Pour un solide élastique en vibration libre l'équation est:

$$([K] - \omega^2) \cdot \{X\} = 0 \quad (5)$$

dans une forme standard.

Nominalement ces tests représentent un problème d'un solide rectangulaire élastique en porte à faux (Poutre cantilever), la longueur dans la direction x est 4.0 et suivant y est de 1.0 avec une section transversale de 1.0.

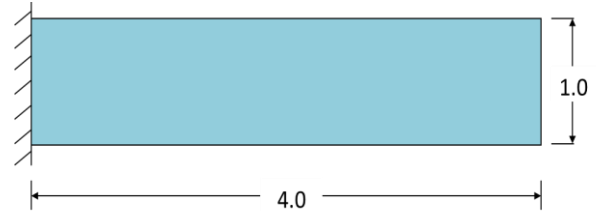


Fig. 5. Géométrie et maillage de la poutre.

IV. 1^{ERE} TESTS DE VALIDATION : VALEURS PROPRES EN VIBRATION LIBRE D'UN SOLIDE RECTANGULAIRE

Notre poutre avec une rigidité à la flexion de 1/12 soit 0.08333. Le coefficient de poisson est $\nu=0.3$ pour le maillage (3x1), et $\nu=0$ pour le maillage (5x1), et le module de Young est pris $E=1 \text{ kN/m}^2$. Le problème est en déformation plane avec masse concentrée. La masse par unité de surface est $\rho=1$.

TABLEAU I. VALEURS PROPRES DE LA POUTRE CANTILEVER CAS DE DÉFORMATION PLANE

Fréquences		Q4	Q8	Poutre	T6
Maillage	ω_1	0.0805	0.064	0.063	0.064
	ω_2	0.353	0.413	0.397	0.414
Maillage	ω_1	0.068	0.060	0.060	0.060
	ω_2	0.391	0.391	0.0393	0.392
Solution exacte [9] Smith	ω_1	$1.875^4 \times EI / \rho AL^4$		0.063	
	ω_2	$\pi / 2L \sqrt{E / \rho}$		0.393	

- les résultats des valeurs propres sont illustrés dans le tableau 1 suivant pour le cas de déformation plane. La fréquence fondamentale ω_1 et la fréquence axiale ω_2 sont calculées avec les différents éléments Q4, Q8, poutre et T6.
- les résultats obtenus : par l'élément T6 montrent que les valeurs des fréquences sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q8 et avec celles de la solution analytique. La fréquence fondamentale obtenue par l'élément Q4 est considérablement plus grande que celle de la solution analytique.

V. 2^{EME} TESTS DE VALIDATION : VIBRATION FORCEE D'UN SOLIDE RECTANGULAIRE

Pour valider l'emploi de l'élément T6 (triangulaire à 6 nœuds) en vibration forcée on a proposé deux tests qui ont été traités dans la référence [9] Smith 2004.

La poutre Cantilever est soumise à une force verticale harmonique $\cos \omega t$. Le taux d'amortissement γ est de 0,005 soit 5 % appliqué à tous les modes du système, le module de Young est $E=1 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu=0.3$, fréquence forcée $\omega=0.3$ et la masse par unité de surface est $\rho=1 \text{ t/m}^3$. Ici le pas de temps est pris égal à $1/20$ de la période ($2\pi/\omega$) soit disant 1.047. Le problème est en déformation plane.

Les résultats illustrés dans le tableau 2 montrent les déplacements à l'extrémité de la poutre par rapport au pas de temps imposé (time-step) par l'utilisation des deux éléments Q8 et T6.

TABLEAU II. VIBRATION FORCÉE D'UN SOLIDE RECTANGULAIRE AVEC MASSE LOCALISÉE " DÉPLACEMENT PAR RAPPORT AU TEMPS ET FORCES "

Temps	Force	Déplacements	
		Q8	T6
0	1	0	0
1.047	0.9511	27.32	27.32
2.094	0.8090	36.36	36.37
3.142	0.5878	41.84	41.85
4.189	0.3090	43.22	43.23
5.236	$-0.5390 \cdot 10^{-14}$	40.37	40.39
6.283	-0.3090	33.57	33.59
7.330	-0.5878	23.48	23.50
8.378	-0.8090	11.10	11.11
9.425	-0.9511	-2.373	-2.362
10.47	-1.000	-15.45	-15.61
11.52	-0.9511	-27.32	-27.32
12.57	-0.8090	-36.36	-36.37
13.61	-0.5878	-41.84	-41.85
14.66	-0.3090	-43.22	-43.23
15.71	$0.5390 \cdot 10^{-14}$	-40.37	-40.39
16.76	0.3090	-33.57	-33.59
17.80	0.5878	-23.48	-23.50
18.85	0.8090	-11.10	-11.11
19.90	0.9511	2.373	2.373
20.94	1.000	15.45	15.61

Les résultats des déplacements sont illustrés dans le tableau 2 et les figures suivante. Ces résultats montrent bien que le comportement de l'élément T6 est similaire à l'élément Q8.

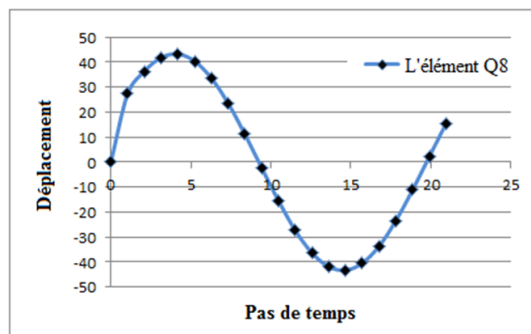


Fig. 6. : Vibration forcée d'un solide rectangulaire " déplacement par rapport au temps pour l'élément Q8" Test 2

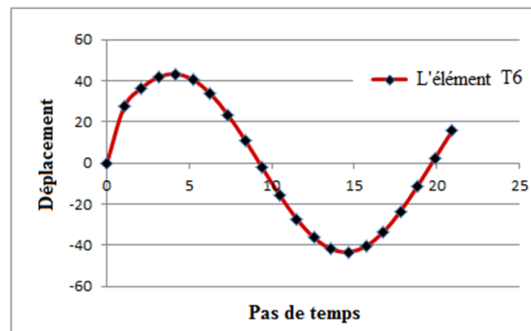


Fig. 7. : Vibration forcée d'un solide rectangulaire "déplacement par rapport au temps pour l'élément T6" Test 2

Les résultats illustrés dans le tableau II montrent les déplacements à l'extrémité de la poutre par rapport au pas de temps imposé (time-step) et la force perturbatrice $\cos \omega t$ par l'utilisation des deux éléments Q8 et T6. Nous pouvons voir clairement que le comportement de l'élément T6 est strictement similaire à celui de l'élément Q8 en analyse vibratoire forcée.

VI. CONCLUSION

Dans ce travail une investigation dans l'analyse vibratoire des structures en membrane par la méthode des éléments finis est faite. Les éléments Q4, Q8 et E-Poutre utilisés dans cette étude sont basés sur l'approche de déplacement. Nous avons pu utiliser l'élément T6 pour cette analyse vibratoire.

Nous avons testé la performance de l'élément T6 dans les problèmes vibratoires forcés et libres des structures et faire la comparaison avec les éléments Q4, Q8 et E Poutre. Ensuite tous les résultats obtenus à l'aide de ces éléments sont comparés aux solutions exactes (solution analytique)

L'étude montre que :

- Le comportement des éléments à champs de déplacement Q8 et Poutre sont similaire à l'élément à champs de déplacement T6 en analyse vibratoire forcée et libre.
- Le comportement de l'élément Q4 s'avère un peu mauvais comparativement avec les éléments

Q8 et T6 suivant le calcul de la pulsation ω_2 en vibration libre.

- L'élément Poutre Donne de meilleur résultat.
- En vibration forcée l'élément Q4 est une mauvaise représentation des solides rectangulaires.

REFERENCES

- [1] Turner, M. R. Clough, H. Martin, et L. Topp. , « Stiffness and deflection analysis of complex Structure », J. Aearo. sci., 23 N°. 9 SEPT (1956)
- [2] Argyris, J. et S. Kelsey. , « *Energy Theorems and structural analysis* » Butterwoth Scientific publication London, (1960).
- [3] L.Rockey et W.Griffiths et R.Evans et D.Nethercot. « *Introduction à la méthode des éléments finis* » Editions EYROLLES .61, bd Saint-Germain, 75005 PARIS (1979)
- [4] O.Rahmani, S.Kebdani. « *Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs* » l'Université d'Oran. Office des publications universitaires, 06 -88.
- [5] Antoine Legay. « *Calcul des structures par éléments finis* » CNAM-Paris, Édition (2012)
- [6] Smith I.M, Griffith D.V. « *Programming the Finite Element Method* », Chapter 2, second Edition. John Wiley & Sons, UK, (1988).
- [7] JL Batoz, G Dhatt. « *Modélisation des structures par éléments finis, Poutre et Plaque* » volume 2, Les Presses de l'Université LAVAL Sainte-Foy, Québec. (1990).
- [8] G.Dhatt, G.Touzot.« *Une présentation de la méthode des éléments finis* » ,deuxième édition, PARIS (1984).
- [9] Smith I.M, Griffith D.V. « *Programming the Finite Element Method* », chapitre 9, , John Wiley & Sons, UK, (2004).