

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE DE CHAHID HAMMA LAKHDAR  
D' EL OUED  
FACULTE DES LA SCIENCES EXACTES  
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de  
**MASTER ACADEMIQUE**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques fondamentales et appliquées

## Thème

**Etude d'un problème de contact  
quasistatique avec réponse normale  
instantanée**

Présenté par :



Messaouda Nesba  
Chaima Abbassi

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Dr. Hadj Ammar Tedjani	PR	Univ.El-Oued	Président
Dr. Azeb Ahmed Abdelaziz	MCA	Univ.El-Oued	Encadreur
Dr. Douib Bachir	MCB	Univ.El-Oued	Examineur

Promotion : 2022/2023

# Remerciment

En préambule à ce mémoire, je remercie Dieu qui nous aide et nous accorde la patience Et du courage pendant ces années d'étude de la langue. Nous tenons à remercier le **Dr Azeb Ahmed Abdelaziz** , en tant que directeur de thèse il s'est toujours montré à l'écoute et très disponible lors de la réalisation de cette thèse, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a eu la gentillesse de nous consacrer et sans cette lettre il ne verra pas la lumière du jour. Nous adressons également nos sincères remerciements aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils lui portent, nous avons demandé leur consentement pour examiner notre travail et l'enrichir de leurs suggestions. Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, nous remercions sincèrement tous nos parents et amis qui ont il est toujours encouragé tout en réalisant ce message. Grâce à qui nous avons oublié

# Dédicace

Je dédie cet humble travail à : Mes chers parents , la bougie qui ne s'éteint jamais et qui ne cesse de me guider et Soutien, symbole d'amour et de bienveillance par excellence, qui m'a appris à ne pas abandonner Face à des difficultés qui m'ont encouragé et aidé à atteindre mes objectifs dans la vie Ce travail est le résultat des sacrifices qu'ils ont faits pour moi. A mon mari, qui a été à mes côtés tout au long de la réalisation de ce travail, et à mon fils, Youssef, mon amour et ma joie. A la famille de mon mari a mes soeurs et frères, chacun avec son nom : Salwa.Suhaila.Fateh.Ayoub.Najwa.Dia. qui font des efforts pour m'aider en particulier moralement tout au long de mes études et aussi en réalisant ce travail. pour Ceux qui ont été avec nous dans les moments difficiles .Tous ceux qui m'ont aidé et encouragé de près ou de loin.

CHaima

# Dédicace

Je dédie cet humble travail à : mes chers parents , la bougie qui ne s'éteint jamais et qui ne cesse de me guider et Soutien, symbole d'amour et de bienveillance par excellence, qui m'a appris à ne pas abandonner. Face à des difficultés qui m'ont encouragé et aidé à atteindre mes objectifs dans la vie. Ce travail est le résultat des sacrifices qu'ils ont faits pour moi.

A mon mari, qui a été à mes côtés tout au long de la réalisation de ce travail. pour ceux qui ont été avec nous dans les moments difficiles tous ceux qui m'ont aidé et encouragé de près ou de loin.

Messaouda

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>I Modélisation</b>	<b>7</b>
I.1 Cadre physique . . . . .	7
I.2 Modèle mathématique . . . . .	9
I.3 Lois de comportement . . . . .	10
I.3.1 Lois de comportement viscoélastique . . . . .	10
I.3.2 Lois de comportement viscoélastique avec mémoire longue . . . . .	11
I.4 Conditions aux limites . . . . .	11
I.4.1 Condition aux limites de déplacement . . . . .	11
I.4.2 Condition aux limites de traction . . . . .	11
I.4.3 Condition aux limites de contact bilatérale . . . . .	12
I.4.4 Condition de contact avec compliance normale . . . . .	12
I.5 Contact avec frottement . . . . .	13
I.5.1 Contact bilatéral avec frottement de Tresca . . . . .	13
I.5.2 Loi de frottement de type Coulomb . . . . .	14
I.5.3 Contact de réponce normale instantanée avec frottement . . . . .	14
<b>II Analyse fonctionnelle</b>	<b>16</b>
II.1 Espaces fonctionnels . . . . .	16
II.1.1 Espace $C^m(\overline{\Omega})$ . . . . .	16
II.1.2 Espaces $L^p$ . . . . .	17

---

II.1.3	Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	17
II.1.4	Espaces fonctionnels en mécanique . . . . .	19
II.2	Théorème du point fixe . . . . .	21
II.3	Compléments divers . . . . .	21
II.4	Lemme de Grönwall. . . . .	22
<b>III</b>	<b>Etude d'un problème de contact quasistatique avec réponse normale ins-</b>	
	<b>tantanée et frottement</b>	<b>23</b>
III.1	Problème mécanique et hypothèses . . . . .	24
III.2	Formulation variationnelle . . . . .	26
III.3	Resultat d'existence et d'unicité . . . . .	27
III.4	Resultat de convergence de la solution . . . . .	32
	<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

# Notations

## Les ensembles

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels .
$\mathbb{R}^d(d = 2, 3)$	l'espace euclidien de dimension $d$ .
$\mathbb{S}^d(d = 2, 3)$	l'espace de second ordre sur les tenseurs symétriques on $\mathbb{R}^d$
$\Omega$	est un domaine de $\mathbb{R}^d(d = 2, 3)$ .
$\bar{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière.
$\Gamma_i(i = 1, 2, 3)$	une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ .
$[0, T]$	l'intervalle de tempe $T > 0$ .

## Espaces fonctionnels

$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\overline{\Omega}$ .
$C_c^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans $\Omega$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans $\Omega$ .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur $\Omega$ .
$H$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ .
$H_1$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$H_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ .
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma = \mathcal{H}/div\sigma = (\partial_j\sigma_{ij}) \in H\}$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma(\Omega)$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $H$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on utilise les notations suivantes.

$H^{\overline{d}}$	l'espace $\{x = (x_i)/x_i \in H, i = \overline{1, \overline{N}}\}$ .
$H^{d \times d}$	l'espace $\{x = (x_{ij})/x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, \overline{N}}\}$ .
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de $H$
$\ \cdot\ _H$	la norme de $H$ .
$H'$	l'espace dual de $H$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit dual entre $H'$ et $H$ .
$(H)^{H' \times H}$	l'espace des applications linéaires et continues de $H$ dans $H$ .

Si de plus  $[0, T]$  un intervalle de temps,  $K \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par.

$C([0, T]; H)$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $H$ .

$C^1([0, T]; H)$  l'espace des fonctions continument dérivables de  $[0, T]$  dans  $H$ .

## D'autres symboles

$\nu$  la normale unitaire soetante à  $\Gamma$

$v_\nu, v_\tau$  les composante normale et tangentielle du champ vectoriel  $v$  défini sur  $\Gamma$ .

# Introduction générale

Le contact avec frottement entre les corps déformables peut être que l'on retrouve fréquemment dans l'industrie et la vie quotidienne. En raison de l'importance dans le formage des métaux et l'industrie automobile, des efforts considérables ont été faits avec la modélisation et simulations numériques de problèmes de contact, et littérature d'ingénierie concernant ce sujet est assez vaste. Une première tentative d'étude des problèmes de contact pour les matériaux élastiques linéaire et viscoélastique dans le cadre des inégalités variationnelles a été faite dans [5]. Une excellente référence au sujet des problèmes de contact avec ou sans frottement est [7]. L'état de l'art mathématique, mécanique et numérique est dans les actes [10]. L'approximation quasistatique des problèmes de contact est obtenue lorsque les forces appliqués dans le système variant lentement avec le temps et donc les termes d'inertie dans l'équation du mouvement peut être négligée. L'étude des problèmes de contact quasistatique a récemment suscité un intérêt considérable (voir, par exemple, [1],[2],[4],[8],[11] et références qu'il contient).

Problèmes de contact quasistatique pour les matériaux viscoélastiques avec un état général de la réponse normale instantanée avec frottement ont été étudiés récemment dans [14]. Là, le frottement a été modélisé avec une version de la loi de Coulomb et par conséquent, le modèle a été défini comme une famille d'inégalités variationnelles pour le champ de vitesse, paramétré avec le temps. L'existence d'une seule solution faible du modèle a été prouvée à l'aide de résultats des égalités variationnelles elliptiques et arguments de point fixe.

Ce mémoire se compose de trois chapitres : Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique et le modèle mathématique associé, les lois de comportement des matériaux viscoélastiques, les conditions aux limites et les lois de contact avec frottement .

Dans le deuxième chapitre, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence, les espaces des fonctions à valeurs vectorielles les équations, les éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert. Nous rappelons le théorème du point fixe qui sera d'une grande utilité pour la démonstration et le Lemme de Gronwall. Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un problème mécanique. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique, et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant des techniques des équations variationnelles elliptiques et du point fixe. Ce chapitre achève par un résultat de convergence.

# Chapitre I

## Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus ou nous allons introduire le cadre physique utilisé dans ce mémoire, il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement viscoélastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec frottement.

### I.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique dans ce mémoire et le modèle mathématique associé à l'étude du problème de contact avec frottement entre un corps viscoélastique et une fondation.

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$  avec une surface frontière régulière  $\partial\Omega = \Gamma$ , partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , telles que  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Nous notons par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0$ . Nous supposons que  $f_2$  varie très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasistatique. Soit  $T > 0$  et soit  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement avec un obstacle sur la partie  $\Gamma_3$ . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous notons par  $\mathbb{S}^d (d = 2, 3)$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), "." et  $\|\cdot\|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$  tels que :

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v \cdot v)^{1/2} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq i, j \leq d, \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij} & \|\tau\| &= (\tau \cdot \tau)^{1/2} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, \quad 1 \leq i, j \leq d. \end{aligned}$$

Nous désignons par  $u_\nu$  et  $u_\tau$  les composantes normale et tangentielle d'un vecteur  $u$  à la frontière tels que

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \tag{I.1}$$

Nous notons par  $\sigma = \sigma(x, t)$  le champ des contraintes, par  $u = u(x, t)$  le champ des déplacements et par  $\varepsilon(u)$  et le champ des déformations infinitésimales tels que  $x \in \bar{\Omega}$  et pour tous  $t \in [0, T]$ .

Pour le champ des contraintes  $\sigma$  nous notons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma \nu$

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu. \tag{I.2}$$

Les relations (I.1) et (I.2) nous permettent d'écrire la relation suivante

$$(\sigma \nu) \cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau v_\tau, \tag{I.3}$$

qu'on va l'utiliser pour la démonstration de formulation variationnelle de problème mécanique de contact. Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps et la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Où  $\dot{u}$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{u}$  désigne le champ des accélérations. Pour le champ de vitesses  $\dot{u}$  les notations  $\dot{u}_\nu$  et  $\dot{u}_\tau$  représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu, \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu.$$

La relation entre le champ des déplacements  $u$  et le champ des déformations  $\varepsilon$  dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (\text{I.4})$$

Notons qu'ici et tout au long de la mémoire, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description de modèle mathématique associée au cadre physique ci-dessus.

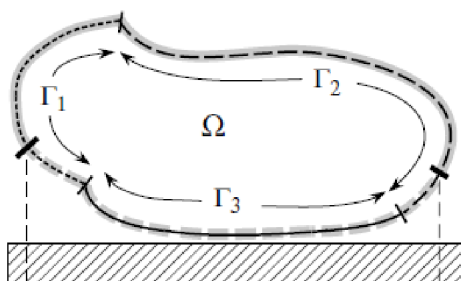


FIGURE I.1 – cadre physique

## I.2 Modèle mathématique

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ .

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div}\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (\text{I.5})$$

où  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la densité de masse. Le processus d'évolution défini par (I.5) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, le ce cas, nous introduisons dans ce memoire où le champ des vitesses  $\dot{u}$  varie très lentement par rapport au temps, le terme  $\rho\ddot{u}$  peut être négligé et l'équation (I.5)

devient

$$\operatorname{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (\text{I.6})$$

L'équation (I.6) s'appelle l'équation d'équilibre. Le processus d'évolution défini par (I.5) s'appelle processus quasistatique. Nous rappelons que dans le cadre physique  $f_2$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (I.6).

### I.3 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de chargement déchargement, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma$ , le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon$  et leurs dérivées temporelles  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$ .

#### I.3.1 Lois de comportement viscoélastique

Le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}\varepsilon(u(t)) \quad t \in [0, T], \quad (\text{I.7})$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonction constitutives non linéaire, tel que  $\mathcal{A}$  représente l'opérateur de viscosité et  $\mathcal{G}$  est l'opérateur d'élasticité.

Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{G}(\varepsilon(u)). \quad (\text{I.8})$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) \quad (\text{I.9})$$

ou  $\mathcal{A} = a_{ijkl}$  est le tenseur de viscosité et  $\mathcal{G} = g_{ijkl}$  est le tenseur de viscosité d'élasticité, pour  $i, j, k, l = 1, \dots, d$ .

### I.3.2 Lois de comportement viscoélastique avec mémoire longue

Dans le cas viscoélastique avec mémoire longue, le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \quad (\text{I.10})$$

ou  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{G}$  sont des fonctions constitutives non linéaires. Ici  $\mathcal{B}$  est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau avec mémoire long.

Lorsque  $\mathcal{B} \cong 0$  on retrouve la viscoélasticité de la mémoire courte (I.7).

## I.4 Conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le cadre physique et nous présentons en détails les conditions aux limites sur chacune des trois parties  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , et  $\Gamma_3$ , avec une description de l'aspect mathématique et mécanique de ces conditions.

### I.4.1 Condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements  $u$  est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (\text{I.11})$$

### I.4.2 Condition aux limites de traction

Une traction surfacique de densité  $f_2$  agit sur  $\Gamma_2$  et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy  $\sigma\nu$  satisfait à :

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (\text{I.12})$$

### I.4.3 Condition aux limites de contact bilatérale

Quand le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatéral. C'est généralement le cas dans de nombreuses machines et entre les pièces et composants d'équipement ou de machines mobiles. Comme il n'y a pas d'écart entre le corps et la base nous avons

$$u_\nu = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (\text{I.13})$$

La condition de contact bilatéral (I.13) a été utilisé dans un certain nombre de document, pour plus de détails voir par exemple [11, 14].

### I.4.4 Condition de contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale  $\sigma_\nu$  satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g). \quad (\text{I.14})$$

Où  $u_\nu$  est le déplacement normal,  $g$  représente l'interstice entre le corps et la fondation et  $p_\nu$  est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

La relation (I.14) est dite condition de compliance normale et signifie que la fondation exerce une pression suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration  $u_\nu - g$ . Des conditions de contact avec compliance normale ont été utilisées par exemple dans [10, ?, 13].

**Remarque I.4.1.** *Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend  $g = 0$ .*

*Pour la fonction de contrainte normale  $p_\nu$  on prend comme exemple la fonction suivante*

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (\text{I.15})$$

*où  $c_\nu$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Un deuxième exemple est donné par*

$$p_\nu(s) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

*où  $\alpha$  est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (I.14) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse  $\alpha$ , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.*

## I.5 Contact avec frottement

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle  $\sigma_\tau$  et le déplacement tangentiel  $u_\tau$  ou la vitesse tangentielle  $\dot{u}_\tau$ .

### I.5.1 Contact bilatéral avec frottement de Tresca

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe  $g$  lorsque le solide et la base rigide sont en contact, la base rigide exerce sur le solide un effort tangentiel qui ne dépasse pas un certain seuil  $g$  :

$$\|\sigma_\tau\| \leq g \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil  $g$ , le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y'a blocage, ce qui traduit par :

$$\|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la base rigide et il y'a alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Par conséquent, on a :

$$\|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = \mathbf{0} \\ \|\sigma_\tau\| \leq g \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

où  $g > 0$  est le seuil de frottement.

### I.5.2 Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

où  $\sigma_\tau$  est la contrainte tangentielle,  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement,  $u_\nu$ ,  $u_\tau$  représente le déplacement normale et tangentielle.

### I.5.3 Contact de réponse normale instantanée avec frottement

La condition dite de la réponse normale instantanée sur la surface potentielle de contact  $\Gamma_3$  s'écrit :

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu). \quad (\text{I.18})$$

où  $\dot{u}_\nu$  désigne la vitesse normale et  $p_\nu$  est une fonction prescrite telle que  $p_\nu(r) = 0$  par  $r \leq 0$ . Cette égalité traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact.

$$p_\nu(r) = K_\nu r_+ \quad \forall r \in \mathbb{R}. \quad (\text{I.19})$$

Où  $K_\nu \leq 0$ , la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. Ce type de comportement modélisant le mouvement d'un corps déformable sur le sable ou sur un matériau granulaire.

avec  $k \geq 0$ , la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. lors de la modélisation du mouvement d'un corps déformable sur du sable ou un matériau granulaire.

On peut aussi considérer le cas

$$p_\nu(r) = \mathcal{B}(r_+)^m + p_0, \quad (\text{I.20})$$

où  $r_+ = \max(0, r)$  et  $0 < m \leq 1$ . Pour  $m = 1$  la condition aux limites (I.20) où la surface de contact potentielle  $\Gamma_3$  était supposée être recouverte d'un lubrifiant qui contient des particules solides, telle qu'un des nouveaux lubrifiants intelligents, ou avec des particules métalliques usées.

Dans (I.20),  $\beta$  représente la constante de résistance d'amortissement, supposée positive, et  $p_0$  est la pression d'huile, qui est donnée et non négative. Les conditions de contact (I.18) et (I.20) modélisent le fait que la couche d'huile présente une résistance ou un amortissement uniquement lorsque la surface se déplace vers la fondation.

La loi de frottement associée est choisie comme

$$-\sigma_\tau = p_\tau(u_\tau). \quad (\text{I.21})$$

Ici,  $p_\tau$  est une fonction vectorielle prescrite,  $u_\tau$  désigne la vitesse tangentielle et  $\sigma_\tau$  représente la force tangentielle sur la frontière de contact. Par exemple, on peut considérer la fonction

$$p_\tau(r) = \mu(|r|)^{m-1}r, \quad (\text{I.22})$$

où  $\mu$  représente le coefficient de frottement, supposé positif, et  $0 < m \leq 1$ . C'est le cas lorsque la surface de contact est lubrifiée par une fine couche de fluide non newtonien . Dans le cas particulier  $m = 1$  , (I.21), (I.22) montrent que le cisaillement tangential est proportionnel à la vitesse tangentielle. On note ici que dans le le troisième chapitre de cette mémoire nous plaçons dans ce type de contact.

# Chapitre II

## Analyse fonctionnelle

Nous allons introduire dans ce qui suit l'ensemble des espaces fonctionnels utilisés ainsi que quelques résultats d'analyse non linéaire.

### II.1 Espaces fonctionnels

#### II.1.1 Espace $C^m(\overline{\Omega})$

Soit  $C(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions continues sur  $\overline{\Omega}$ .  $C(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup \{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Soient  $x = (x_1, \dots, x_d)$  un élément de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  une collection d'entiers non négatifs tels que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , nous posons

$$\mathcal{D}^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Qui nous conduit à la définition de  $C^m(\overline{\Omega})$ .

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : \mathcal{D}^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace  $C^m(\overline{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Par ailleurs, nous définissons l'espace des fonctions infiniment différentiables par

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \in C^m(\bar{\Omega}), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

### II.1.2 Espaces $L^p$

Pour  $p \in [1, \infty[$ ,  $L^p(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme  $\|v\|_{L^p(\Omega)}$ .

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty;$$

il est également de Banach.

### II.1.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Nous notons par  $C([0, T]; X)$  et  $C^1([0, T]; X)$  les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur  $[0, T]$  avec valeur sur  $X$ , respectivement, avec les normes

$$\|x\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X, \tag{II.1}$$

$$\|x\|_{C^1([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{x}(t)\|_X. \tag{II.2}$$

Soit  $0 < T < \infty$  et soit  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace de Banach réel. Nous notons par  $C_c(0, T; X)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact dans  $(0, T)$  à valeurs dans  $X$ .

**Définition II.1.1.** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite mesurable s'il existe un sous ensemble  $E \subset [0, T]$  de mesure nulle et une suite  $(f_n)^n \in N$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que  $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $t \in [0, T] \setminus E$

**Définition II.1.2.** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite *fortement dérivable* dans  $t_0 \in (0, T)$  s'il existe un élément  $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$  appelé la *dérivée forte* de  $f$  dans  $t_0$ , tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0. \quad (\text{II.3})$$

**Définition II.1.3.** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  est dite *intégrable* s'il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions appartenant à  $C_c(0, T; X)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0. \quad (\text{II.4})$$

On a le résultat suivant.

**Théorème II.1.1. (Bochner)** Une fonction  $f : [0, T] \rightarrow X$  mesurable est intégrable si et seulement si  $x \mapsto \|f(x)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable. Dans ce cas ;

$$\left\| \int_0^T f dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f\|_X dt. \quad (\text{II.5})$$

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . L'espace de Lebesgue  $L_p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $f : (0, T) \rightarrow X$  mesurables, telles que l'application  $t \rightarrow \|f(t)\|_X$  appartient à  $L^p(0, T)$ . On sait que  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty, \quad (\text{II.6})$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{c > 0 \mid \|f(t)\|_X \leq c, \text{ p.p. } t \in (0, T)\} \quad \text{si } p = \infty. \quad (\text{II.7})$$

Par ailleurs, on a les résultats suivants.

**Proposition II.1.1.** (1)  $L^p(0, T; X)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) est un espace de Banach.

(2) Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt. \quad (\text{II.8})$$

(3)  $L^r(0, T; X) \subseteq L^q(0, T; X)$ , avec injection continue,  $1 \leq q \leq r \leq \infty$ .

(4) Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$L^p(0, T; X)' = L^q(0, T; X) \quad \text{si } 1 < p, q < \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (\text{II.9})$$

$$L^1(0, T; X)' = L^\infty(0, T; X), \quad (\text{II.10})$$

où  $L^p(0, T; X)$  représente le dual de l'espace  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition II.1.4.** Soit  $u, w \in L^1(0, T; X)$ . La fonction  $w$  s'appelle la dérivée généralisée d'ordre  $n$  de  $u$  sur  $(0, T)$  si

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, T), \quad (\text{II.11})$$

$C_c^\infty(0, T)$  étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact dans  $(0, T)$ . Nous écrivons  $w = \dot{u}$  pour  $n = 1$  et  $w = u^{(n)}$  pour  $n \geq 2$ .

## II.1.4 Espaces fonctionnels en mécanique

Dans l'étude du problèmes de contact dans ce mémoire, nous définissons les espaces suivants

$$\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_1 = \{u = (u_i) : \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} : Div(\sigma) \in L^2(\Omega)^d\}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

$$\mathcal{H}_\infty = \{\varepsilon = (\varepsilon_{ijkl}) : \varepsilon_{ijkl} = \varepsilon_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d\} \quad (\text{II.12})$$

Les espaces  $\mathcal{H}, H_1, \mathcal{H}_1$  et  $V$  sont des espaces de Hilbert réels dotés des produits scalaires respectifs suivants

$$(\sigma, \tau)_\mathcal{H} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}dx$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_{L^2(\Omega)^d} + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_\mathcal{H}$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_\mathcal{H} + (Div(\sigma), Div(\tau))_{L^2(\Omega)^d}$$

$$(u, v)_V = \int_\Omega \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v)dx$$

où  $\varepsilon$  et  $Div$  sont respectivement l'opérateur de déformation linéarisé et l'opérateur de divergence.

On désigne les normes associées par  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ,  $\|\cdot\|_{H_1}$ ,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  respectivement.

Notons que  $\mathcal{H}_\infty$  est un espace de Banach réel muni de la norme

$$\|\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sum_{0 \leq i,j,k,l \leq d} \|\varepsilon_{i,j,k,l}\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (\text{II.13})$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que

$$\|\varepsilon\tau\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq \|\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\infty} \|\tau\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{H}_\infty, \quad \tau \in \mathcal{H}. \quad (\text{II.14})$$

Pour tout élément  $v \in H_1$ ,  $v_\nu$  et  $v_\tau$  représentent respectivement les composantes normale et tangentielle  $v$  sur  $\Gamma$  définies par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu.$$

La complétude de l'espace  $(V, \|\cdot\|_V)$  provient de l'hypothèse  $mes(\Gamma_1) > 0$  rendant possible l'utilisation de l'inégalité de Korn, à savoir l'existence d'un  $c_0 > 0$  dépendant  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  tel que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.15})$$

Cette inégalité découle du théorème de trace de Sobolev. De même, il existe  $C_k$  dépendant de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$

$$\|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \geq C_k \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.16})$$

Notons en particulier que

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.17})$$

Par (II.16) et (II.17) les normes  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont équivalentes sur  $V$  et de ce fait l'espace  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un espace de Hilbert réel, puisque

$$\|v\|_{H_1} = (\|v\|_H^2 + \|v\|_V^2)^{1/2} \quad \forall v \in V, \quad (\text{II.18})$$

nous obtenons

$$\|v\|_V \geq C_k \|v\|_H \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.19})$$

Nous définissons la formule de Green comme suit

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega)^d \quad (\text{II.20})$$

formule qui s'avérera particulièrement utile pour obtenir la formulation variationnelle du problème de contact traité dans le chapitre 3.

## II.2 Théorème du point fixe

Soit un espace  $X$  de Banach,  $K$  est un ensemble fermé et non de  $X$ . On suppose que  $\Lambda : K \rightarrow K$

1.  $\Lambda$  est une contraction, i.e,  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que :

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \forall u, v \in K.$$

Alors il existe une solution unique  $u \in K$  de l'équation  $\Lambda u = u$ , i.e, a un point fixe unique dans  $K$ .

2.  $\Lambda^m$  est une contraction pour  $m$  un entier positif, donc  $\Lambda$  admet un point fixe unique dans  $K$ .

## II.3 Compléments divers

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert  $X$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme associée  $|\cdot|_X$ . Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur non linéaire.

**Définition II.3.1.** *L'opérateur  $A$  est dit :*

*monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X, \quad (\text{II.21})$$

*fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \leq m |u - v|_X^2 \quad \forall u, v \in X, \quad (\text{II.22})$$

*de Lipschitz s'il existe  $M > 0$  tel que*

$$|Au - Av|_X \leq M |u - v|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (\text{II.23})$$

**Proposition II.3.1.** *Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur fortement monotone et de Lip-schitz. Alors, pour tout  $f \in H$  il existe un élément unique  $u \in H$  tel que  $Au = f$ .*

Le résultat précédent est un cas particulier du Théorème de Minty-Browder (voir par exemple [15] p. 88). Il nous prouve que tout opérateur  $A : H \rightarrow H$  fortement monotone et de Lipschitz est inversible. Les propriétés de son inverse  $A^{-1}$  sont donc nées par le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate, voir par exemple [16].

**Proposition II.3.2.** *Soit  $A : H \rightarrow H$  un opérateur fortement monotone et de Lip-schitz. Alors son inverse  $A^{-1} : H \rightarrow H$  est également un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.*

## II.4 Lemme de Grönwall.

**Lemme II.4.1.** *Soient  $f$  et  $g \in C([0, T], \mathbb{R})$ , supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que :*

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.24})$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.25})$$

Si  $g$  est non décroissante, nous avons

$$f(t) \leq g(t) e^{ct} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{II.26})$$

# Chapitre III

## Etude d'un problème de contact quasistatique avec réponse normale instantanée et frottement

On considère un problème de contact quasistatique avec réponse normale instantanée et frottement. Le chapitre est divisé en quatre sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique et les hypothèses sur les données, puis nous renvoyons dans le deuxième chapitre la formulation variationnelle du problème mécanique. La tâche principale de la troisième section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité de problème variationnelle. Dans la quatrième section, nous étudions un résultat de convergence de la solution.

### III.1 Problème mécanique et hypothèses

#### Problème P

Trouver le champ des déplacements :  $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$  tels que

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.1})$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (\text{III.2})$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (\text{III.3})$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (\text{III.4})$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (\text{III.5})$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (\text{III.6})$$

L'équation (III.1) représente la loi constitutive viscolastique. L'équation (III.2) représente l'équation d'équilibre. Les équations (III.3 et III.4) sont les conditions de déplacement-traction. (III.5) représente la conditions de réponse normale instantanée avec fortoment sur le partie  $\Gamma_3$  (III.6),  $u_0$  est le déplacement initial.

Pour l'étude du problème mécanique (III.1) - (III.6) on pose les hypothèses suivantes.

L'opérateur de viscoélasticité  $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{G}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{G}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^N; \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (\text{III.8})$$

On suppose aussi que les fonctions de contact  $p_{\nu} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $p_{\tau} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } C_1^{\nu}, C_2^{\nu} > 0 \text{ tel que} \\ |p_{\nu}(x, r)| \leq C_1^{\nu} |r| + C_2^{\nu} \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) } (p_{\nu}(x, r_1) - p_{\nu}(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(c) L'application } x \mapsto p_{\nu}(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \forall r \in \mathbb{R}; \\ \text{(d) L'application } r \mapsto p_{\nu}(x, r) \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } C_1^{\tau}, C_2^{\tau} \text{ tel que} \\ |p_{\tau}(x, r)| \leq C_1^{\tau} |r| + C_2^{\tau} \forall r \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) } (p_{\tau}(x, r_1) - p_{\tau}(x, r_2)) \cdot (r_1 - r_2) \geq 0 \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(c) L'application } x \mapsto p_{\nu}(x, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \forall r \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(d) L'application } r \mapsto p_{\tau}(x, r) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(e) } p_{\tau}(x, r) \cdot \nu(x) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^d \text{ such that } r \cdot \nu(x) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

On observe que l'hypothèse (III.9) est satisfaite par les fonctions  $p_{\nu}$  définies en (I.19), (I.20) et l'hypothèse (III.10) est satisfaite par la fonction  $p_{\tau}$  définies en (I.22) que nos résultats ci-dessous sont valables pour les problèmes aux limites liés à chacun de ces exemples.

On suppose que les forces et les tractions ont la régularité.

$$f_0 \in C(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in C(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (\text{III.11})$$

Le déplacement initial vérifie.

$$u_0 \in V, \quad (\text{III.12})$$

Ensuite, on note  $f(t)$  l'élément de  $V$  donné par

$$(f(t), v)_V = (f_0(t), v)_{L^2(\Omega)^d} + (f_2(t), \gamma v)_{L^2(\Gamma_2)^d}, \quad (\text{III.13})$$

pour tout  $v \in V$  et  $t \in [0, T]$ , et on note que les conditions (III.11) impliquent

$$f \in C(0, T; V). \quad (\text{III.14})$$

Soit  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle de frottement

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau da \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{III.15})$$

Engardant à l'esprit (III.9) et (III.10), nous observons que les intégrales dans (III.15) sont bien définies

## III.2 Formulation variationnelle

Ensuite, on suppose que  $u$  et  $\sigma$  sont des fonctions régulières vérifiant (III.2)-(III.5) et soit  $v \in V$ ,  $t \in [0, T]$ . En utilisant (2.2), (2.3) et (III.2) nous avons

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f_0(t), v)_H + \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot v da. \quad (\text{III.16})$$

On utilise (III.4) et (III.13) on trouve

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da. \quad (\text{III.17})$$

Il découle maintenant de (I.1), (I.2)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da &= \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \sigma_\nu \nu) \cdot (v_\tau + v_\nu \nu) v da \\ &= \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau \cdot v_\tau + \sigma_\nu v_\nu) da \end{aligned}$$

et d'après (III.5), on trouve

$$\int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot v da = \int_{\Gamma_3} -p_\nu(\dot{u}_\nu(t)) v_\nu - p_\tau(\dot{u}_\tau(t)) \cdot v_\tau da \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

d'après (III.15) et(III.17), on obtient

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_V. \quad (\text{III.18})$$

Pour conclure , à partir de (III.1) ( III.6) et (III.18) obtient la formulation variationnelle suivante du problème mécanique  $P$

### Problémé $P_V$

Trouver un champ des déplacements  $u : [0.T] \longrightarrow V$  et un champ de contraintes  $\sigma : [0.T] \longrightarrow \mathcal{H}_1$  tels que , pour  $t \in [0.T]$

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t))), \quad (\text{III.19})$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad (\text{III.20})$$

$$u(0) = u_0. \quad (\text{III.21})$$

Le bien posé du problème  $P_V$  résulte de l'existence suivante et le résultat d'unicité, que nous établissons dans la section suivante.

## III.3 Resultat d'existence et d'unicité

**Théorème III.3.1.** *Supposons que (III.7)- (III.12) sont vérifiées. Alors il existe une solution unique  $(u,\sigma)$  au problème (III.19)-(III.21) . De plus , la solution vérifie*

$$u \in C^1(0, T; V), \quad \sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (\text{III.22})$$

Soit  $(u,\sigma)$  la solution spécifiée dans Théorème III.3.1 alors, en utilisant des arguments standards (voir , par exemple ([11] )) il s'ensuit que

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (\text{III.23})$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , de plus, les égalités suivantes sont vérifiées, au sens des traces Pour tout  $t \in [0, T]$ .

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (\text{III.24})$$

$$\sigma(t) \cdot \nu = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (\text{III.25})$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), \quad -\sigma_\tau = p_\tau(\dot{u}_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (\text{III.26})$$

En gardant à l'esprit (III.19) (III.21)-(III.26), nous pouvons considérer  $(u, \sigma)$  comme la solution faible de problème mécanique P .

Par conséquent, par le théorème (III.3.1), nous concluons que sous les hypothèses (III.7) – (III.12), le problème P admet une unique solution faible de régularité III.22).

La preuve du Théorème III.3.1 sera effectuée en plusieurs étapes. Il est basé sur des arguments de point fixe, mais avec un choix différent des opérateurs. Nous supposons dans ce qui suit que (III.7)–(III.12) sont vérifiées.

Nous commençons par le résultat d'existence et d'unicité suivant.

**Lemme III.3.1.** *Pour tout  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ , il existe un couple unique  $(v_\eta, \sigma_\eta)$  des fonctions tel que, pour  $t \in [0, T]$*

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_\eta(t))) + \eta(t), \quad (\text{III.27})$$

$$(\sigma_\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(v_\eta(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad (\text{III.28})$$

De plus

$$v_\eta \in C(0, T; V) \text{ et } \sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H}_1),$$

## Preuve

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons l'opérateur  $B : V \rightarrow V$  et l'élément  $f_\eta(t) \in V$  par

$$(Bu, v)_V = (\mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v), \quad (\text{III.29})$$

$$(f_\eta(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (\text{III.30})$$

pour tout  $u, v \in V, t \in [0, T]$ . Soient  $u_1, u_2 \in V$ . On utilisant (III.29) et (III.15), on trouve

$$\begin{aligned} (Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)_V &= (\mathcal{A}(\varepsilon(u_1)) - \mathcal{A}(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) (u_{1\nu} - u_{2\nu}) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})) \cdot (u_{1\tau} - u_{2\tau}) da, \end{aligned}$$

et, en gardant à l'esprit (III.7), (III.9) et (III.21), on obtient

$$(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)_V \geq m_{\mathcal{A}} |u_1 - u_2|_V^2. \quad (\text{III.31})$$

En utilisant à nouveau (III.29) et (III.15), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (Bu_1 - Bu_2, v)_V &= (\mathcal{A}(\varepsilon(u_1)) - \mathcal{A}(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) v_\nu da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})) \cdot v_\tau da. \end{aligned}$$

Pour tout  $v \in V$  et par (III.7), (III.8), (III.9), (II.17) et (II.15), on en déduit que

$$\begin{aligned} |Bu_1 - Bu_2|_V &\leq L_{\mathcal{A}} |u_1 - u_2|_V + C_0 |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})|_V \\ &\quad + C_0 |p_\tau(u_{1\tau}) - p_\tau(u_{2\tau})|_V \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

L'inégalité (III.31) montre que  $B$  est un opérateur fortement monotone sur  $V$ . De plus, l'inégalité (III.32) et les hypothèses (III.9), (III.10) impliquent que  $B : V \rightarrow V$  est continue. Par conséquent, en utilisant Proposition II.3.1, il existe  $v_\eta(t) \in V$  tel que

$$Bv_\eta(t) = f_\eta(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{III.33})$$

Soit  $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  être défini par (III.27). En utilisant (III.33), (III.29) et (III.30) il s'ensuit que la paire  $(v_\eta, \sigma_\eta)$  résout de (III.27) et (III.28) pour tout  $t \in [0, T]$ . On choisit  $v = \pm\varphi$  où  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (III.28) donne

$$(\sigma_\eta, \varepsilon(\varphi))_{\mathcal{H}} = (f(t), \varphi)_V \quad \forall t \in [0, T].$$

En utilisant (III.13), on trouve

$$\text{Div } \sigma_\eta(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dons } \Omega, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{III.34})$$

Les hypothèses (III.11) et (III.34) impliquent que  $\sigma_\eta(t) \in \mathcal{H}_1$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Maintenant, soient  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , en utilisant (III.33) et (III.31), on obtient

$$m_{\mathcal{A}} |v_\eta(t_1) - v_\eta(t_2)|_V \leq |f(t_1) - f(t_2)|_V + |\eta(t_1) - \eta(t_2)|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{III.35})$$

De plus (III.27), (III.7) et (II.17) donne

$$|\sigma_\eta(t_1) - \sigma_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} |v_\eta(t_1) - v_\eta(t_2)|_V + |\eta(t_1) - \eta(t_2)|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{III.36})$$

Maintenant, puisque  $f : [0, T] \rightarrow V$  et  $\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  sont des fonctions continues, de (III.35) et (III.36) on déduit que  $v_\eta \in C(0, T; V)$  et  $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ .

De plus, il découle de (III.34) et (III.11) que  $\sigma_\eta \in C(0, T; \mathcal{H}_1)$ . Ceci conclut la partie d'existence du Lemme III.3.1.

La partie d'unicité découle de la solvabilité unique de l'équation d'évolution non linéaire (III.33).

Ensuite, pour tout  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ , on considère  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{III.37})$$

On considère l'opérateur  $\Lambda : C(0, T; \mathcal{H}) \rightarrow C(0, T; \mathcal{H})$  défini par

$$\Lambda\eta(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t))) \quad \forall \eta \in C(0, T; \mathcal{H}) \quad t \in [0, T] \quad (\text{III.38})$$

**Lemme III.3.2.** *L'opérateur  $\Lambda$  admet un unique point fixe  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ .*

## Preuve

Soient  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$  et posons  $v_i = v_{\eta_i}$ ,  $\sigma_i = \sigma_{\eta_i}$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant (III.27) et (III.28), on obtient

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_i(t))) + \eta_i, \quad (\text{III.39})$$

$$(\sigma_i(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(v_i(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad (\text{III.40})$$

pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $i = 1, 2$ . En utilisant maintenant (III.39) et (III.40), nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(\varepsilon(v_1(t))) - \mathcal{A}(\varepsilon(v_2(t))), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & + j(v_1(t), v_1(t) - v_2(t)) - j(v_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \\ & = (\eta_2(t) - \eta_1(t), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

En gardant à l'esprit (III.7) et (II.17) on en déduit que

$$(\mathcal{A}(\varepsilon(v_1(t))) - \mathcal{A}(\varepsilon(v_2(t))), \varepsilon(v_1(t)) - \varepsilon(v_2(t)))_{\mathcal{H}} \geq m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \quad \forall t \in [0, T], \quad (\text{III.42})$$

et, d'après (III.15), (III.9) et (III.10), on trouve

$$j(v_1(t), v_1(t) - v_2(t)) - j(v_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{III.43})$$

Il découle de (III.41) et (III.42) que

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{III.44})$$

Par conséquent, d'après (III.38), (III.8), (III.37) et (III.44) on trouve

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq \frac{L_G}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \quad \forall t \in [0, T].$$

En réitérant cette inégalité  $n$  fois conduit à

$$|\Lambda^n \eta_1 - \Lambda^n \eta_2|_{C(0,T;\mathcal{H})} \leq \left(\frac{L_G}{m_{\mathcal{A}}}\right)^n \frac{T^n}{n!} |\eta_1 - \eta_2|_{C(0,T;\mathcal{H})}.$$

Ce qui implique que pour  $n$  assez grand, l'opérateur  $\Lambda^n$  est une contraction dans l'espace  $C(0,T;\mathcal{H})$ . Alors  $\Lambda$  admet un point fixe unique  $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$ .

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver Théorème III.3.1 c'est-à-dire l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique  $P$ .

## Preuve du théorème III.3.1

### Existence

Soit  $\eta^* \in C(0,T;H)$  le point fixe de  $\Lambda$  et soit  $v_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}$  la solution du problème variationnel (III.27), (III.28) pour  $\eta = \eta^*$ . On note par  $u_{\eta^*}$  la fonction donnée par (III.37) pour  $\eta\eta^*$ . Nous prouvons que la paire  $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$  est une solution du problème  $P_V$  qui satisfait (III.22). En effet, l'égalité (III.19) découle de (III.37), (III.38) et (III.27) puisque

$$v_{\eta^*}(t) = \dot{u}_{\eta^*}(t), \quad \eta^*(t) = \Lambda\eta^*(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(u_{\eta^*}(t))) \quad \forall t \in [0, T].$$

L'égalité (III.20) est une conséquence directe de (III.28). Enfin, la condition initiale (III.21) ainsi que la régularité (III.22) découlent de Lemme III.3.2 et (III.37)

### Unicité

La partie d'unicité du Théorème III.3.1 résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  donné par (III.38) et de Lemme (III.3.1).

### III.4 Resultat de convergence de la solution

Dans cette section, nous étudions la dépendance de la solution du problème  $P_v$  par rapport aux des conditions de contact . Nous supposons dans ce qui suit que (III.7)-(III.12) sont vérifiées et , pour une perturbation de  $p_\nu$  et  $p_\tau$  qui satisfait (III.9) la fonctionnelle  $j^\alpha$  obtenue  $p_\nu^\alpha, p_\tau^\alpha$  et tout  $\alpha \geq 0$  , qui satisfait (III.9) et (III.10) respectivement . Nous introduisons à partir de  $j$ , on considère maintenant le variationnel suivant en remplaçant  $p_\nu, p_\tau$  par  $p_\nu^\alpha, p_\tau^\alpha$  on considère maintenant le problème variationnel suivant

#### Probleme $P_V^\alpha$

Trouver un champ des déplacements  $u^\alpha : [0, T] \longrightarrow V$  et un champ des contraintes  $\sigma^\alpha : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}_1$  tel que , pour  $t \in [0, T]$

$$\sigma^\alpha(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}^\alpha(t))) + G(\varepsilon(u^\alpha(t))), \quad (\text{III.45})$$

$$(\sigma^\alpha(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j^\alpha(\dot{u}^\alpha(t), v) = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \quad (\text{III.46})$$

$$u^\alpha(0) = u_0. \quad (\text{III.47})$$

On déduit du Théorème III.3.1 pour tout  $\alpha > 0$ , le problème  $P_V^\alpha$  admet une solution unique  $(u^\alpha, \sigma^\alpha)$  satisfait  $u^\alpha \in C^1(0, T : V)$  ,  $\sigma^\alpha \in C(0, T, \mathcal{H}_1)$ .

Supposons maintenant que les fonctions de contact vérifient les hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \beta_\nu \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi_\nu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ \text{(a) } |p_\nu^\alpha(x, r) - p_\nu(x, r)| \leq \varphi_\nu(\alpha) (|r| + \beta_\nu) \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b) } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\nu(\alpha) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{III.48})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \beta_\tau \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi_\tau : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ \text{(a) } |p_\tau^\alpha(x, r) - p_\tau(x, r)| \leq \varphi_\tau(\alpha) (|r| + \beta_\tau) \quad \forall r \in \mathbb{R}^N \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(b) } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\tau(\alpha) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.49})$$

Sous ces hypothèses, nous avons le résultat de convergence suivant.

**Théorème III.4.1.** *La solution  $(u^\alpha, \sigma^\alpha)$  du problème  $P_V^\alpha$  converge uniformément vers la solution  $(u, \sigma)$  du problème  $P_V$  :*

$$\begin{aligned} u^\alpha &\rightarrow u \quad \text{sur } C^1(0, T; V), \\ \sigma^\alpha &\rightarrow \sigma \quad \text{sur } C(0, T; \mathcal{H}_1) \quad \text{pour } \alpha \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{III.50}$$

**Remarque III.4.1.** *L'intérêt mathématique de ce résultat, il est important dans les applications, car il indique que de petites imprécisions dans les conditions de contact conduisent à de petites imprécisions dans la solution.*

### Preuve du théorème III.4.1

Soit  $\alpha \geq 0$ . Pour simplifier la notation nous n'indiquerons pas explicitement la dépendance à  $t \in [0, T]$ .  $C$  toujours est une constante positive qui peut dépendre des données et de la solution  $(u, \sigma)$  mais ne dépend pas de  $\alpha$ , pas du variable de temps et sa valeur peut changer d'une place à une autre.

En utilisant (III.19), (III.20), (III.45) et (III.46), on obtient

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}^\alpha)) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})), \varepsilon(\dot{u}^\alpha) - \varepsilon(\dot{u}))_{\mathcal{H}} \\ &+ (G(\varepsilon(u^\alpha)) - G(\varepsilon(u)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha) - \varepsilon(\dot{u}))_{\mathcal{H}} + j^\alpha(\dot{u}^\alpha, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) = 0. \end{aligned} \tag{III.51}$$

De plus, de (II.17), (III.7) et (III.8) il résulte que

$$(\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}^\alpha)) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})), \varepsilon(\dot{u}^\alpha) - \varepsilon(\dot{u}))_{\mathcal{H}} \geq C |\dot{u}^\alpha - \dot{u}|_V^2, \tag{III.52}$$

$$-(G(\varepsilon(u^\alpha)) - G(\varepsilon(u)), \varepsilon(\dot{u}^\alpha) - \varepsilon(\dot{u}))_{\mathcal{H}} \leq C |u^\alpha - u|_V |\dot{u}^\alpha - \dot{u}|_V. \tag{III.53}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} j(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) &= j(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j^\alpha(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) \\ &\quad + j^\alpha(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) \end{aligned}$$

et, en utilisant (III.9), (III.10), on trouve

$$\begin{aligned} j(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) &\leq j(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j^\alpha(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) \\ &= \int_{\Gamma_3} (p_\nu(\dot{u}_\nu) - p_\nu^\alpha(\dot{u}_\nu)) (\dot{u}_\nu^\alpha - \dot{u}_\nu) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (p_\tau(\dot{u}_\tau) - p_\tau^\alpha(\dot{u}_\tau)) \cdot (\dot{u}_\tau^\alpha - \dot{u}_\tau) da. \end{aligned}$$

Maintenant, compte tenu de (III.48), (III.49) , l'inégalité précédente implique .

$$j(\dot{u}, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) - j^\alpha(\dot{u}^\alpha, \dot{u}^\alpha - \dot{u}) \leq C(\varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\tau(\alpha)) |\dot{u}^\alpha - \dot{u}|_V. \quad (\text{III.54})$$

En combinant (III.51) - (III.54) on déduit que

$$|\dot{u}^\alpha - \dot{u}|_V \leq C |u^\alpha - u|_V + C(\varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\tau(\alpha)). \quad (\text{III.55})$$

Car  $u(0) = u^\alpha(0) = u_0$  nous voyons que

$$|u^\alpha(t) - u(t)|_V \leq \int_0^t |\dot{u}^\alpha(s) - \dot{u}(s)|_V ds. \quad (\text{III.56})$$

Maintenant, une intégration sur  $(0, t)$  et (III.21), (III.47), (III.55) et (III.56) conduit à

$$|u^\alpha(t) - u(t)|_V \leq C \int_0^t |u^\alpha(s) - u(s)|_V ds + C(\varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\tau(\alpha)), \quad (\text{III.57})$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et en appliquant l'inégalité de GronWall on obtient

$$|u^\alpha - u|_V \leq C(\varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\tau(\alpha)). \quad (\text{III.58})$$

De plus, à partir de (III.45), (III.19), (III.7) et (III.8), on obtient

$$|\sigma^\alpha - \sigma|_{\mathcal{H}} \leq C(|\dot{u}^\alpha - \dot{u}|_V + |u^\alpha - u|_V),$$

et, puisque d'après (III.34),  $Div \sigma = Div \sigma^\alpha = -f_0$  on trouve

$$|\sigma^\alpha - \sigma|_{\mathcal{H}_1} \leq C(|\dot{u}^\alpha - \dot{u}|_V + |u^\alpha - u|_V). \quad (\text{III.59})$$

En Utilisant maintenant (III.55)-(III.59), on déduit que

$$|\sigma^\alpha - \sigma|_{\mathcal{H}_1} \leq C(\varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\tau(\alpha)). \quad (\text{III.60})$$

Enfin, il résulte de (III.55), (III.58) et (III.60) que

$$|u^\alpha - u|_{C^1(0,T;V)} + |\sigma^\alpha - \sigma|_{C(0,T;\mathcal{H}_1)} \leq C(\varphi_\nu(\alpha) + \varphi_\tau(\alpha)). \quad (\text{III.61})$$

Le Théorème III.4.1 est maintenant une conséquence de (III.48), (III.49) et (III.61).

# Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème de contact entre un corps viscélastique et une fondation avec une loi de contact de réponse normale instantanée et frottement. Pour commencer, nous avons proposé une formulation variationnelle du modèle de contact en termes de déplacements. Puis, nous avons obtenu des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible, ainsi que des résultats concernant le comportement de la solution par rapport aux perturbations des données et des résultats de convergence. Pour y parvenir, nous avons d'utilisé des arguments de monotonie. Pour continuer le travail accompli dans ce mémoire, il serait intéressant de considérer des processus de contact quasistatique ou dynamique associé aux différentes lois de contact et de frottement étudiées. L'analyse variationnelle de ces problèmes représente un sujet de recherche ouvert qui mérite d'être abordé dans l'avenir. Le contrôle optimal du modèle de contact présenté dans ce mémoire pourrait aussi être étudié. Pour vérifier les estimations de l'erreur ainsi que les résultats de convergence obtenus dans ce mémoire et illustrer le comportement du modèles étudié, des simulations numériques basées sur des méthodes performantes seront les bienvenues. Cet objectif sera réalisé dans des travaux ultérieurs qui représenteront une continuation naturelle de ce mémoire.

# Bibliographie

- [1] A. Amassad and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law, *Cont discret Dynam. Systèmes* 4 (1998), 55–72.
- [2] L.E. Anderson, A quasistatic frictional problem with normal compliance, *Oreille anale non lin.* 16 (1991), 347–370.
- [3] H. Brezis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 18 (1968), no. 1, 115–175.
- [4] M. Cocu, E. Pratt et M. Raous, Quasistatic Friction Contact Formulation and Approximation, *internat J.Engr. Science.* 34 (1996), 783–798.
- [5] G. Duvaut et JL Lions, *Les Inéquations en Mécanique et Physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [6] R. Ionescu et M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford Univ. Presse, Oxford, 1993.
- [7] N. Kikuchi et J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variation Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphie, 1988.
- [8] A. Klarbring, A. Mikelić and M. Shillor, The rigid punch problem with friction, *Internat. J.Engr. Science.* 29 (1991), 751–768.
- [9] J. Nečas et I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodys : an Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [10] M. Raous, M. Jean and JJ Moreau, *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York, 1995.
- [11] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with normal conformité et friction, *J. Elasticity* 51 (1998), 105–126.
- [12] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, *Appl. Anal.* 68 (1998), 409422.

- [13] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage, *Adv. Mathématiques. Science. Appl.* 10 (2000), 173–189.
- [14] M. Sofonea and M. Shillor, Variational analysis of quasistatic viscoplastic contact problems with friction, *Comm. Appl. Anal.*, 2001.
- [15] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [16] M. Sofonea, *Problèmes Non linéaires dans la Théorie de l'Elasticité, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées*, Univesité de Sétif, Algérie (1993).

**Résumé :** L'objet de ce mémoire porte sur une étude variationnelle d'un problème aux limites décrivant le contact avec frottement entre un corps déformable et une fondation. Le mémoire est structuré en trois chapitres. Le premier et le deuxième chapitre sont consacrés à rappeler le modèle mécanique de contact étudié ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans le mémoire. Le troisième chapitre est destiné à l'étude d'un problème de contact quasistatique. La loi de contact considérée est une loi de contact avec réponse normale instantanée. Pour ce problème, nous avons obtenu un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques d'analyse fonctionnelle et variationnelle. Enfin, nous étudions la dépendance continue de la solution avec les données initiales et nous prouvons des résultats de convergence.

**Mots clé :** matériau viscoélastique, contact frottant, réponse normale instantanée, problème variationnelle, opérateur monotone, point fixe.

**Abstract:**

The aim of this memory is a variational study of a boundary problem describing the contact with friction between a deformable body and a foundation. The thesis is structured in three chapters. The first and the second chapters are devoted to reminding the mechanical model of contact studied as well as some mathematical tools necessary in the memory. The third chapter is intended for the study of a quasi-static contact problem. The contact law considered is a contact law with instantaneous normal response. For this problem, we obtained a result of existence and uniqueness of a weak solution using functional and variational analysis techniques. Finally, we study the continuous dependence of the solution with the initial data and we prove convergence results.

**Key words:** viscoelastic material, frictional contact, normal damped response, variational problem, monotone operator, fixed point.

**ملخص:** يهدف هذا العمل إلى دراسة تغيرية لمسألة لانهاية والتي تصف تماس مع احتكاك بين جسم قابل للتشوه والأساس. تتكون الأطروحة من ثلاثة فصول. تم تخصيص الفصلين الأول والثاني لتذكير النموذج الميكانيكي للتلامس المدروس وكذلك بعض الأدوات الرياضية اللازمة في الذاكرة. الفصل الثالث مخصص لدراسة مسألة تماس شبه ساكنة. يعتبر مع اعتبار مع استجابة عادية لحظية. بالنسبة لهذه المسألة، حصلنا على نتيجة وجود حل ضعيف وتفرد باستخدام تقنيات التحليل الوظيفية والمتغيرة. أخيراً، درسنا تقارب الحل عند تغيير الشروط الابتدائية وأثبتنا هذا التقارب.

**الكلمات المفتاحية:** جسم لزج مرن، تلامس احتكاكي، استجابة عادية لحظية، مسألة تغيرية، موثر رتيب، نقطة ثابتة.