

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES

Département De Mathématique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Solution d'équations matricielles pour des classes d'opérateurs
bornés dans des espaces de Hilbert**

Présenté par : **Chenna Aicha**
Laib Djouhaina

Devant le jury:

Abd El ouahab Mansour	Professeur	Président	Univ. d'El Oued
Said Beloul	MCA	Examineur	Univ. d'El Oued
Lourabi Hariz Bekkar	MCB	Rapporteur	Univ. d'El Oued

Promotion : 2019/2020

Remerciements

Nous remercions « Allah » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

*Nous remercions Monsieur **Dr . Lourabi Hariz Bekkar** : Professeur à **Univ. dEl Oued**, qui nous a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su nous motiver chaque étape de notre travail par des remarques pertinentes. Nous le remercions très sincèrement pour sa disponibilité.*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

*Nous remercions également tous nos collègues d'études, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2019/2020 à l'université de **Chahid Hama Lakhdar El_Oued**.*

Et a toute nos familles : Chenna et laïb .

Enfin, nous ne voudrions pas oublier nos famille qui nos soutenu moralement, sans les nommer explicitement, nous les remercions pour leur encouragement.

Notations

H	Espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.
\mathbb{C}	Le corps des nombres complexes .
$B(H)$	Espace des opérateurs linéaires bornées sur H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	Produit scalaire .
$\ \cdot\ _H$	La norme .
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T .
T^*	Adjoint de T .
$ T = \sqrt{T^*T}$	Module T .
$Im(T)$	L'image d'opérateur T .
$Ker(T)$	Le noyau d'opérateur T .
I_H	L'opérateur identité .
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante d'opérateur T .
$R_\lambda(T)$	La résolvante d'opérateur T .

$\sigma(T)$	Le spectre d'opérateur T .
$\sigma_p(T)$	Le spectre ponctuel d'opérateur T .
$\sigma_r(T)$	Le spectre résiduel d'opérateur T .
$\sigma_c(T)$	Le spectre continu d'opérateur T .
$\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$	L'espace des matrices à n lignes et m colonnes , à coefficients dans \mathbb{R} .
$(FP)_{B(H)}$	propriété de Fuglède - Putnam .
SOT	topologie d'opérateurs forte .
WOT	topologie d'opérateurs faible .

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle	2
1.1.1 Espace de Hilbert définitions et exemples :	2
1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert :	3
1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés :	5
1.2.1 Définitions et exemples :	5
1.2.2 L'inverse d'un opérateur :	5
1.2.3 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné :	6
1.2.4 Quelques classes d'opérateurs :	7
1.2.5 Racine carrée d'un opérateur borné :	10
1.2.6 Commutateurs :	11
1.2.7 Similarité :	11
1.3 Spectre des opérateurs linéaire borné :	12
1.3.1 Décomposition spectrale :	17
2 Solution des équations matricielles dans le cas fini :	18
2.1 Solution d'équation $BX - XA = Q$:	18
2.2 Solution d'équation $BXC + DXA = Q$:	21
3 Existence des solutions d'équations d'opérateurs du type : Sylvester et Lyapunov dans $B(H)$	30
3.0.1 Propriété de Fuglede Putnam	30
3.1 L'équation $AX - XB = C$ dans $B(H)$:	31
3.1.1 La solution d'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$	35
3.2 Solution des équations d'opérateur de temps discrètes	36
3.2.1 Certains types d'équations d'opérateur :	36

3.3	L'équation d'opérateur Quasi - Lyapunov	39
3.4	La solution en série pour l'équation $AX - XB = C$ dans $B(H)$	40
3.5	solution d'équation $AXB - XD = E$	42
4	Étudié de nature des solutions d'équations généralisées de Lyapunov	45
4.1	La nature de la solution d'équation Lyapunov	45
4.1.1	Autre d'exemples :	47
4.2	Solution d'équation $AX - XB = C$ tel que $X = X^*$:	49
4.3	Nature de la solution d'équation Lyapunov des maladies infectieuses :	50
	Bibliographie	56

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une partie très importante des mathématiques pures, et un pilier fondamental des mathématiques appliquées. La théorie d'opérateurs dépend fortement de cette partie et que les effets des influences sont des outils pour les chercheurs dans de nombreux domaines scientifiques ; en particulier, les équations d'opérateurs jouent un rôle important dans la théorie de contrôle et la mécanique quantique où les équations de Sylvestre et Lyapunov ont contribué dans le domaine des sciences médicales et son modèle pour le traitement des maladies infectieuses.

Dans le premier chapitre, nous avons fourni un rappel de toutes les règles de base que nous utilisons dans ce travail. Nous avons commencé par les définitions et les propriétés de l'espace de Hilbert, ainsi que par les opérateurs linéaires bornés et on présente quelques classes d'opérateurs sur un espace de Hilbert. aussi que des notions au le spectre d'opérateurs bornés.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons des solutions d'équations d'opérateurs matriciel dans le cas fini, Il existe de nombreux chercheurs qui travaillent sur ce type d'équations comme W.E.Roth [?] et M. Resenblum [13]. Le troisième chapitre contient une présentation des solutions pour certaines équations d'opérateurs dans le cas infini des modèles de solutions liés aux équations d'opérateurs de la forme $AX - XB = C$ et $(A + \lambda) + (B + \mu) = C$ ou $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Et nous verrons la condition sur les deux matrices d'opérateurs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pour l'existence de la solution, et l'importance de la propriété Fugled-Putnam pour atteindre la formulation de la solution. D'autre part, les solutions peuvent également être exprimées en série infini en utilisant la théorie spectrale.

Finalement, le quatrième chapitre, nous présenterons la nature des solutions d'équations des opérateurs matriciels, dans différentes conditions pour quelques types d'opérateurs. Et nous étudions la forme générale de l'équation $B^*XA + \alpha AXB = W$ et la nature des solutions, et que cette forme d'équations est un cas particulier des équations de Lyapunov qui sont appliqués dans le domaine des sciences médicales et modélisés dans la recherche sur les maladies infectieuses.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notations et les définitions qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Nous donnons quelques définitions importantes par la suite : espace de Hilbert, les opérateurs linéaires bornés, quelques classes d'opérateurs puis, spectre d'opérateurs linéaire borné.

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Hilbert définitions et exemples :

Définition 1.1.1.

H un \mathbb{C} -espace vectoriel, on appelle un produit scalaire l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

tel que : $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

- (1) $\langle \lambda \cdot x + \mu z, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle + \mu \cdot \langle z, y \rangle$
- (2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- (3) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$

Remarque 1.1.1.

Si H est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , on a :

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

Définition 1.1.2.

On appelle espace préhilbertien un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Un espace préhilbertien peut être muni d'une structure d'espace métrique pour la distance

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

Proposition 1.1.1.

Tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Définition 1.1.3.

On dit qu'un espace préhilbertien H , muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est un espace de Hilbert si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet.

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert :

Proposition 1.1.2. (L'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur H . Alors, pour tous $x, y \in H$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

avec égalité si, et seulement si, la famille $\{x, y\}$ est liée.

Définition 1.1.4. (Orthogonalité) :

Soit H un espace de Hilbert et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur H . Si F est un sous-espace vectoriel de H , on définit l'orthogonal de F par :

$$F^\perp := \{x \in H : \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$$

Définition 1.1.5. (Identité du parallélogramme) :

Soient $x, y \in H$ avec H est un espace pré-hilbertien alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Remarque 1.1.2.

Un espace vectoriel normé est un espace pré-hilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité du parallélogramme

Exemple 1.1.1.

$(C[0, 1], \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé mais n'est pas un espace préhilbertien car : si

$$f(x) = 1, g(x) = x \quad \text{avec} \quad x \in [0, 1] \quad \|f(x)\|_\infty = 1, \|g(x)\|_\infty = 1$$

Alors :

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |1 + x| = 2, \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |1 - x| = 1$$

Et donc

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2$$

Théorème 1.1.1. (Identité polarisation) :

Soient $x, y \in H$

1/ Toute forme bilinéaire symétrique $\varphi : H \times H \mapsto E$ vérifie ::

$$4\varphi(x, y) = \varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y)$$

Alors :

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

2/ Toute forme sesquilinéaire $\varphi : H \times H \mapsto \mathbb{C}$ (hermitienne ou non) vérifie :

$$4\varphi(x, y) = \varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy)$$

Alors :

$$\forall x, y : \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x + y \rangle + \|y\|^2.$$

$$\forall x, y : \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x + y \rangle + \|y\|^2.$$

Théorème 1.1.2. (projection)

Soit A un ensemble convexe fermé (et non vide) de H alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in A$ tel que :

$$\inf_{a \in A} \|x - a\| = \|x - y\|$$

Autrement dit : il existe un unique point $y \in A$ qui est à une distance de x la plus petite possible ce point y s'appelle la projection de x sur A

Corollaire 1.1.1.

Soit F sous espace vectoriel fermé de H , et soit $x \in H$

1) Soit $y \in F$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ Alors $(x - y)$ est orthogonal à F i.e (orthogonal à tous les vecteurs $z \in F$)

2) Réciproquement si $y \in F$, est tel que : $(x - y) \perp F$ alors $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$ i.e y est la projection de x sur F .

Notation 1.1.1.

On notera $y = P_F(x)$ et on dira que y est la projection orthogonale de x sur F

1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés :

1.2.1 Définitions et exemples :

Définition 1.2.1.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et

$$T : E \rightarrow F$$

T est une application de E dans F .

T est dit opérateur linéaire si,

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in E : T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y).$$

Définition 1.2.2.

L'opérateur T sur H est dite borné, s'il existe c positif tel que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

Proposition 1.2.1.

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. L'ensemble $\{Tx : \|x\| \leq 1\}$ est borné dans F ,
2. T est continu à l'origine 0 de E ,
3. T est continu,
4. $\exists c > 0$ tel que $\forall x \in X \quad \|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$.

1.2.2 L'inverse d'un opérateur :

Définition 1.2.3.

On dit qu'un opérateur T est inversible sur l'espace de $B(H)$, s'il existe un opérateur T^{-1} qui vérifie $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, où I est l'opérateur identité dans $B(H)$.

1.2.3 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné :

Définition 1.2.4.

Soit T opérateur dans $B(H)$. L'unique application linéaire $T^* \in B(H)$ telle que pour tous $x, y \in H$ on ait

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

est appelée l'adjoint de T .

Proposition 1.2.2.

Soit T opérateur dans $B(H)$. Alors il existe un unique $T^* \in B(H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, on ait :

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve :

Pour tout $y \in H$ l'application $x \mapsto \langle T(x), y \rangle$ est linéaire et continue (de norme inférieure à $\|T\|\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $T^*(y)$ tel que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H$ et λ scalaire, $T^*(y) + \lambda T^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $T^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $T^*(y) + \lambda T^*(z) = T^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que T^* est linéaire.

Par définition de la norme opérateur et en utilisant un corollaire d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{y \in H, \|y\| \leq 1} \|T^*y\| = \sup_{\substack{x \in H, \|x\| \leq 1 \\ y \in H, \|y\| \leq 1}} |\langle x, T^*y \rangle| \\ &= \sup_{\substack{x \in E, \|x\| \leq 1 \\ y \in F, \|y\| \leq 1}} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\| \end{aligned}$$

Ainsi T^* est continu et $\|T^*\| = \|T\|$.

Proposition 1.2.3.

Si T et S sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de $B(H)$, alors leurs adjoints T^* et S^* sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur $B(H)$ et les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $(T^*)^* = T$.

4. Si T est inversible, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
5. $\|T^*\| = \|T\|$.
6. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
7. $(ST)^* = T^*S^*$.

1.2.4 Quelques classes d'opérateurs :

Un opérateur $T \in B(H)$ est dit :

- . **Positif**, si : $\langle Tx, x \rangle_H \geq 0$ pour tout $x \in H$; on notera $T \geq 0$ (Ordre de Löwner).
- . **Auto-adjoint**, si : $T = T^*$.
- . **Anti-adjoint**, si : $T^* = -T$.
- . **Isométrie**, si : $T^*T = I_H$.
- . **Unitaire**, si : $T^*T = TT^* = I_H$.
- . **Normal**, si : $T^*T = TT^*$.
- . **Compact**, si : $\langle Tx_n, x_n \rangle_H \rightarrow 0$ pour toute suite orthonormée $\{x_n\}$ de H :
i.e $\langle x, x_n \rangle_H \rightarrow 0$ alors $\|Tx_n\|_H \rightarrow 0$.
- . **Nilpotent**, si : $T^k = 0$, ($T^{k-1} \neq 0$) d'ordre k .
- . **Projection orthogonal**, si : $T = T^2$.
- . **Dominant**, si : $R(T - \lambda) \subseteq ((T - \lambda)^*)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- . **P-hyponormal**, si : $T^*T \geq TT^*$, ou bien $\|Tx\|_H \geq \|T^*x\|_H$.
- . **k-quasihyponormal**, si : $T^{*k}(T^*T - TT^*)T^k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.2.4.

Soit T un opérateur dans $B(H)$, T est auto-adjoint si et seulement si le produit scalaire $\langle Tx, x \rangle$ est un nombre réel pour tout $x \in H$.

Preuve :

Soit T un opérateur dans $B(H)$, alors on a

$$\begin{aligned} \langle T^*x, x \rangle &= \langle x, Tx \rangle \\ &= \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle Tx, x \rangle \end{aligned}$$

Ce qui implique $T^* = T$.

Théorème 1.2.1.

Un opérateur T est unitaire si et seulement si T est isométrique et surjectif.

Preuve :

Si U est unitaire, il est inversible, d'inverse T^* , donc surjectif. De plus, pour tout x de H

$$\|Tx\| = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*T, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

et T est isométrique. Inversement, si T est isométrique et surjectif, il est inversible et

$$\langle T^*T - x, x \rangle = \|Tx\|^2 - \|x\|^2 = 0 \quad \text{pour tout } x$$

donc

$$T^*T = I \text{ et } T^{-1} = T^*$$

Alors

$$TT^* = T^*T = I.$$

Exemple 1.2.1.

1. Soit $H = L^2([0, 1])$, et $T \in B(H)$ tel que :

$$(T)[x(t)] = x(1 - t)$$

On vérifie facilement que $T = T^* = T^{-1}$ Donc T est unitaire.

2. soit H l'espace de Hilbert de toutes les suites de nombres complexes

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \quad \text{tq} \quad \|x\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{y}_n \quad \text{où } x = (\dots, x_n, \dots), y = (\dots, y_n, \dots) \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

On définit l'opérateur U "opérateur de décalage" par :

$$U(x_n) = (x_{n-1})$$

Alors, T est unitaire : U est inversible et on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-1} \bar{y}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{y}_{n+1} = \langle x, U^{-1}y \rangle$$

ce ci implique que $U^* = U^{-1}$

Remarques 1.2.1.

1. Au lieu d'auto-adjoint, on dit des fois symétrique si on est sur \mathbb{R} (même sur \mathbf{C}), et on dit hermitien sur \mathbf{C} .

2. T positif sur \mathbb{R} c'est-à-dire T est auto adjoint et $\langle Tx, x \rangle \geq 0$

3. T auto-adjoint $\implies T$ normal.

4. T unitaire $\implies T$ isométrie, normal et inversible.

5. T positif $\implies T$ auto-adjoint.

Exemple 1.2.2.

1. L'identité $I : H \longrightarrow H$ est auto-adjoint positif car

$$\langle Ix, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0 \forall x \in H$$

2. Soit l'opérateur $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ "shift" défini par

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

On sait que

$$T^*(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

T n'est pas auto adjoint car

$$Te_1 \neq T^*e_1 \quad \text{pour} \quad e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

T n'est pas positif car

$$\langle Tx, x \rangle = -1 \quad \text{pour} \quad x = (-1, 1, 0, 0, \dots)$$

De plus :

$$T^*Tx = T^*(0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

et

$$TT^*x = T(x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

Donc T n'est pas normal, n'est pas unitaire, mais c'est une isométrie.

3. Soit $H = L^2([0,1])$ et $T_\varphi \in B(H)$ tel que

$$T_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$$

avec φ continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes.

On sait que $T_\varphi^*f(x) = \overline{\varphi(x)}f(x)$ qui nous donne :

T_φ est auto-adjoint $\iff \varphi = \bar{\varphi}$.

T_φ est toujours normal.

T_φ est unitaire $\iff |\varphi| = 1$.

T_φ est positif $\iff \varphi$ est positif.

1.2.5 Racine carré d'un opérateur borné :

Définition 1.2.5.

Soit $T \in B(H)$, on dit que $S \in B(H)$ est la racine carrée de T si : $S^2 = T$

Théorème 1.2.2.

Soit $T \in B(H)$ positif, alors il existe un unique opérateur positif $S \in B(H)$ tel que : $S^2 = T$
De plus, si $B \in B(H)$ commute avec T , alors $B \in B(H)$ commute avec S et on écrit :

$$S = T^{1/2}$$

Corollaire 1.2.1.

Soit A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H . Si A et B sont positifs tels que : $AB = BA$ alors AB est positif.

Preuve :

On a , $A \geq 0 \Rightarrow \exists S \geq 0$, tq : $S^2 = A$

Et puisque B commute avec A , alors :

B commute avec S

D'où $\langle ABx, x \rangle = \langle S^2 Bx, x \rangle = \langle SBx, Sx \rangle = \langle BSx, Sx \rangle$

On pose $y = Sx$, donc $\langle By, y \rangle \geq 0$ (car B est positif)

Alors : AB est positif.

Corollaire 1.2.2.

Soit $A \geq 0$ est inversible, alors : $S = A^{1/2}$ est inversible.

Preuve :

Soit A positif et inversible

$$(A^{-1}S)S = A^{-1}S^2 = A^{-1}A = I$$

et $S(A^{-1}S) = (SA^{-1})S = (SA^{-1})ASA^{-1} = S^2A^{-1} = I$

car $AS = SA$ c'est-à-dire $S = ASA^{-1}$

donc S est inversible d'inverse $A^{-1}S$.

Exemple 1.2.3.

1. Trouvons $A^{1/2}$, ou $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A est un opérateur positif car : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ On a si

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \langle (2x, y), (x, y) \rangle = 2x^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

On remarque que $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

vérifie que $B^2 = A$. Puisque la racine carrée est unique, alors :

$$\sqrt{A} = B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.L 'opérateur $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une racine carrée de l'opérateur $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

1.2.6 Commutateurs :

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

Définition 1.2.6.

Un élément X de $B(E)$ est appelé commutateur s'il existe deux opérateurs A et B dans $B(E)$, tels que $X = AB - BA$.

Le commutant X de $A \in B(H)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}' = \{B \in B(E), AB = BA\}$$

Le bicommutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \{C \in B(E), BC = CB, \forall B \in \{A\}'\}$$

Dans la suite, on va citer quelques propriétés.

1. $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$
2. $\{A\}$ est une sous-algèbre de $B(E)$
3. $\{A\}''$ est une sous-algèbre commutative de $B(E)$
4. Tout polynôme de A appartient à $\{A\}''$

1.2.7 Similarité :

Définition 1.2.7.

Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, on dit que A et B sont similaires si et seulement s'il existe un opérateur inversible φ tel que : $B = \varphi A \varphi^{-1}$

Lemme 1.2.1.

Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, $R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$ leurs applications résolvantes respectivement, alors $R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$ sont similaires si et seulement si A et B les sont

preuve :

Soient A et B deux opérateurs similaires dans $B(H)$ alors il existe un opérateur φ tel que

$$\begin{aligned} B &= \varphi A \varphi^{-1} \\ R_\lambda(B) &= R_\lambda(\varphi A \varphi^{-1}) \\ &= (\varphi A \varphi^{-1} - \lambda I)^{-1} \\ &= ((\varphi A - \lambda \varphi) \varphi^{-1})^{-1} \\ &= \varphi (A - \lambda I)^{-1} \varphi^{-1} \\ &= \varphi R_\lambda(A) \varphi^{-1} \end{aligned}$$

1.3 Spectre des opérateurs linéaire borné :

Définition 1.3.1.

Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Alors : $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A défini comme le complément du spectre de A . Ou nous rappelons que le spectre de A est défini par :

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda Id) \text{ non inversible} \}$$

Définition 1.3.2.

si $\lambda \in \rho(A)$, $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)$ est appelée résolvante de A

Proposition 1.3.1. (Identité de Hilbert)

$$R_{\lambda_1}(A) - R_{\lambda_2}(A) = (\lambda_1 - \lambda_2) (R_{\lambda_1}(A) \cdot R_{\lambda_2}(A))$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$$

Preuve :

On a

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} = (A - \lambda_1)^{-1} - (A - \lambda_2)^{-1} = (\lambda_2 - \lambda_1) (A - \lambda_1)^{-1} (A - \lambda_2)^{-1}$$

Maintenant on vas établir la nature topologique du spectre.

Théorème 1.3.1.

Le spectre de tout opérateur $A \in B(H)$ est un compact non vide de \mathbb{C} .

Preuve :

Le spectre de A est borné car : si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\lambda| > \|A\|$, alors : $A - \lambda Id$ est inversible.

En effet :

$$|\lambda| > \|A\| \implies 1 > \|\lambda^{-1}A\|$$

donc : $I - \lambda^{-1}A$ est inversible (série de Neumann) i-e : $\lambda I - A$ est inversible. D'où : $\lambda \in \rho(A)$ pour montrer que $\sigma(A)$ est fermé on va définir la fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ \lambda &\longmapsto F(\lambda) = \lambda I - A \end{aligned}$$

F est continue (c'est même une isométrie) car :

$$\|F(\lambda) - F(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| = |\lambda - \mu|$$

On note par : $\mathcal{B}_i(H)$ l'ensemble des opérateurs inversibles.

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : F \in \mathcal{B}(H)/\mathcal{B}_i(H)\} \\ &= F^{-1}\{(\mathcal{B}(H))/\mathcal{B}_i(H)\} \end{aligned}$$

donc : $\sigma(A)$ fermé car : $\mathcal{B}(H)/\mathcal{B}_i(H)$ ouvert $\sigma(A)$ est non vide car :

$$\frac{1}{\lambda - A} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{A}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n \right)$$

Si $|\lambda| > \|A\|$ alors la série de Neumann est convergente, donc si

$$|\lambda| \longrightarrow \infty, \|R_\lambda\| \rightarrow 0.$$

Si $\sigma(A)$ est vide alors : R_λ est une fonction bornée analytique (entière) donc par le théorème de Liouville $R_\lambda(A)$ égale a zéro et ceci est une contradiction.

D'où : $\sigma(A)$ est non vide.

Définition 1.3.3.

Soit H un espace de Hilbert et soit $A \in \mathcal{B}(H)$ ($A - \lambda I$) inversible si et seulement si :

1. ($A - \lambda I$) injectif
2. ($A - \lambda I$) surjective
3. ($A - \lambda I$)⁻¹ borné

Définition 1.3.4.

Soit A un opérateur, si $\lambda \in \sigma(A)$ on a les cas suivants :

1. Le spectre ponctuel :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif} \}$$

2. Le spectre continu :

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est injectif et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = H\}$$

3. Le spectre résiduel :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est injectif et } \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq H\}$$

Remarque 1.3.1.

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Lemme 1.3.1.

Soit $A \in B(H)$ alors :

$$\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$$

Preuve :

Si $\lambda \in \rho(A)$ alors : $T - \lambda I$ est inversible, donc :

$$(A - \lambda I)^* = \bar{\lambda}I - A^*$$

est inversible alors : $\bar{\lambda} \in \rho(A^*)$

Si on remplace A par A^* on trouve $\bar{\lambda} \in \rho(A^*) \implies \lambda \in \rho(A)$

Proposition 1.3.2.

Soit A un opérateur borné, A est positif si et seulement si A est auto adjoint et

$$\sigma(A) \subset [0, \infty[$$

Preuve :

1. \implies ça vient directement de la propriété d'un opérateur positif.

2. Pour l'autre sens, si $\sigma(A) \subset [0, \infty[$, alors pour tout $a > 0$ on a ; $-a \in \rho(A)$ (ensemble résolvant de A). On utilise alors le lemme classique qui dit que si A est auto-adjoint et si $\lambda \in \rho(A)$ alors :

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}$$

dans notre cas on obtient

$$\|(A + a)u\| \geq a\|u\|$$

Cela implique que

$$a^2\|u\|^2 \leq \|(A+a)u\|^2 \leq \|Au\|^2 + 2a \langle Au, u \rangle + a^2\|u\|^2$$

d'où :

$$\langle Au, u \rangle \geq -(2a)^{-1}\|Au\|^2$$

qui est valable pour n'importe quel $a > 0$ ce qui implique bien que A est positif.

Théorème 1.3.2.

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$

1. *Si A est inversible alors : $\sigma(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$*
2. *$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ (théorème spectral mapping).*

Preuve :

1. Puisque A inversible, alors : 0 n'appartient pas à $\sigma(A)$ et $(\sigma(A))^{-1}$ a un sens : On

$$A^{-1} - \lambda^{-1} = (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$$

$\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1}) \iff A^{-1} - \lambda^{-1}$ est inversible $\iff (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$ est inversible donc : $(\lambda - A)$ est inversible . Alors : $\lambda \in \rho(A)$

$$\text{D'ou : } \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1}) \iff \lambda \in \sigma(A)$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ posons $Q(z) = \lambda - P(z)$, $Q(z)$ est un polynôme de degré n car $P(z)$ est un polynôme. D'après : le théorème fondamental de l'algèbre $Q(z)$ admet n racines i-e :

$$Q(z) = c(z - \mu_1)(z - \mu_2)\dots(z - \mu_n), c \neq 0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$$

$$\lambda \in \rho(A) \iff \lambda I - P(A) \text{ inversible} \iff Q(A) \text{ inversible}$$

$$\iff c(z - \mu_1)(z - \mu_2)\dots(z - \mu_n) \text{ inversible}$$

$$\iff (-\mu_i) \text{ inversible } \quad \forall i$$

$$\iff \mu_i \in P(A) \quad \forall i$$

$$\iff Q(\mu) \neq 0 \quad \forall \mu \in \sigma(A)$$

$$\iff \lambda \neq P(\mu) \quad \forall \mu \in \sigma(A)$$

$$\iff \lambda \text{ n'appartient pas à } P(\sigma(A))$$

Exemple 1.3.1. On utilise le théorème spectral pour calculer le spectre d'une polynôme par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $\sigma(A) = \{1, 2\}$ Si on veut calculer $\sigma(A^2)$ à partir de $\sigma(A)$ on trouve

$$\sigma(A^2) = \{1, 4\}$$

car : si $P(x) = x^2$, alors : $\sigma(A^2) = (\sigma(A))^2$.

Proposition 1.3.3.

Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint on a :

1. le spectre $\sigma(A)$ est réel de plus si z et z' sont des valeurs propres distincts de A on a

$$\text{Ker}(A - zI) \perp \text{Ker}(A - z'I)$$

2. $\sigma_r(A) = \emptyset$.

3. $\sigma(A) \subset [m, M]$ ou $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ et $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$.

4. $r(A) = \|A\|$ ou $r(A)$ est le module du plus grand élément du spectre, appelée le rayon spectral.

Définition 1.3.5.

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe et :

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Théorème 1.3.3.

Soit A opérateur dans $B(H)$.Alors :

1. A auto adjoint $\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

2. A unitaire $\Rightarrow \sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$.

Remarque 1.3.2.

Si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ il n'est pas nécessaire que A est auto-adjoint.

Exemple 1.3.2.

Soit A opérateur dans $B(H)$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas auto adjoint mais son spectre est réel.

1.3.1 Décomposition spectrale :

Projecteurs spectraux :

Définition 1.3.6.

Pour toute valeur propre λ_i , on note P_{λ_i} où P_i la projection sur le sous espace E_{λ_i} (dimension finie) parallèlement à l'espace $\bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_j}$. P_i sont les projecteurs spectraux de A tel que $P_i(x) = x$, si $x \in E_{\lambda_i}$ et $P_i(x) = 0$, si $x \in E_{\lambda_j}$, $i \neq j$

Propriétés :

Soit λ_i sont les valeurs propre de A tel que P_i les projecteurs spectraux de A . Alors :

$$\sum_i P_i = I_E$$

$$\forall i \neq j : P_i P_j = 0$$

$$\forall i : P_i^2 = P_i$$

Si A est diagonalisable on écrit

$$A = \sum_i \lambda_i P_i$$

Exemple 1.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont 0, 3 les projecteurs spectraux associés P_0 , P_1 vérifient

$$P_0 + P_1 = I_3$$

$$A = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1$$

$$A = 3P_1$$

$$P_1 = \frac{1}{3}A, P_0 = I_3 - \frac{1}{3}A$$

Chapitre 2

Solution des équations matricielles

dans le cas fini :

Dans ce chapitre , nous présentons des solutions d'équations d'opérateurs matricielles à l'état fini pour certains types d'équations de classe $BX - XA = Q$, où les deux matrices A, B ont des dimensions différentes et où l'état généralisé de l'équation est de la forme $BXC + DXA = Q$ et pour une référence plus. Pour plus de détail vois [22].

2.1 Solution d'équation $BX - XA = Q$:

Définition 2.1.1.

Soit $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$ La représentation de A où chaque λ_i est une valeur propre de A et chaque E_i est une matrice idempotente matrice carrée mais pas nécessairement symétrique associée à λ_i est appelée spectrale décomposition.

Nous voulons résoudre l'équation matricielles de type

$$BX - XA = Q \tag{2.1}$$

Théorème 2.1.1.

Soit A une matrice carrée de dimension m , tel que $A = \sum_{j=1}^m a_j E_j$ et B est une matrice carrée de dimension n , tel que $B = \sum_{K=1}^n b_K F_K$, où les E_j et les F_k forment chacun des ensembles distincts de matrices orthogonales idempotentes. Une nécessaire et condition suffisante pour que l'équation matricielle admet solution X ,

$$X = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j$$

est que chaque fois que pour une paire d'indices s et r , $a_s = b_r$ qui est les racines caractéristiques sont égales, alors $F_r Q E_s = 0$.

Preuve :

Supposons que X est une solution de Eq (2.1) tel que $a_s = b_r$. Alors Eq (2.1) implique :

$$\sum_{k=1}^n (b_k F_k) X - X \left(\sum_{j=1}^m a_j E_j \right) = Q \quad (2.2)$$

qui peut être réécrit comme :

$$\sum_{k=1}^n b_k F_k X - \sum_{j=1}^m a_j X E_j = Q \quad (2.3)$$

Multiplication à gauche par F_r et en multipliant à droite par E_s obtient :

$$b_r F_r X E_s - a_s F_r X E_s = F_r Q E_s \quad (2.4)$$

parce que E_s et F_r sont orthogonaux idempotents.

$$(b_r - a_s) F_r X E_s = F_r Q E_s \quad (2.5)$$

par hypothèse $b_r - a_s = 0$, donc le côté gauche de l'équation (2,5) devient 0 cela implique :

$$F_r Q E_s = 0$$

Pour montrer la suffisance, la convention suivante sera utilisée. Si $a_s = b_r$, alors $F_r Q E_s = 0$ et $0 = 0$. Ainsi l'expression

$$\frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j \quad (2.6)$$

a un sens pour tout j et k . Soit ensuite X défini comme suit

$$X = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j \quad (2.7)$$

Si X est une solution de Eq (2.1), remplacer X par V devrait conduire à Q .

$$\begin{aligned}
\text{BV-VA} &= B \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j - \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j A \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{b_k - a_j} B F_k Q E_j - F_k Q E_j A \right] \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_k - a_j} \sum_{\lambda=1}^n (b_\lambda F_\lambda) F_k Q E_j - F_k Q E_j \sum_{\mu=1}^m (a_\mu E_\mu) \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_k - a_j} b_k F_k Q E_j - a_j F_k Q E_j \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n F_k Q E_j \\
&= \left(\sum_{k=1}^m F_k \right) Q \left(\sum_{j=1}^n E_j \right) \\
&= Q
\end{aligned}$$

donc , V est une solution d'Eq (2.1) et la preuve est complète.

Exemple 2.1.1.

La technique dérivée dans le théorème (2.1.1) sera maintenant utilisé pour résoudre l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La représentation de A est

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

et B

$$B = b_1 F_1 + b_2 F_2$$

On a :

$$\begin{aligned}
A &= 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
B &= 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A partir du théorème (2.1.1) , la solution X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j$$

$$X = \frac{1}{b_1 - a_1} F_1 Q E_1 + \frac{1}{b_1 - a_3} F_1 Q E_3 + \frac{1}{b_2 - a_1} F_2 Q E_1 + \frac{1}{b_2 - a_2} F_2 Q E_2$$

$$X = \frac{1}{2-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2-3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{3-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour étendre les résultats du théorème (2.1.1) , on utilisera le fait que si deux matrices commutent, alors leurs matrices idempotentes commutent .

2.2 Solution d'équation $BXC + DXA = Q$:

Théorème 2.2.1.

Soit A et C des matrices carrées de dimension m , tel que A et C des matrices idempotentes orthogonales. Soit B et D des matrices carrées de dimension n , tel que B idempotente orthogonale. Vérifiera $AC = CA$ et $BD = DB$. l'équation matricielle

$$BXC + DXA = Q \tag{2.8}$$

a une solution $X = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} H_l F_k Q G_j E_i$ est que chaque fois que pour un ensemble d'indices $\{r, s, v, p\}$ les conditions suivantes : $c_s b_v + a_r d_p = 0$, on a : $H_p F_v Q G_s E_r = 0$

Preuve :

Supposons que X est une solution de Eq (2.8) tel que $c_s b_v + a_r d_p = 0$. Alors Eq (2.8) implique :

$$\left(\sum_{k=1}^n b_k F_k \right) X \left(\sum_{j=1}^m c_j G_j \right) + \left(\sum_{l=1}^n d_l H_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m a_i E_i \right) = Q$$

Multiplication à gauche par F_v et à multiplier en même temps à droite par G_s donne :

$$c_s b_v F_v X G_s + F_v \left(\sum_{l=1}^n d_l H_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m a_i E_i \right) G_s = F_v Q G_s \quad (2.9)$$

En utilisant le fait que si deux matrices commutent, alors leurs matrices idempotentes commutent, Eq (2.9) peut être écrit comme :

$$c_s b_v F_v X G_s + \sum_{l=1}^n d_l H_l F_v X G_s \sum_{i=1}^m a_i E_i = F_v Q G_s$$

Multiplication à gauche par H_p et à multiplier en même temps à droite par E_r , qui résulte en

$$c_s b_v H_p F_v X G_s E_r + a_r d_p H_p F_v X G_s E_r = H_p F_v Q G_s E_r \quad (2.10)$$

Eq (2.10) implique :

$$(c_s b_v + a_r d_p) H_p F_v X G_s E_r = H_p F_v Q G_s E_r \quad (2.11)$$

par hypothèse $c_s b_v + a_r d_p = 0$, donc le côté gauche de l'équation (2, 11) devient 0 cela implique :

$$H_p F_v Q G_s E_r = 0$$

Si $c_s b_v = -a_r d_p$, alors $H_p F_v Q G_s E_r = 0$ et $0 = 0$. Ainsi l'expression

$$\frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} H_l F_k Q G_j E_i$$

V défini comme suit :

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} H_l F_k Q G_j E_i \quad (2.12)$$

et soit V une solution de Eq (2.8) . Remplaçant ainsi la représentation spectrale des matrices A, B, C et D donne :

$$\begin{aligned} BVC + DVA &= \sum_{\lambda=1}^n b_\lambda F_\lambda \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} H_l F_k Q G_j E_i \sum_{\mu=1}^m c_\mu G_\mu + \\ &\sum_{\sigma=1}^n d_\sigma H_\sigma \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} H_l F_k Q G_j E_i \sum_{\phi=1}^m a_\phi E_\phi = \\ &\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} \left(\sum_{\lambda=1}^n b_\lambda F_\lambda \right) H_l F_k Q G_j E_i \left(\sum_{\mu=1}^m c_\mu G_\mu \right) + \\ &\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} \left(\sum_{\sigma=1}^n d_\sigma H_\sigma \right) H_l F_k Q G_j E_i \left(\sum_{\phi=1}^m a_\phi E_\phi \right) \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de matrices idempotentes orthogonales et la conunitivité , donne :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} c_j b_k H_l F_k Q G_j E_i + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} a_i d_l H_l F_k Q G_j E_i \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{c_j b_k + a_i d_l} (c_j b_k + a_i d_l) H_l F_k Q G_j E_i \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n H_l F_k Q G_j E_i \\
&= \sum_{l=1}^m H_l \sum_{k=1}^n F_k Q \sum_{j=1}^m G_j \sum_{i=1}^n E_i \\
&= Q
\end{aligned}$$

donc , V est une solution d'Eq (2.8) et la preuve est complète.

Dans le cas plus général, les solutions d'équations de type

$$\sum_{i=1}^n A_i X B_i = Q \tag{2.13}$$

où les matrices A et B sont carrées et de dimensions différentes . Pour résoudre ce type d'équation , les restrictions suivantes devraient être respectées :

1 - A_i et B_i devrait être un ensemble commutatif

$$2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = 0$$

Si ces restrictions tiennent , alors on a

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i \right) Q \left(\sum_{j=1}^m F_j \right) = 0$$

Remarque 2.2.1.

Toutes les matrices ne peuvent pas être décomposées en une représentation qui n'implique que des matrices idempotentes. Cependant, une matrice de ce type peut toujours être décomposée en utilisant à la fois des matrices idempotentes et des matrices nilpotentes.

Si E est une matrice idempotente, alors Soit \bar{E} sa matrice nilpotente associée.

Deux propriétés des matrices nilpotentes sont

$$1 - E_i \bar{E}_i = \bar{E}_i = \bar{E}_i E_i$$

$$2 - E_i \bar{E}_j = \bar{E}_i \bar{E}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

Théorème (2.2.2) généralisant à ce cas plus inclusif résultats dans le théorème (2.1.1)

Théorème 2.2.2.

Soit A une matrice carrée de dimension m, tel que $A = \sum_{i=1}^m a_i E_i + \bar{E}_i$ et B est une matrice carrée de dimension n, tel que $B = \sum_{j=1}^n b_j F_j + \bar{F}_j$, où les E_i et les F_j sont des ensembles complets de principales matrices idempotentes et \bar{E}_i , \bar{F}_j sont des ensembles complets de matrices

nilpotentes , associés à A et B respectivement . Si $Q\bar{E}_i = \bar{F}_jQ$ et $X\bar{E}_i = \bar{F}_jX$ pour tout i et j , alors l'équation $BX - XA = Q$ admet $X = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q E_i$ une solution X est que pour une paire d'entiers r et s , $a_s = b_r$, tel que $B_r Q A_s = 0$.

Preuve :

soit X une solution de

$$BX - XA = Q \quad (2.14)$$

de telle sorte que $a_s = b_r$. alors l'équation : $BX - XA = Q$ implique

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j=1}^n (b_j F_j + \bar{F}_j) \right] X - X \left[\sum_{i=1}^m (a_i E_i + \bar{E}_i) \right] = Q \\ & \sum_{j=1}^n b_j F_j X + \sum_{j=1}^n \bar{F}_j X - \sum_{i=1}^m a_i X E_i - \sum_{i=1}^m X \bar{E}_i = Q \end{aligned}$$

En rappelant les propriétés des matrices nilpotentes qui sont énoncées dans l'équation : (2.14)

et en multipliant à partir de la gauche par F_r de façon terme, on obtient

$$b_r F_r X + \bar{F}_r X - \sum_{i=1}^m a_i F_r X E_i - \sum_{i=1}^m F_r X \bar{E}_i = F_r Q$$

La multiplication à partir de la droite par E_s de façon terme donne

$$b_r F_r X E_s + \bar{F}_r X E_s - a_s F_r X E_s - F_r X \bar{E}_s = F_r Q E_s \quad (2.15)$$

Regrouper et simuler l'Eq (2.15) devient

$$(b_r - a_s) F_r X E_s + F_r (\bar{F}_r X - X \bar{E}_s) E_s = F_r Q E_s \quad (2.16)$$

Mais par hypothèse $\bar{F}_r X = X \bar{E}_s$ qui implique Eq (2.16) est

$$(b_r - a_s) F_r X E_s = F_r Q E_s \quad (2.17)$$

Encore une fois, par hypothèse $b_r = a_s$ et donc le côté gauche de Eq (2,17) est nul ce qui implique que

$$F_r Q E_s = 0$$

Pour montrer la suffisance, la convention sera utilisée chaque fois que $a_s = b_r$ puis et $0 = 0$.

Ainsi, l'expression

$$\frac{1}{b_k - a_j} F_k Q E_j$$

aura une signification pour toutes les valeurs de j et k

Soit V une solution d'Eq (2.26) où

$$V = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q E_i \quad (2.18)$$

Ensuite, le côté gauche de l'équation (2.14) est

$$\begin{aligned} BV - VA &= B \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q E_i \right) A \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} B F_k Q E_i - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q E_i A \end{aligned}$$

Remplacez les décompositions spectrales par A et B pour obtenir

$$\begin{aligned} BV - VA &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda=1}^m \frac{1}{b_k - a_i} (b_\lambda F_\lambda + \bar{F}_\lambda) F_k Q E_i - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_k - a_i} \sum_{\mu=1}^n (a_\mu E_\mu + \bar{E}_\mu) F_k Q E_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} (b_k F_k + \bar{F}_k) Q E_i - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q (a_i E_i + \bar{E}_i) \end{aligned}$$

L'ajout et la factorisation des termes courants donnent :

$$BV - VA = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} (b_k F_k + \bar{F}_k) Q E_i - F_k Q (a_i E_i + \bar{E}_i) \quad (2.19)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} b_k F_k Q E_i + \bar{F}_k Q E_i - a_i F_k Q E_i + F_k Q \bar{E}_i \quad (2.20)$$

en appliquant l'hypothèse et les propriétés des matrices idempotentes et nilpotentes à Eq (2.20) , cette équation se simplifie en suite :

$$\begin{aligned} BV - VA &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} b_k F_k Q E_i - a_i F_k Q E_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k - a_i} (b_k - a_i) F_k Q E_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n F_k Q E_i \\ &= \left(\sum_{k=1}^n F_k \right) Q \left(\sum_{i=1}^m E_i \right) \\ &= Q \end{aligned}$$

D'où V solution de $BX - XA = Q$.

Exemple 2.2.1.

Pour appliquer la théorème (2.2.2) . Si A, B, Q des matrices telle que :

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, Eq (2.14) devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Les décompositions de A et B sont :

$$A = a_1 E_1 + \bar{E}_1 + a_2 E_2 + \bar{E}_2$$

$$B = b_1 F_1 + b_2 F_2$$

donc

$$A = 1 \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right) + \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -10 \\ 10 & 10 & -10 \end{bmatrix} \right) + 3 \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) + 0$$

$$B = -1 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) + 3 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

D'après le théorème (2.2.2) , la valeur de X recherchée peut être représentée comme Eq (2.18) comme suit

$$X = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{b_k - a_i} F_k Q E_i \quad (2.21)$$

L'expansion de l'équation (2.21) implique

$$X = \frac{1}{b_1 - a_1} F_1 Q E_1 + \frac{1}{b_1 - a_2} F_1 Q E_2 + \frac{1}{b_2 - a_1} F_2 Q E_1 \quad (2.22)$$

Pour tous les autres choix de i et k , la différence $b_k - a_i = 0$, par conséquent, par la convention du théorème (2.2.2) :

$$X = \left(\frac{-1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{-1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \\
& + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
X & = \left(\frac{-1}{16}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{-1}{32}\right) \begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{16}\right) \begin{bmatrix} 12 & 12 & -12 \\ 12 & 12 & -12 \end{bmatrix} \\
& X = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 7 & 5 & -5 \\ 4 & 7 & -7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Le théorème suivant généralise les résultats du théorème (2.2.1)

Théorème 2.2.3.

Soit A et C des matrices carrées de dimension m , telles que $A = \sum_{i=1}^m a_i E_i + \bar{E}_i$ et $C = \sum_{j=1}^m c_j G_j + \bar{G}_j$ et que B et D soient des matrices carrées de dimension n , et les matrices B, D tel que $B = \sum_{k=1}^n b_k F_k + \bar{F}_k$ et $D = \sum_{l=1}^n d_l H_l + \bar{H}_l$, où les ensembles E_i, G_j, F_k et H_l sont des matrices idempotentes et les ensembles $\bar{E}_i, \bar{G}_j, \bar{F}_k$ et \bar{H}_l sont des matrices nilpotentes l'équation

$$BXC + DXA = Q \quad (2.23)$$

admet une solution $X = \sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{b_r c_s + d_v a_p} H_v F_r Q G_s E_p$ et pour un ensemble d'indices r, s, v, p où $H_v F_r$ et $G_s E_p$ forment des matrices non singulières :

$$c_s \bar{F}_r Q + b_r Q \bar{G}_s + a_p \bar{H}_v Q + d_v \bar{E}_p Q + \bar{F}_r Q \bar{G}_s + \bar{H}_v Q \bar{E}_p = 0$$

implique que X est aussi une solution l'équation

$$(b_r c_s + d_v a_p + c_s \bar{F}_r + a_p \bar{H}_v) X + X (b_r \bar{G}_s + d_v \bar{E}_p) + \bar{F}_r X \bar{G}_s + \bar{H}_v X \bar{E}_p = Q$$

Preuve :

soit X solution de l'équation (2.23) on a :

$$Q = \left(\sum_{k=1}^n b_k F_k + \bar{F}_k \right) X \left(\sum_{j=1}^m c_j G_j + \bar{G}_j \right) + \left(\sum_{l=1}^n d_l H_l + \bar{H}_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m a_i E_i + \bar{E}_i \right) \quad (2.24)$$

Donc

$$Q = \left(\sum_{k=1}^n b_k F_k \right) X \left(\sum_{j=1}^m c_j G_j \right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k F_k \right) X \left(\sum_{j=1}^m \bar{G}_j \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{k=1}^n \overline{F}_k \right) X \left(\sum_{j=1}^m c_j G_j \right) + \left(\sum_{k=1}^n \overline{F}_k \right) X \left(\sum_{j=1}^m \overline{G}_j \right) \\
& + \left(\sum_{l=1}^n d_l H_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m a_i E_i \right) + \left(\sum_{l=1}^n d_l H_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m \overline{E}_i \right) \\
& + \left(\sum_{l=1}^n \overline{H}_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m a_i E_i \right) + \left(\sum_{l=1}^n \overline{H}_l \right) X \left(\sum_{i=1}^m \overline{E}_i \right)
\end{aligned}$$

Multipliant à gauche par F_r et H_v dans cet ordre de façon terminologique puis multipliant à droite par G_s et E_p dans cet ordre dans un mode terminologique utilisant la commutativité et les propriétés idempotentes de ces matrices donne des résultats de l'équation précédente on a :

$$\begin{aligned}
H_v F_r Q G_s E_p & = b_r c_s H_v F_r X G_s E_p + b_r H_v F_r X \overline{G}_s E_p \\
c_s H_v \overline{F}_r X G_s E_p & + H_v \overline{F}_r X \overline{G}_s E_p + d_v a_p H_v F_r X G_s E_p \\
d_v H_v F_r X G_s \overline{E}_p & + a_p \overline{H}_v F_r X G_s E_p + \overline{H}_v F_r X G_s \overline{E}_p
\end{aligned}$$

en utilisant les propriétés des matrices nilpotentes et le factorisation , l'équation précédente peut être réduite à

$$H_v F_r Q G_s E_p =$$

$$H_v F_r \left[(b_r c_s + d_v a_p + c_s \overline{F}_r + a_p \overline{H}_v) X + X (b_r \overline{G}_s + d_v \overline{E}_p) + \overline{F}_r X \overline{G}_s + \overline{H}_v X \overline{E}_p \right] G_s E_p$$

Depuis $H_v F_r$ et $G_s E_p$ sont des matrices non singulières, alors leurs inverses existent ce qui donne :

$$Q = (b_r c_s + d_v a_p + c_s \overline{F}_r + a_p \overline{H}_v) X + X (b_r \overline{G}_s + d_v \overline{E}_p) + \overline{F}_r X \overline{G}_s + \overline{H}_v X \overline{E}_p$$

Implique que X est la solution de cette équation et que sera utilisée à chaque fois $b_r c_s + d_v a_p = 0$, puis $H_v F_r X G_s E_p = 0$, puis l'expression

$$\frac{1}{b_r c_s + d_v a_p} H_v F_r X G_s E_p \quad (2.25)$$

Sera bien défini. Soit V une solution à Eq (2.23) où

$$V = \sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{b_r c_s + d_v a_p} H_v F_r Q G_s E_p \quad (2.26)$$

Alors

$$\begin{aligned}
BVC + DVA & = \left(\sum_{r=1}^n (b_k F_k + \overline{F}_k) \right) \left(\sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{b_r c_s + d_v a_p} H_v F_r Q G_s E_p \right) \\
& \cdot \left(\sum_{j=1}^m (c_j G_j + \overline{G}_j) \right) + \left(\sum_{l=1}^n (d_l H_l + \overline{H}_l) \right)
\end{aligned}$$

$$\cdot \left(\sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{1}{b_r c_s + d_v a_p} H_v F_r Q G_s E_p \right) \left(\sum_{i=1}^m (a_i E_i + \bar{E}_i) \right)$$

Simplifier l'équation précédente en multipliant et en utilisant les propriétés des matrices idempotentes et nilpotentes donne :

$$BVC + DVA = \sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left[\frac{(c_s b_r + d_v a_p) H_v F_r Q G_s E_p H_v F_r (c_s F_r Q + b_r Q G_s + a_p H_v Q + d_l E_p + F_r Q G_s + H_l Q E_p) G_s E_p}{b_r c_s + d_v a_p} \right]$$

En utilisant la condition du théorème (2.2.3) l'équation

$$\begin{aligned} &= \sum_{p=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n H_v F_r Q G_s E_p \\ &= Q \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de ce théorème.

Généralisation de ces résultats aux équations de type

$$\sum_{i=1}^n A_i X B_i = Q \quad (2.27)$$

Où

$$A_i = \sum_{j=1}^m (a_{ij} A_{ij} + \bar{A}_{ij}) \quad \text{and} \quad B_i = \sum_{j=1}^m (b_{ij} B_{ij} + \bar{B}_{ij})$$

Avec $\{A_{ij}\}, \{B_{ij}\}$ formant des ensembles de matrices idempotentes complètes et $\{\bar{A}_{ij}\}, \{\bar{B}_{ij}\}$ former des ensembles complets de matrices nilpotentes.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'Eq (2.27) une solution X est que chaque fois que pour un ensemble d'indices, $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m A_{ij}$ et $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m B_{ij}$ ont des inverses et

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \bar{A}_{ij} Q + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{A}_{ij} Q \bar{B}_{ij} = 0$ puis X est aussi une solution de

$$\left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ij} b_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \bar{A}_{ij} \right) X + X \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \bar{B}_{ij} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \bar{A}_{ij} X \bar{B}_{ij} \right) = Q$$

Une autre solution à Eq (2.27) existe si l'une ou l'autre paire de matrices B, C ou A, D sont inversibles, alors l'équation à résoudre est

$$X + B^{-1} D X A C^{-1} = B^{-1} Q C^{-1}$$

ou

$$D^{-1} B X C A^{-1} + X = D^{-1} Q A^{-1}$$

Chapitre 3

Existence des solutions d'équations d'opérateurs du type : Sylvester et Lyapunov dans $B(H)$

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence des solutions de quelques équations d'opérateurs de type Sylvester et Lyapunov, dans le cas infini et la solution définie sous deux formes.

Théorème 3.0.1.

Soient A et B deux opérateurs bornés sur $B(H)$, avec B un opérateur normal si $AB = BA$ alors, $AB^ = B^*A$.*

Ce théorème fut établi en 1950 par Fuglede, puis la généralisation de la version de Fuglede est donnée par C.R.Putnam en 1951.

Théorème 3.0.2. (Fuglede Putnam) [12]

*Soient A , B et X trois opérateurs bornés sur $B(H)$, avec A et B normaux si $AX = XB$ alors $A^*X = XB^*$.*

3.0.1 Propriété de Fuglede Putnam

On dit que la paire (A, B) satisfait la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam) si $AX = XB$ alors, $A^*X = XB^*$ tel que X, A et $B \in B(H)$.

Proposition 3.0.1.

Soit A un opérateur normal dans $B(H)$, il existe une base orthogonale de projections et des nombres complexes λ_i tels que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = I$, $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p_i$ où p_i ces les projections orthogonales.

Preuve :

Si $p_i = p(\lambda_i)$, A normal donc $A = \int \lambda d_p(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p_i$

Définition 3.0.1.

On dit que la suite $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge SOT dans $B(H)$ si (x_n) converge en norme dans H pour tout $x \in H$. $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n x$ et on écrit $x_n \xrightarrow{SOT} x$.

Lemme 3.0.1.

Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(H)$, donc les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1- $x_n \xrightarrow{SOT} x$ pour $X \in B(H)$
- 2- $\text{Sup}\|x_n\| < \infty$
- 3- Si $x_n \xrightarrow{SOT} x$ et $y_n \xrightarrow{SOT} y$ alors $x_n y_n \xrightarrow{SOT} xy$

3.1 L'équation $AX - XB = C$ dans $B(H)$:

Rappelons que si M est un sous-espace vectoriel fermé de H et $T \in B(H)$, alors T s'écrit suivant la décomposition $H = M \oplus M^\perp$ sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in B(M)$, $B \in B(M^\perp, M)$, $C \in B(M, M^\perp)$ et $D \in B(M^\perp)$.

Proposition 3.1.1.

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur $H \oplus H$ tel que $A = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ alors son

adjoint A^* est donné par $A^* = \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix}$.

Preuve : Soient $A = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned}
\langle AX, Y \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Qx_1 + Rx_2 \\ Sx_1 + Tx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle Qx_1 + Rx_2, y_1 \rangle + \langle Sx_1 + Tx_2, y_2 \rangle \\
&= \langle Qx_1, y_1 \rangle + \langle Rx_2, y_1 \rangle + \langle Sx_1, y_2 \rangle + \langle Tx_2, y_2 \rangle \\
&= \langle x_1, Q^*y_1 \rangle + \langle x_2, R^*y_1 \rangle + \langle x_1, S^*y_2 \rangle + \langle x_2, T^*y_2 \rangle \\
&= \langle x_1, Q^*y_1 + S^*y_2 \rangle + \langle x_2, R^*y_1 + T^*y_2 \rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle X, A^*Y \rangle
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.2.

Soit T un opérateur dans $B(H)$ et T^* son adjoint alors , les deux opérateurs T^*T et TT^* sont positifs.

Preuve : On a pour tout $f \in H$

$$\langle T^*Tf, f \rangle = \langle Tf, Tf \rangle = \|Tf\|^2 \geq 0$$

et

$$\langle TT^*f, f \rangle = \langle T^*f, T^*f \rangle = \|T^*f\|^2 \geq 0$$

Lemme 3.1.1.

Si la matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ définie sur $H \oplus H$ est inversible alors, l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible sur H .

Preuve : Soit $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ une matrice inversible sur $H \oplus H$ alors, $S^*S + Q^*Q$ est un opérateur positif (somme de deux opérateurs positifs),

$$\sigma(S^*S + Q^*Q) = \sigma_a(S^*S + Q^*Q)$$

Où σ et σ_a représentent respectivement le spectre, et le spectre approche, si on suppose $S^*S + Q^*Q$ est non inversible alors, il existe une suite $(x_n)_n \subset H$ telle que :

$$\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(S^*S + Q^*Q)x_n\| = 0$$

On a

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\|^2 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\rangle. \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle. \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle. \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} Q^*Q + S^*S & Q^*R + S^*T \\ R^*Q + T^*S & R^*R + T^*T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle. \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} (Q^*Q + S^*S)x_n \\ (R^*Q + T^*S)x_n \end{pmatrix}, (x_n \oplus 0) \right\rangle \\
&= \langle (Q^*Q + S^*S)x_n, x_n \rangle
\end{aligned}$$

mais comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((S^*S + Q^*Q)x_n, x_n) = 0$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\|^2 = 0$$

Ce qui contredit notre hypothèses et la preuve est achevée.

Théorème 3.1.1.

Soient A et B deux opérateurs normaux bornés dans $B(H)$ et vérifient la propriété de $(FP)_{(B(H))}$ (propriété de Fuglede- Putnam) C est opérateur dans $B(H)$, alors l'équation :

$$AX - XB = C$$

admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont deux opérateurs similaires sur $H \oplus H$.

Preuve : Si l'équation $AX - XB = C$ admet une solution X , alors

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

par conséquent $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont similaires, supposons maintenant que les opérateurs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont similaires alors, il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$

dans $B(H \oplus H)$ tel que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} AQ & AR \\ BS & BT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QA & QC + RB \\ SA & SC + TB \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne après l'identification terme par terme

$$\begin{aligned} QA &= AQ & \text{et} & \quad AR - RB = QC \\ BS &= SA & \text{et} & \quad BT - TB = SC \end{aligned}$$

en appliquant la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam), on obtient $BS^* = S^*A$ et $AQ^* = Q^*A$ par conséquent

$$AS^*S = S^*SA$$

d'où A commute avec S^*S et Q^*Q , donc avec la somme $S^*S + Q^*Q$ l'inverse $(S^*S + Q^*Q)^{-1}$ commute aussi avec A , car en général si A commute avec B , il commute avec B^{-1} .

En effet

$$AB = BA \Leftrightarrow B^{-1}BAB^{-1} = B^{-1}ABB^{-1} \Leftrightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$$

de plus on obtient

$$\begin{aligned} (S^*S + Q^*Q)C &= Q^*(AR - RB) + S^*(BT - TB) \\ &= (AQ^*R + AS^*T) - (Q^*RB + S^*TB) \\ &= A(Q^*R + S^*T) - (Q^*R + S^*T)B \end{aligned}$$

D'après lemme (3.1.1) l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible, son inverse commute avec A par conséquent

$$C = A(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)B$$

d'où

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)$$

Corollaire 3.1.1.

Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, si la paire (B, A) satisfait la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam), alors l'équation $AX - XB = C$ admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont deux opérateurs similaires sur $H \oplus H$ l'un des cas suivants :

i) A dominant .

ii) A p -hyponormal .

iii) A K -quasihyponormal .

3.1.1 La solution d'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$

Soit l'équation $(A + \lambda)X - X(B + \mu) = C$ tel que A et B deux opérateurs normaux dans $B(H)$, λ et $\mu \in \mathbb{C}$. Sous les conditions du théorème 3.1.1 l'équation admet une solution unique.

Remarque 3.1.1.

Soit A un opérateur dans $B(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. L'opérateur $A + \lambda$ est normal puisque :

$$\begin{aligned} (A + \lambda)^*(A + \lambda) &= (A^* + \bar{\lambda})(A + \lambda) \\ &= A^*A + \lambda A^* + \bar{\lambda}A + \bar{\lambda}\lambda \\ &= AA^* + \lambda A^* + \bar{\lambda}A + \bar{\lambda}\lambda \\ &= (A + \lambda)(A + \lambda)^* \end{aligned}$$

preuve : Si l'équation admet une solution X alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A + \lambda) & 0 \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (A + \lambda) & (A + \lambda)X - X(B + \mu) \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A + \lambda) & 0 \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par conséquent $\begin{pmatrix} (A + \lambda) & 0 \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (A + \lambda) & C \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix}$ sont similaires .

Supposons maintenant que les opérateurs :

$$\begin{pmatrix} (A + \lambda) & 0 \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} (A + \lambda) & C \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix}$$

sont similaires, alors il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ dans $B(H \oplus H)$ tel que

$$\begin{pmatrix} (A + \lambda) & 0 \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A + \lambda) & C \\ 0 & (B + \mu) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (A + \lambda)Q & (A + \lambda)R \\ (B + \mu)S & (B + \mu)T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A + \lambda) & QC + R(B + \mu) \\ S(A + \lambda) & SC + T(B + \mu) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne après l'identification terme par terme

$$Q(A + \lambda) = (A + \lambda)Q \quad \text{et} \quad (A + \lambda)R - R(B + \mu)B = QC.$$

$$(B + \mu)S = S(A + \lambda) \quad \text{et} \quad (B + \mu)T - T(B + \mu) = SC$$

En appliquant la propriété $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fuglede- Putnam) on obtient

$$(B + \mu)S^* = S^*(A + \lambda) \quad \text{et} \quad (A + \lambda)Q^* = Q^*(A + \lambda), \quad \text{par conséquent}$$

$$(A + \lambda)S^*S = S^*S(A + \lambda)$$

d'où $(A + \lambda)$ commute avec S^*S et Q^*Q , donc avec la somme $S^*S + Q^*Q$.

L'inverse $(S^*S + Q^*Q)^{-1}$ commute aussi avec $(A + \lambda)$, car en général si :

$(A + \lambda)$ commute avec $(B + \mu)$, il commute avec $(B + \mu)^{-1}$. En effet

$$(A + \lambda)(B + \mu) = (B + \mu)(A + \lambda)$$

$$\iff (B + \mu)^{-1}(B + \mu)(A + \lambda)(B + \mu)^{-1} = (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)(B + \mu)(B + \mu)^{-1}$$

$$\iff (A + \lambda)(B + \mu)^{-1} = (B + \mu)^{-1}(A + \lambda)$$

De plus on obtient

$$\begin{aligned} (S^*S + Q^*Q)C &= Q^*((A + \lambda)R - R(B + \mu)) + S^*((B + \mu)T - T(B + \mu)) \\ &= ((A + \lambda)Q^*R + (A + \lambda)S^*T) - (Q^*R(B + \mu)T + S^*T(B + \mu)) \\ &= (A + \lambda)(Q^*R + S^*T) - (Q^*R + S^*T)(B + \mu) \end{aligned}$$

D'après lemme (3.1.1)

l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible, son inverse commute avec $(A + \lambda)$.

Par conséquent

$$C = (A + \lambda)(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)(B + \mu)$$

d'où

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)$$

3.2 Solution des équations d'opérateur de temp discrètes

3.2.1 Certains types d'équations d'opérateur :

1 - Equations d'opérateur Sylvester à temps continu et discret :

$$AX \pm XB = \alpha C \tag{3.1}$$

$$AXB \pm X = \alpha C \quad (3.2)$$

2 - Equations d'opérateur de Lyapunov en temps continu et discret :

$$A^*X - XA = \alpha C \quad (3.3)$$

$$A^*XA - X = \alpha C \quad (3.4)$$

Où A , B et C sont des opérateurs donnés définis sur un espace de Hilbert H , X est un opérateur dans H , A^* est l'adjoint de A et α scalaire.

En général, ces équations d'opérateurs peuvent avoir une solution , infinitive ensemble de solutions ou pas de solution .

L'équation de Sylvester à temps discret peut être transformée dans l'équation de l'opérateur Sylvester à temps continu comme suit :

Multiplier l'éq (3.2) à droite par B^{-1} , puis éq (3.2) devient :

$$AXB B^{-1} \pm X B^{-1} = \alpha C B^{-1}$$

$$AX \pm X B^{-1} = \alpha C B^{-1}$$

Soit $CB^{-1} = W$, l'équation ci-dessus devient :

$$AX \pm X B^{-1} = \alpha W \quad (3.5)$$

De plus, l'équation d'opérateur de Lyapunov à temps discret peut être transformée à l'équation d'opérateur de Lyapunov en temps continu comme suit :

Multiplier l'éq (3.4) à droite par A^{-1} , puis éq (3.4) devient :

$$A^*X A A^{-1} - X A^{-1} = \alpha C A^{-1}$$

Soit $CA^{-1} = W$, l'équation ci-dessus devient :

$$A^*X - X A^{-1} = \alpha W \quad (3.6)$$

Théorème 3.2.1 (Sylvester - Rosenblum).

Soient A et W sont des opérateurs dans $B(H)$, tels que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, puis l'équation d'opérateur $AX - XB = \alpha C$ (équation d'opérateur Sylvester à temps continu) a une solution unique X , pour chaque opérateur C dans $B(H)$.

Les corollaires suivants donnent la solution unique pour l'équation d'opérateur (3.5).

Corollaire 3.2.1.

Si A et B sont des opérateurs dans $B(H)$ et B^{-1} existe tel que : $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \emptyset$ alors, l'équation d'opérateur $AX - XB^{-1} = \alpha W$ admet une solution unique X pour chaque opérateur $W \in B(H)$.

Corollaire 3.2.2.

Si A et B sont des opérateurs dans $B(H)$, et B^{-1} existe tel que, $\sigma(A) \cap \sigma(-B^{-1}) = \emptyset$, alors l'équation d'opérateur $AX + XB^{-1} = \alpha W$ admet une solution unique X pour chaque opérateur $W \in B(H)$.

Proposition 3.2.1.

Considérez l'équation (2.5). Si $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \emptyset$, alors l'opérateur $\begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ est défini sur $H_1 \oplus H_2$ est similaire à l'opérateur $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$.

Preuve : Depuis $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \emptyset$, par Sylvester- Théorème de Rosenblum l'équation d'opérateur $AX - XB^{-1} = \alpha W$ admet une solution unique X . De plus

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$ est similaire avec $\begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

Corollaire 3.2.3.

Considérez l'équation $AX - XB^{-1} = \alpha W$ si $\sigma(A) \cap \sigma(-B^{-1}) = \emptyset$ donc, l'opérateur $\begin{pmatrix} A & -\alpha W \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$ est défini sur $H_1 \oplus H_2$ est similaire avec l'opérateur $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^{-1} \end{pmatrix}$.

Remarques 3.2.1.

1- Si la condition $\sigma(A) \cap \sigma(B^{-1}) = \emptyset$ ne parvient pas à satisfaire alors, l'équation d'opérateur $AX - XB^{-1} = \alpha W$ peut avoir aucune solution.

2- Si la condition $\sigma(A) \cap \sigma(-B^{-1}) = \emptyset$, ne parvient pas à satisfaire alors l'équation de l'opérateur $AX + XB^{-1} = \alpha W$ peut avoir aucune solution.

Maintenant, le corollaire suivant donne la solution unique à l'équation d'opérateur (3.6).

Corollaire 3.2.4.

Si A un opérateur dans $B(H)$ et A^{-1} existe. Si $\sigma(A^*) \cap \sigma(A^{-1}) = \emptyset$ alors, éq (3.6) admet une solution unique X pour chaque opérateur W .

Proposition 3.2.2.

Considérez l'équation (3.6) si $\sigma(A^*) \cap \sigma(A^{-1}) = \emptyset$ alors, l'opérateur $\begin{pmatrix} A^* & -\alpha W \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ est défini sur $H_1 \oplus H_2$ est similaire avec l'opérateur $\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

Preuve :

Depuis $\sigma(A^*) \cap \sigma(A^{-1}) = \emptyset$ puis par Sylvester - Rosenblum théorème éq (2.6) a une solution unique . Aussi $\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & -\alpha W \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$ est inversible donc , $\begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ est similaire avec $\begin{pmatrix} A^* & -\alpha W \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$.

3.3 L'équation d'opérateur Quasi - Lyapunov

Considérez l'équation d'opérateur

$$AX + X^*A = W \quad (3.7)$$

Où A un opérateur donné défini $B(H)$ et X est un'opérateur inconnu qui doit être déterminé , X^* est un l'adjoint de X . L' équations (3, 7) est appelée l'équation d'opérateur Quasi-Lyapunov ou l'équation d'opérateur linéaire Lyapunov à temps Quasi continu .

Corollaire 3.3.1.

*L' équations $AX - X^*A = W$ admet un solution X si et selement si, il existe un opérateur P tel que :*

$$P^* \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & W \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

preuve : Si X la solution de l'équation $AX + X^*A = W$ on pose :

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix}, P^* = \begin{pmatrix} I & -X^* \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -X^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W - AX - X^*A & A \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

donc $AX - X^*A = W$. Si $P = \begin{pmatrix} S & R \\ T & Q \end{pmatrix}$ donc $P^* = \begin{pmatrix} S^* & T^* \\ R^* & Q^* \end{pmatrix}$ on applique le propriété de $(FP)_{(B(H))}$ (propriété de Fuglede- Putnam) pour obtenir la solution X .

3.4 La solution en serie pour l'équation $AX - XB = C$ dans $B(H)$

Définition 3.4.1.

Si H l'espace Hilbert, la topologie d'opérateur faible (WOT) sur $B(H)$ est la topologie localement convexe définie par le séminorme $\{p_{h,k} : h, k \in H\}$ où $p_{h,k}(A) = |\langle Ah, k \rangle|$, La topologie d'opérateurs fort (SOT) est la topologie définie sur $B(H)$ par la famille de semi-normes $\{p_h : h \in H\}$, où $p_h(A) = \|Ah\|$.

Soit A un opérateur normal compact. Par théorie spectral, l'opérateur A peut être écrit comme $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_n$. Où $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ sont des valeurs propres distinctes de A et E_n est la projection dans H sur $\ker(A - \alpha_n)$.

Théorème 3.4.1.

Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, tels que

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \quad \text{et} \quad \sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\}$$

où ρ est un nombre réel strictement positif. Alors pour tout opérateur Y dans $B(H)$ l'équation $AX - XB = Y$ admet une solution unique donnée par

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n.$$

observation 3.4.1. Soit $a \neq 0$

$$X = a^{-1} \left(1 - \frac{b}{a}\right)^{-1}$$

Si $|b| < |a|$ on a

$$X = a^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n c = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-1-n} cb^n$$

Théorème 3.4.2.

Soit A, B et C des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert complexe H . Soit A un opérateur normal compact sur H et B un opérateur normal sur H tel que $B = \sum_m \beta_m F_m$ est une somme orthogonale de projection. Supposons $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ alors, $X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n - \beta_m} E_n C F_m$ le unique solution de l'équation $AX - XB = C$.

Preuve : Écrivez $\sigma(A) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$, avec $\lambda_0 = 0$ et $A = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_n$. Soit $E_0 = I - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est la projection de sur le noyau de A .

$$\begin{aligned} AX - XB &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n X F_m \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n X F_m \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m F_m \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_m) E_n X F_m. \end{aligned}$$

Ensuite, l'équation $AX - XB = C$ peut être écrite par

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_m) E_n X F_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n C F_m \\ (\alpha_i - \beta_j) E_i X F_j &= E_i X F_j \end{aligned}$$

pour tous $i, j \in \mathbb{N}$.

Si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ il y a une solution unique.

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n X F_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n - \beta_m} E_n C F_m$$

Proposition 3.4.1.

Soit A, B et C des opérateurs bornés on pose $f_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_m) = p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \dots + p_0$ et $f_A(A) = 0$.

(1) Si X est une solution de $AX - XB = C$, alors

$$X f_A(B) = - \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} p_k A^j C B^{k-j-1}$$

(2) Si $\lambda_i \notin \sigma(B)$ pour tous $i = 1, 2, \dots, m$, alors

$$X = - \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} p_k A^j C B^{k-j-1} \right) (f_A(B))^{-1}$$

et X est la solution unique de $AX - XB = C$.

Preuve : Si $A \in B(H)$ et A sont normaux, il existe une mesure spectrale unique P sur $\sigma(A)$ telle que $A = \int_{\sigma(A)} \lambda dP(\lambda)$. En particulier, pour tous $\varepsilon > 0$ il y a une partition $\{\Delta_i\}$ de $\sigma(A)$ telle que $\sigma(A) = \bigcup_i \Delta_i$ et $\|A - \sum_i \lambda_i P(\Delta_i)\| < \varepsilon$ où $\lambda_i \in \Delta_i$ est choisi arbitrairement. Lorsque P est une mesure spectrale, $P(\Delta_i)$ est la projection pour chaque Δ_i en $\sigma(A)$ et $\sum_i P(\Delta_i) = P\left(\bigcup_i \Delta_i\right) = I$ (inSOT).

Soit $S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\Delta_i)$, $\{S_n\}$ convergent vers A en norme et $\sigma(S_n) = \{\lambda_i\} \subset \sigma(A)$. Soit $f_n(t)$

un polynôme de degré n en t . Définissez

$$f_n(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\dots(t - \lambda_n) = p_n t^n + p_{n-1} t^{n-1} + \dots + p_0$$

alors

$$\begin{aligned} f_n(S_n) &= f_n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P(\Delta_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n f_n(\lambda_i) P(\Delta_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'équation linéaire $S_n X - X B = C$ a une solution unique

$$X_n = - \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{k-1} p_k S_n^j C B^{k-j-1} \right) (f_n(B))^{-1}$$

Théorème 3.4.3.

Soit A, B et C des opérateurs bornés. Si A, B sont des opérateurs normaux et $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Puis X_n converge vers une solution unique de $AX - XB = C$ dans WOT.

Preuve : Nous savons $\|X_n\| \leq \frac{s}{\sigma_n} \|C\| \leq \frac{s}{\sigma} \|C\|$ où $\sigma_n = \text{dist}(\sigma(S_n), \sigma(B))$ et $\sigma = \text{dist}(\sigma(A), \sigma(B))$. Alors $(\frac{s}{\sigma} \|C\|)$ dans $B(H)$ est WOT compact et contient tous les X_n . Supposons maintenant que $\{X_n\}$ ne converge pas vers la solution unique Y dans WOT, puis il y a une sous-séquence $\{X_{n_j}\}$ ne converge pas vers Y . Alors il y a un tel qu'il y a une sous-suite $\{X_{n'_j}\}$ de $\{X_{n_j}\}$ dans W convergeant vers Z dans WOT parce que $(\frac{s}{\sigma} \|C\|)$ dans $B(H)$ est WOT compact et $Y \notin W$. Comme $S_{n_j} X_{n'_j} B$ convergent vers $AZ - ZB$ dans WOT et il existe une solution unique de $AX - XB = C$, nous obtenons $Y = Z$. C'est une contradiction.

3.5 solution d'équation $AXB - XD = E$

Théorème 3.5.1.

Soit A, B, D et E des opérateurs sur l'espace de Hilbert complexe H . Soit A un opérateur normal compact sur H et B un opérateur sur H tel que, $A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i p_i$, $B = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j q_j$ et

$D = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k$ sont des sommes orthogonales des projections. Supposons $\sigma(A) \cap \sigma(B, D) = \emptyset$.

Alors $X = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k}$ est la solution de l'équation $AXB - XD = E$. Ici, la convergence dans la somme est dans SOT.

Preuvr :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i p_i X \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j q_j - X \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k = E$$

multiplier a gauche par p_s et a droit par q_v

$$p_s \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i p_i X \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j q_j q_v - p_s X \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k q_v = p_s E q_v$$

on a : $p_s^2 = p_s$, $q_v^2 = q_v$ (projection)

$$\alpha_s \beta_v p_s X q_v - p_s X q_v \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k = p_s E q_v$$

multiplier a droit par f_r

$$\begin{aligned} \alpha_s \beta_v p_s X q_v f_r - p_s X q_v \lambda_r f_r &= p_s E q_v f_r \\ (\alpha_s \beta_v - \lambda_r) p_s X q_v f_r &= p_s E q_v f_r \end{aligned}$$

si $\alpha_s \beta_v - \lambda_r = 0 \Rightarrow \alpha_s \beta_v = \lambda_r$ ce qui donne $p_s E q_v f_r = 0$ donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_i \beta_j - \lambda_k) p_i X q_j f_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_i E q_j f_k$$

alors si $\sigma(A) \cap \sigma(B, D) = \emptyset$

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_i X q_j f_k \\ X &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} \end{aligned}$$

on pose X la solution d'équation $AXB - XD = E$ on a : $\langle A \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u, v \rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u, A^* v \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\alpha}_i p_i, v \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_i \beta_j p_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u, v \rangle \end{aligned}$$

d'autre parte

$$\begin{aligned} &\langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u, v \rangle \\ &\langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k p_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u, v \rangle \\ &\langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_i \beta_j - \lambda_k) p_i E q_j f_k}{\alpha_i \beta_j - \lambda_k} u, v \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_i E q_j f_k u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=1}^{\infty} f_k E u, v \right\rangle \\ &= \langle E u, v \rangle \end{aligned}$$

donc $AXB - XD = E$.

Chapitre 4

Étudié de nature des solutions d'équations généralisées de Lyapunov

Ce chapitre est consacré à l'étude de la nature des solutions d'équations d'effets mathématiques dans des conditions d'effets liés . Nous avons présenté la nature des solutions d'équations de classe lyapunov .

Cette équation est classée comme un' équation pour les maladies infectieuses et elles peut être exprimées en tant que modèle mathématique pour la maladie de Corona. (COVID 19)

L'équation d'opérateur de la forme :

$$A^*XB + BXA = W \quad (1.4)$$

Où A , B et W des opérateurs définis sur $B(H)$, X est l' opérateur inconnu qui doit être déterminé, et A^* est l'adjoint de A .

L'équation des opérateurs et l'une des généralisations des équations d'opérateurs de Lyapunov en temps continu .

4.1 La nature de la solution d'équation Lyapunov

Maintenant, la nature de la solution plus générale d'équation d'opérateur de Lyapunov en temps continu est étudiée pour des opérateurs de types spéciaux .

Proposition 4.1.1.

Sioent B et W des opérateurs auto-adjoints , l'équation (1.4) admet une seule solution X est également auto - adjoint

Preuve : Considérons l'équation d'opérateur (1.4)

$$\begin{aligned} A^*XB + BXA &= W \\ (AXB + BXA)^* &= W^* \\ A^*X^*B^* + B^*X^*A^* &= W^* \\ A^*X^*B + BX^*A &= W \end{aligned}$$

Puisque $A = A^*$, $W = W^*$ et X est une solution unique. Donc $X = X^*$ (auto-adjoint) .

Proposition 4.1.2.

Soit B un opérateur anti-adjoint, W un opérateur auto-adjoint et A un opérateur dans $B(H)$. Si l'équation (1.4) admet une seule solution alors, cette solution est anti- adjoint.

Preuve : Considérons l'équation de l'opérateur (1.4)

$$\begin{aligned} A^*XB + BXA &= W \\ (A^*XB + BXA)^* &= W^* \\ A^*X^*B^* + B^*X^*A &= W^* \end{aligned}$$

on a $B^* = -B$, $W^* = W$ donc

$$\begin{aligned} A^*X^*(-B) + (-B)X^*A &= W^* \\ A^*(-X^*)B + B(-X^*)A &= W \end{aligned}$$

Puisque X est une solution unique, alors $X = -X^*$, ampplique X anti-adjoint .

Proposition 4.1.3.

Sioent B et W des opérateurs anti - adjoints, A est n'importe quel opérateur . Si l'équation (1.4) admet une seule solution alors, cette solution est également auto - adjoint .

Preuve : Considérons l'équation de l'opérateur (1.4)

$$\begin{aligned} A^*XB + BXA &= W \\ -(A^*XB + BXA)^* &= -W^* \\ -B^*X^*A - A^*X^*B^* &= -W^* \\ A^*X^*(-B)^* + (-B^*)X^*A &= -W^* \\ A^*X^*B + BX^*A &= W \end{aligned}$$

Puisque X est une solution unique, Donc $X^* = X$.

Proposition 4.1.4.

Siot B est un auto-adjoint, W est un anti-adjoint, A est n'importe quel opérateur dans $B(H)$. Si l'équation (1.4) admet une seule solution alors, cette solution est un anti-adjoint .

Preuve : considérer (1.4)

$$\begin{aligned}
 A^*XB + BXA &= W \\
 -(A^*XB + BXA)^* &= -W^* \\
 A^*(-X^*)B^* + B^*(-X^*)A &= -W^* \\
 A^*(-X^*)B + B(-X^*)A &= W
 \end{aligned}$$

Puisque l'équation (1.4) admet une seule solution, donc $X = -X^*$ (anti-adjoint) .

Remarque 4.1.1.

Considérons l'équation (1.4), si A et B sont des opérateurs auto-adjoints, W est n'importe quel opérateur alors, X n'est pas nécessairement auto-adjoint .

Remarque 4.1.2.

Si A et W sont des opérateurs compacts . Si la solution d'équation (4.4) existe, alors cette solution n'est pas nécessairement compacte.

Exemple 4.1.1.

Considérons l'équation d'opérateur suivante

$$A^*XB + BXA = A^*B + BA$$

*Lorsque A et B sont des opérateurs compacts, il est clair que $X = I$ est une solution d'équation d'opérateur $A^*XB + BXA = A^*B + BA$, mais I n'est pas compact.*

4.1.1 Autre d'exemples :

Maintenant, nous étudions la nature de solution d'équation d'opérateurs.

$$A^2X + XA^2 + tAXA = W \tag{2,4}$$

et

$$(A^*)^2X + XA^2 + tAXA = W \tag{3,4}$$

la proposition suivante montre que si A et W sont des opérateurs auto-adjoints et si l'équation (2,4) admet une solution unique , alors la solution est auto-adjoint.

Proposition 4.1.5.

Considérons l'équation (2,4), si A et W sont des opérateurs auto-adjoints alors X est auto-adjoint .

Preuve : Considérer l'équations

$$A^2X + XA^2 + tAXA = W, \quad t \in R$$

$$(A^2X + XA^2 + tAXA)^* = W^*, \quad t \in R$$

$$X^*(A^*)^2 + (A^*)^2X^* + tA^*X^*A^* = W^*.$$

Puisque A et W sont auto-adjoints alors $A = A^*$ et $W = W^*$ donc :

$$X^*A^2 + A^2X^* + tAX^*A = W, \quad t \in R$$

$$A^2X^* + X^*A^2 + tAX^*A = W \text{ alors, } X \text{ en auto-adjoint, } X = X^*.$$

Remarque 4.1.3.

Considérons l'équation (2.4), si A un est opérateur auto-adjoint et W un opérateur dans $B(H)$ alors, la solution X n'est pas nécessaire opérateur auto-adjoint.

Exemple 4.1.2.

Considérons l'équation (2.4) $A = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = 2$. L'équation (2.4) devient $A^2X + XA^2 + 2AXA = W$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Après un calcul simple, la solution d'équation prendre la forme :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \neq X^*, \text{ où } \alpha \text{ n'importe quel nombre arbitraire.}$$

Remarque 4.1.4.

Considérons l'équation (2,4), si A et W sont des opérateurs normaux alors, la solution X n'est pas nécessairement existe.

Exemple 4.1.3.

Considérons l'équation (2,4), $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. On a $A \neq A^*$ (en général A normal, mais n'est pas auto-adjoint) . On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $t = 2$.

Après des simples calculs, nous obtenons

$$\begin{aligned} -2X_2 - 2X_4 = 1 & \quad \text{et} \quad -2X_2 + 2X_3 = -3 \\ -2X_4 - 2X_1 = 1 & \quad \text{et} \quad -2X_3 - 2X_2 = 3 \end{aligned}$$

La question est maintenant pertinente, l'équation (3,4) admet une solution normale. Pour répondre à cette question, considérons l'exemple suivant :

Exemple 4.1.4.

Considérons l'équation (3,4) et prenons $W = 0$, l'équation (3,4) devient :
 $(A^*)^2 X + XA^2 + tAXA = 0$, il est claire que $X = 0$ et 0 est un opérateur normal.

4.2 Solution d'équation $AX - XB = C$ tel que $X = X^*$:

On considéré l'équation matricielle

$$AX + X^*B = C \tag{4,4}$$

l'équation (4,4) admet une solution X si et seulement s'il existe une matrice P tel que :

$$P^* \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

pour démontrer la similarité on pose que X la solution d'équation (4.4) et $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{pmatrix}$

donc $P^* = \begin{pmatrix} I & X^* \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} I & -X^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - AX - X^*B & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

donc $AX - X^*B = C$ ce qui implique la similarité . Si on a la similarité , alors il existe un opérateur $\begin{pmatrix} R & S \\ T & Q \end{pmatrix}$ vérifie $\begin{pmatrix} R^* & T^* \\ S^* & Q^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & S \\ T & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

On applique $(FP_{B(H)})$ (propriété de Fuglede- Putnam) pour obtenir la solution X .

Corollaire 4.2.1.

Soit l'équation (4.4), on pose $A = B$ l'équation (4.4) devient $AX + X^*A = W$.
 Si A , W sont des opérateurs auto-adjoints, la solution X existe et vérifie

$$\begin{aligned} X^*A^* + A^*X &= W^* \\ A^*X + X^*A^* &= W^* \\ AX + X^*A &= W \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1.

Si W est un opérateur auto-adjoint et A n'importe quel opérateur alors, X n'est pas nécessairement auto-adjoint .

Exemple 4.2.1.

soient A, W deux opérateurs dans $B(H)$ tels que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, W$ auto-adjoint pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, X est une solution d'équation
 $AX + X^*A = W$, mais $X \neq X^*$ (la solution n'est pas auto-adjoint).

Corollaire 4.2.2.

Soit l'équation

$$AX - XB = C \quad (*)$$

tel que A, B, C des opérateurs dans $B(H)$. L'équation (*) admet une solution X vérifie $X = X^*$ si et seulement s'il existe une matrice inversible P tel que :

$$P^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
$$P^* \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la démonstration on appliqué la similarité et les étapes d'équation (4.4)

4.3 Nature de la solution d' équation Lyapunov des maladies infectieuses :

On considère l'équation $BXD + CXA = Q$. Si on pose $B = A^*, D = A$ et $C = tA$ tel que $t \in \mathbb{R}$. On a l'équation suivant :

$$A^*XA + tAXA = Q \quad (4,4)$$

l'équation d'opérateur(4.4) est un cas particulier de l'équation générale de Sylvester à temps continu , où A, Q des opérateurs définis sur un espace de Hilbert H , et X est un opérateur inconnu .

Proposition 4.3.1.

Si A, Q sont des opérateurs auto-adjoints et t est un produit scalaire (réel positif) alors, l'équation (4.4) admet une seule solution auto-adjoint.

preuve : Considérons l'équation (4.4) puisque $A^* = A$ et $Q^* = Q$, alors

$$\begin{aligned} A^*XA + tAXA &= Q \\ (A^*XA + tAXA)^* &= Q^* \\ A^*X^*A + tA^*X^*A^* &= Q^* \\ A^*X^*A + tAX^*A &= Q^* \end{aligned}$$

Et comme l'équation (4.4) admet une seule solution X tel que $X^* = X$ donc , X est auto-adjoint.

Remarque 4.3.1.

Si Q est un opérateur auto-adjoint , A est n'importe quel opérateur dans $B(H)$ et t est un produit scalaire, alors la solution de l'équation (4.4) n'est pas nécessairement un opérateur auto-adjoint .

Remarque 4.3.2.

Si A est un opérateur auto-adjoint , Q est n'importe quel opérateur et t est un produit scalaire, alors la solution d'équation (4.4) n'est pas nécessairement un opérateur auto-adjoint .

Proposition 4.3.2.

Si A, Q sont des opérateurs anti- adjoints , t est un produit scalaire (nombre réel positif) alors, l'équation (4.4) admet une seule solution anti-adjoint.

preuve : Considérons l'équation (4.4) puisque $A^* = -A$ et $Q^* = -Q$, alors

$$\begin{aligned} A^*XA + tAXA &= Q \\ -(A^*XA + tAXA^*) &= -Q^* \\ -A^*X^*A - tA^*X^*A^* &= -Q^* \\ A^*(-X^*)A + tA^*(-X^*)A^* &= -Q^* \\ A^*(-X^*)A + t(-A)(-X^*)(-A) &= Q \\ A^*(-X^*)A + tA(-X^*)A &= Q \end{aligned}$$

et puisque l'équation (4.4) admet une seule solution alors, $-X^* = X$ donc X est anti -adjoint.

Proposition 4.3.3.

Considérons l'équation (4.4) , si A est un opérateur compact, alors cette équation est compact.

Preuve : Considérons l'équation (4.4), puisque A est un opérateur compact, alors A^* est compact, donc A^*XA est compact. De plus, A est compact, alors AX est compact et $tAXA$ est compact, puisque A^*XA et $tAXA$ sont compacts, alors $(A^*XA + tAXA)$ compact, donc Q est compact.

Remarques 4.3.1.

1- Si A et Q des opérateurs compacts, t est un n'importe quel produit scalaire alors, la solution X d'équation (4.4) existe et n'est pas nécessairement compacte.

2- Si A et Q sont des opérateurs normaux, t est un n'importe quel produit scalaire, alors la solution X d'équation (4.4) n'existe pas nécessairement.

3- Si Q est un opérateur normal, A est n'importe quel opérateur et t est n'importe quel produit scalaire, alors la solution X de l'équation (4.4) n'est pas nécessairement un opérateur normal.

Les propositions suivantes donnent la solution unique pour l'équation d'opérateur (4.4).

Proposition 4.3.4.

Si A est un opérateur d'identité et Q est n'importe quel opérateur sur $B(H)$ alors, la solution d'équation (4.4) sous la forme $X = \frac{1}{1+t}Q$.

Preuve : Considérons l'équation (4.4), et $A = I$ (l'opérateur identité)

$$A^*XA + tAXA = Q$$

$$I^*XI + tIXI = Q$$

$$X + tX = Q$$

$$(1 + t)X = Q$$

donc

$$X = \frac{1}{1+t}Q$$

Corollaire 4.3.1.

Si A est un opérateur inversible à droite dans $B(H)$, $\sigma(A) \cap \sigma(-tA) = \emptyset$ et Q n'importe quel opérateur dans $B(H)$ et t est n'importe quel produit scalaire alors, l'équation (4.4) admet une solution unique.

Proposition 4.3.5.

Si A est un opérateur auto-adjoint inversible dans $B(H)$, Q est n'importe quel opérateur dans $B(H)$ et t est n'importe quel produit scalaire alors, la solution d'équation (4.4) est

$$X = \frac{1}{(1+t)}A^{-1}QA^{-1}.$$

Preuve : Considérons l'équation (4.4)

$$\begin{aligned}
A^*XA + tAXA &= Q \\
A^{-1}A^*XA + tA^{-1}AXA &= A^{-1}Q \\
IXA + tIXA &= A^{-1}Q \\
XA + tXA &= A^{-1}Q \\
XAA^{-1} + tXAA^{-1} &= A^{-1}QA^{-1} \\
XI + tXI &= A^{-1}QA^{-1} \\
(X + tX) &= A^{-1}QA^{-1}
\end{aligned}$$

donc

$$X = \frac{1}{(1+t)} A^{-1}QA^{-1}$$

Remarque 4.3.3.

soit A un opérateur normal, pour l'existence des solutions d'équations (4.4) on appliqué les travaux de A. Mansour pour l'équation de Sylvester généralisée : $BXD - CXA = CF$. dans ce cas . On pose $B = A^*$, $D = A$, $C = -tA$ et $CF = Q$. et pour la condition de nature du solution $X = X^*$, on étudie le système

$$\begin{cases}
A^*XA + tAXA = Q \\
X = X^*
\end{cases}$$

Ce système peut donner un résultat pour les équations des maladies infectieuses et Corona-covid 19 .

Conclusion

Les équations d'opérateurs matricielles interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques, des sciences physiques, il permet son modèle en science médicale. Dans ce mémoire, nous avons fourni l'action de travail suivante :

*1-la solution d'équation matricielles de type $BX - XA = C$ où A et B sont deux matrices carrées de dimensions différentes dans le cas fini , en donne les travaux de Thomas S. Pomykalski** et le cas générale $BXD + CXA = Q$. Où les solutions se présentent sous forme de sommes fini .*

2- Nous donnons les solutions de l'équation $BX - XA = C$ en $B(H)$ et généralisons l'équation dans le cas de l'écriture l'opérateur de la forme $A + \lambda$, et à différents conditions la solution a été donnée aux deux formules d'équation de Sylvester et LYapunov de l'état continu à l'état discontinu avec la consolidation de la similitude des matrices ainsi que la solution sous la. forme d'une double série et généralisée à une forme plus large de l'équation $AXB - XD = Q$.

*3- Étant donné l'importance de l'équation d'opérateurs , et comme cas particulier, les équations de Lyapunov, nous avons donné la nature des solutions à plusieurs classes d'équations basées sur l'équation $A^*XB + BXA = Q$ Cette équation peut être supprimée sur l'équation d'opérateur pour les maladies infectieuses .*

*$A^*XA + AXA = Q$, connue sous le nom d'équation de Lyapunov, qui peut être modélisée en un'équation utilisée pour la recherche dans le traitement de Corona Covide 19 .*

Perspectives

1- Quelles sont les conditions atteintes par les opérateur A, B, Q ? . La solution de l'équation d'opérateur $A^*XB + BXA = Q$ dans le cas infini, soit être l'opérateur normal dominant.

2- Le cas de l'équation de Lyapunov pour les maladies infectieuses $A^*XA + AXA = Q$ Le plomb infectieux représente l'opérateur inconnu X à trouver, identifié et connu dans les équations de Lyapunov. Quant les opérateur connus (A, Q) dans l'équation, quels sont les symptômes de la maladie, compris le sang, les tissus et autres Les facteurs environnementaux sont connus du patient atteint de cette maladie. Les recherches récentes sur la maladie corona(covid 19) sont-elles des résultats suffisants pour atténuer l'habitude mentionnée ?

Bibliographie

- [1] A. Mansour., 2010, *Solvability of $AXB - CXD = E$ in the operator algebra $B(H)$* , *Lobachevskii journal of mathematics*, vol.31, N3, 257 – 261.S.
- [2] A. Mansour., 2016, *Résolution de deux types d'équations opératoriennes et interactions. 11-équations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lyon, 2016. Français. "NNT : 2016LYSE1151"*.
- [3] Abass-Kuffi., 2014, *The Solutions of Quasi Lyapunov operator Equations* ,*AL-Mansour Journal Issue* (21) .
- [4] A.Emacl., 2006, *"The Nature of The Solution for The Generalization Lyapunov Equations"*, *J. Al-Qadisiyah*, No. 4, Vol. 11.
- [5] A.Schweinsberg ., 1982 , *operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B* , *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 102, No. 2.
- [6] H.Brezis., 1987, *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications*, niLasson Paris New York Barcelone Mi,lan Mexi,co Sao Paulo .
- [7] .H.K.Wimmer., 1977, *On the matrix equation $AX - XB = C$ and $AX - YB = C$* , *SIAM.J.Appl. Math.* 32, 707 – 710 .
- [8] H, Markus., 2006, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkhäuser, Basel. Volume 169. ISBN : 978 – 3 – 7643 – 769 .
- [9] P.R. A.Halmos., 1982, *Hilbert space problem book*, Springer-erlag , New-York , inc.
- [10] J. B.Conway., 1985, *course in functional analysis ,second ed* , *Springer-Verlag New York ,Inc* .
- [11] Lin S.C. and Shaw S. Y., 1988, *" On equations $AX = Q$ and $SX - XT = Q$ "*, *J. Funct. Anal.* , vol.77, pp. 352-363.
- [12] M, Resenblum., 1958, *On a theorem of Fuglede and Putnam*, *J. Lond. Math. Soc.* 33, pp. 376 – 377
- [13] N. Lan., 2001, *On operator Equation $AX - XB = C$ with unbounded operators $A ; B$ and C* , *Abstr. Appl. Maths.* 317-328.

- [14] R.Bhatia., 1997, *Matrix Analysis* , Springer-verlag , newyork , *graduate texts in mathematics* .
- [15] R.Bhatia , P. Rosental., 1997, How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$, Bull. Iondon. Math. Soc. 29,1 – 21 .
- [16] R.Bhatia., 1997, *Analysis*, springer-Verlag, newyork, *Graduate texts in mathematic*.
- [17] S.Dragan , C. Djordjevi., 2007, Explicit solution of the operator equation, Journal of Computational and Applied Mathematics 200, 701704.
- [18] S. Mecheri, A. Mansour., 2009, *On the operator equation $AXB - XD = E$* , *Lobachevskii journal of mathematics*, vol.30, N 3 , 224-228.
- [19] S.Mecheri., 2002, *Finit opérateurs*, *Démonstration Mathématique*, 37 , 357-366.
- [20] S.Thomas., 1997, *Solutions of the Matrix Equation Air Force Inst of Tech Wrisht .Pattersoni aps oh Schoq-afit /Gor/Ma/79D-6*.
- [21] V.S. Sunder., 2014, *Operators on Hilbert space Institute of Mathematical Sciences Madras 600113 ,INDIA*.
- [22] W .Arendt , F. Rabiger., 1994, *Spectral Properties of the operator equation $AX - XB = Q$* , *Quart. J. Math. Arford*, 45 : 2, 133 – 149.

Résumé

Dans cette note, nous avons présenté des solutions pour les équations des effets matriciels de la classe Sylvestre $BX - XA = C$ dans les cas fini et infini selon certaines conditions. Nous avons également présenté la nature des solutions dans des équations particulières de la classe Lyapunov $B^*XA - AXB = Q$ Ces équations ont un grand rôle dans la recherche scientifique car elles ont été classées dans le domaine des sciences médicales avec des équations de maladies infectieuses et ont pris comme modèle de cancer et tombent automatiquement pour la maladie de Corona-Covid 19 en convertissant les équations en équation d'effets de la classe de Lyapunov. Mots clés: Équation des effets de matrice , équation de Sylvester , équation de Lyapunov, nature des solutions pour l'équation des effets et équation des maladies infectieuses.

Abstract

In this note, we have presented solutions for the matrix effects equations of class Sylvestre $BX - XA = C$ in both ended and unfinished cases according to certain conditions. How much we have presented the nature of solutions, especially equations of the class Lyapunov $B^*XA - AXB = Q$ These equations have a large role in scientific research as they were classified in the field of medical sciences with equations of infectious diseases and took as a model of cancer and fall automatically to Corona-Covid 19 disease by converting the equations to the effects equation of the class of Lyapunov.

Keywords: Matrix Effects equation , Sylvester equation, Lyapunov equation, nature of solutions for effects equation and equation of infectious diseases.

المخلص

في هذه المذكرة قدمنا حلول لمعادلات المؤثرات المصفوفية من صنف سلفستر $BX - XA = C$ في الحالتين المنتهية والغير المنتهية وفق شروط معينة . كما قدمنا طبيعة الحلول بالأخص بمعادلات من الصنف ليابنوف $B^*XA - AXB = Q$ وهذه المعادلات لها دور كبير في الأبحاث العلمية حيث صنف في مجال العلوم الطبية بمعادلات الأمراض المعدية وأخذت كنموذج لمرض السرطان وتسقط آليا على مرض كورونا-كوفيد 19 بتحويل المعادلات الى معادلة المؤثرات صنف ليابنوف . كلمات مفتاحية : معادلة المؤثرات المصفوفية , معادلة سلفستر , معادلة ليابنوف , طبيعة حلول معادلة المؤثرات و معادلة الأمراض المعدية .