

République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Sciences et Technologies

Filière: Génie mécanique

Spécialité: Energétique

Thème

Etude numérique de l'échange de chaleur dans un
cylindre soumis aux conditions de Robin

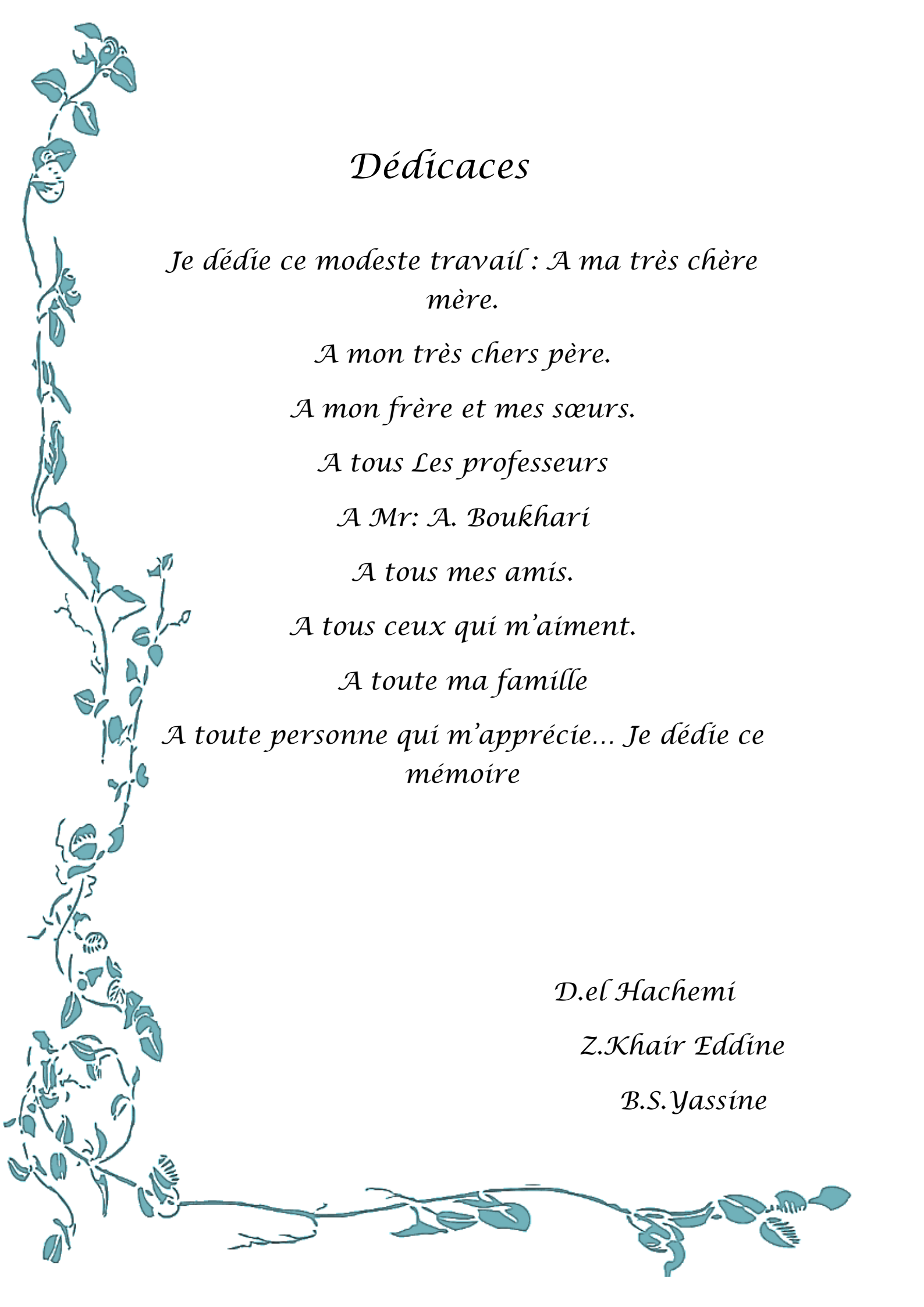
Devant le jury composé de :

..... Président
..... Examineur
..... Examineur
BOUKHARI Ali Encadreur

Présenté par :

- DEGACHI El Hachemi
- ZAHOUANI Khair Eddine
- BEN SEGHIER Yassine

2014-2015



Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail : A ma très chère
mère.*

A mon très chers père.

A mon frère et mes sœurs.

A tous Les professeurs

A Mr: A. Boukhari

A tous mes amis.

A tous ceux qui m'aiment.

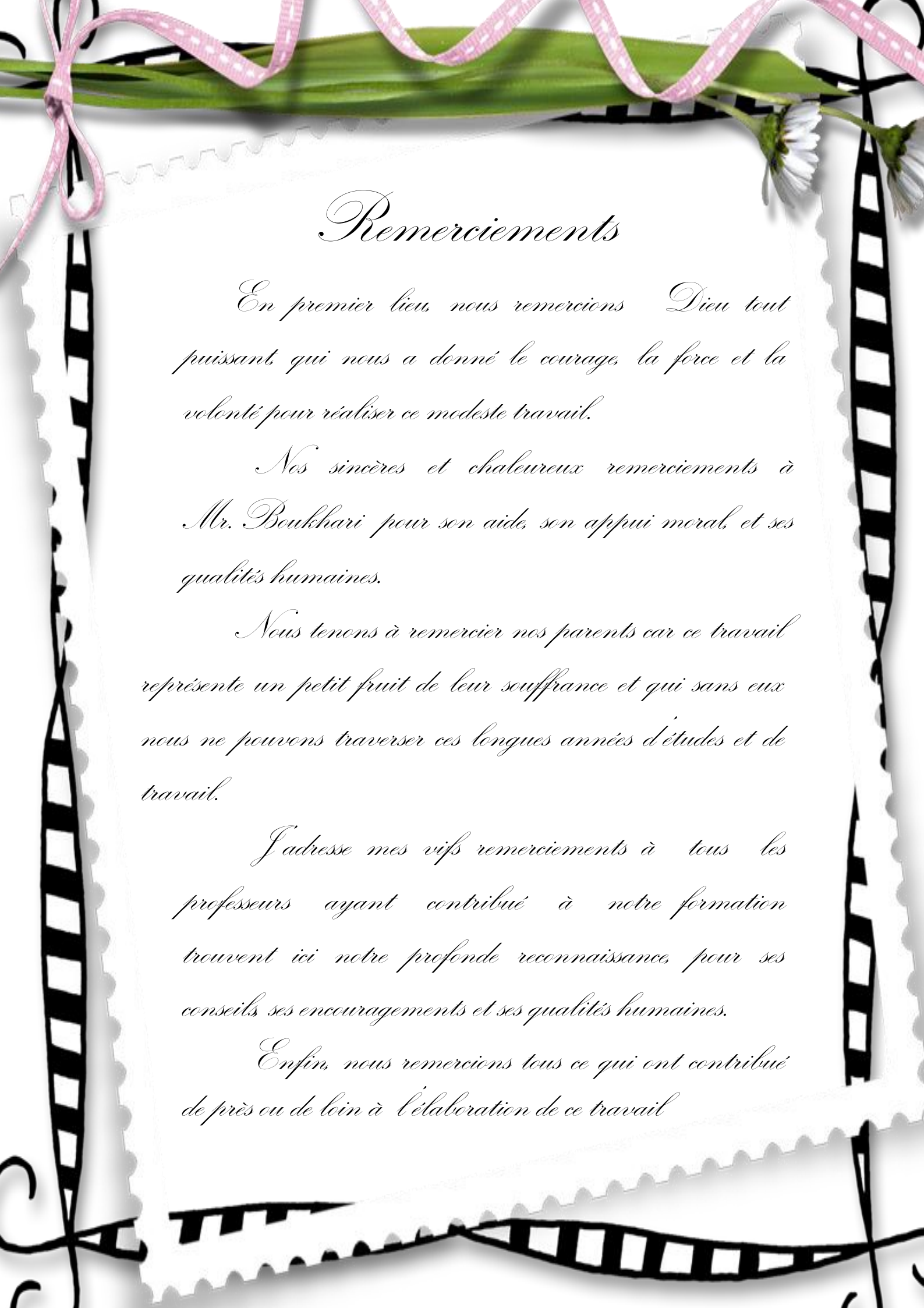
A toute ma famille

*A toute personne qui m'apprécie... Je dédie ce
mémoire*

D.el Hachemi

Z.Khair Eddine

B.S.Yassine



Remerciements

En premier lieu, nous remercions Dieu tout puissant, qui nous a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Nos sincères et chaleureux remerciements à Mr. Boukhari pour son aide, son appui moral, et ses qualités humaines.

Nous tenons à remercier nos parents car ce travail représente un petit fruit de leur souffrance et qui sans eux nous ne pouvons traverser ces longues années d'études et de travail.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les professeurs ayant contribué à notre formation trouvent ici notre profonde reconnaissance, pour ses conseils, ses encouragements et ses qualités humaines.

Enfin, nous remercions tous ce qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail

SOMMAIRE

Nomenclature :	a
Chapitre I : INTRODUCTION	1
I.1 Le transfert de chaleur :	1
I.1.1 La conduction :	2
I.1.2 La convection :	2
I.2 Le système des coordonnées cylindriques :	3
I.3 La condition aux limites de Robin :	3
Chapitre II : MODELE MATHEMATIQUE	5
II.1 Schéma de la géométrie étudiée :	5
II.2 Équation de la chaleur et de la densité du flux thermique :	6
II.2.1 Équation de la chaleur :	6
II.2.2 Conditions aux limites et condition initiale	6
Chapitre III : SOLUTION NUMERIQUE	8
III.1 Méthode de différence finis (MDF) :	8
III.2 Discrétisation et maillage :	8
III.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur sur l'axe de symétrie :	10
III.4 Discrétisation de l'équation de convection (la condition de Robin) :	10
III.5 La méthode de Gauss-Seidel :	11
III.6 Environnement de programmation MATLAB :	11
Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSION	12
IV.1 Cas de l'aluminium :	12
IV.2 Cas de l'acier :	13
IV.3 Cas du verre :	14
CONCLUSION	15
REFERENCES	16
ANNEXE	17
RESUMES	21
• Résumé en arab	21
• Résumé en français	22
• Résumé en anglais	23

Table des figures

Chapitre I :

Fig. 1 : Système de coordonnées cylindriques	3
--	---

Chapitre II :

Fig. 2 : Géométrie du problème étudié	5
---	---

Chapitre III :

Fig. 3 : Maillage du domaine étudié	8
---	---

Fig. 4 : Schéma implicite dans le temps	9
---	---

Fig. 5 : Formule à cinq points	10
--------------------------------------	----

Chapitre IV :

Fig. 6: Profils de la température le long des linges médianes (à $t=5$ s)	12
---	----

Fig. 7: Distributions de la température aux temps indiqués	12
--	----

Fig. 8: Profils de la température le long des linges médianes (à $t=5$ s)	13
---	----

Fig. 9: Distributions de la température aux temps indiqués	13
--	----

Fig. 10: Profils de la température le long des linges médianes (à $t=5$ s)	14
--	----

Fig. 11: Distributions de la température aux temps indiqués	14
---	----

Nomenclature

C	la capacité thermique du matériau (J/Kg.°C)
D	Domaine de calcul
∂D	Frontière du domaine
H	Hauteur du cylindre (m)
h	Coefficient d'échange par convection ($W/m^2\text{°C}$)
i,j	Indices des nœuds
K	Indices du temps
m,n	Nombres de division dans l'espace
r, z, θ	Coordonnées cylindriques
Δr	Pas de division dans la direction radiale (m)
R	Rayon du cylindre (m)
t	Temps (s)
T_0	Température de la base de cylindre (°C)
T_{init}	Température initiale (°C)
T_H	Température du fond du cylindre (°C)
T_∞	Température de fluide de refroidissement (°C)
ΔT	Différence de température (°C)
$\frac{\partial T}{\partial n}$	Gradient de température dans la direction normale
$\frac{\partial T}{\partial r}$	Gradient de température dans la direction radiale
x, y	Coordonnées cartésiennes (m)
ΔZ	Pas de division dans la direction axiale (m)
α	Diffusivité thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$)
λ	Conductivité thermique (W/m.°C)
ρ	Masse volumique du matériau (kg/m^3)

I. INTRODUCTION

Dans l'industrie, l'échangeur de chaleur est un élément essentiel de toute politique de maîtrise de l'énergie et donc, par voie de conséquence, de protection de l'environnement. Une grande part de l'énergie thermique utilisée dans les procédés industriels transite au moins une fois par un échangeur de chaleur, aussi bien dans les procédés eux-mêmes que dans les systèmes de récupération de l'énergie thermique de ceux-ci. Ils sont utilisés principalement dans les secteurs de l'industrie (chimie, pétrochimie, sidérurgie, agro-alimentaire, production d'énergie, ...etc.), du transport (automobile, aéronautique) et dans le secteur résidentiel et tertiaire (chauffage, climatisation, ...etc.). Ils constituent donc un des dispositifs clé du thermicien, et sont un composant quasi inévitable dans la maîtrise de l'énergie.

Ce travail est constitué en une introduction générale et quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une recherche bibliographique sur les transferts de chaleur par conduction et convection, les systèmes de coordonnées utilisées dans l'étude du phénomène et particulièrement les coordonnées cylindriques, les types des conditions aux limites associées aux équations différentielles gouvernants le problème, notamment la condition aux limites de Robin.

La description du phénomène, le modèle mathématique et ses hypothèses simplificatrices, les conditions initiale et aux limites utilisées sont traités dans le second chapitre.

La méthode des différences finies et en particulier la discrétisation implicite des équations sont exposées au troisième chapitre. On y trouve aussi une présentation de la structure du code écrit en langage MATLAB pour résoudre le problème en question.

Les différents résultats obtenus, ainsi que des comparaisons avec les résultats obtenus d'ailleurs, des commentaires et des discussions sont présentés au quatrième chapitre.

Pour finir, une conclusion générale relatant les principaux résultats et le choix du modèle adapté pour ce type de géométrie est présentée, ainsi que les perspectives envisagées pour la poursuite de ce travail.

I.1 Le transfert de chaleur

La chaleur est une forme d'énergie qui s'écoule sous l'effet d'une différence de température des hautes vers les basses températures. La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers et concourt à tous ses phénomènes. L'unité de la chaleur dans le système international est le joule (J).

Le transfert de chaleur représente l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. C'est un phénomène que l'on trouve dans de nombreux secteurs de l'industrie et dans notre vie quotidienne. Les ingénieurs et les techniciens se trouvent confrontés à ce genre de problème ; et essayent de maximiser ou de minimiser ce phénomène selon les besoins de l'industrie et dans le souci d'économiser cette énergie qui revient chère. De ce fait, les transferts thermiques ont, aussi bien dans le domaine des sciences pures que dans celui des applications technologiques, un rôle souvent essentiel. Ce rôle devient même déterminant lorsqu'il est à l'origine des techniques utilisées, exemple : (échangeurs, moteurs thermiques, calorifugeage, isolation thermique.....etc.). La connaissance des lois physiques qui régissent ces modes de

transferts thermiques est une chose essentielle et très importante, car elles nous permettent de maîtriser la façon et la qualité de cet écoulement de chaleur suivant notre désir.

Des connaissances de base de quelques notions préliminaires vont être citées ci-dessous, et qui sont nécessaires pour la compréhension et l'étude de ce phénomène étudié [1].

I.1.1 La conduction

On sait que l'énergie interne d'un corps solide, liquide ou gazeux correspond à l'énergie cinétique de ses éléments constitutants qui se trouvent dans un mouvement permanent (atomes, molécules, électrons libres). la conduction représente le processus de propagation de la chaleur par le contact direct entre les particules d'un corps ou entre des corps ayant des niveaux énergétiques – donc des températures différentes, suite au mouvement de ces particules élémentaires dans le cas des gaz, le transfert thermique par conduction est le résultat de la diffusion élastiques pour les métaux, la conduction est déterminée essentiellement par la diffusion des électrons libres des zones plus chaudes vers les zones plus froides, les oscillations élastiques de la matrice cristalline jouant un rôle mineur. Dans n'importe quel milieu, ce mode de transfert thermique tend à uniformiser la répartition d'énergie cinétique des particules de la substance formant la masse du corps.

La méthode analytique d'étude de la conduction considère les corps qui la subissent comme des milieux continus, en négligent la structure moléculaire de la substance. Cette hypothèse (ou approche) est convenant, compte tenu que, dans le cas général, les corps sous observation sont beaucoup plus grands que leurs particules élémentaires et les distances qui les séparent. Il faut mentionner que la grande majorité des applications techniques fait appel à la conduction thermique dans des corps solides.

I.1.2 La convection

Le phénomène de convection se réfère au transfert thermique qui a lieu dans les fluides (liquides ou gaz) mouvement. La convection est le processus de transfert thermique déterminé par le mouvement des particules élémentaires d'un fluide (liquide ou gaz) entre des zones ayant des températures différentes ; ce mouvement entraîne un mélange intense des particules fluides, qui échangent de l'énergie thermique (chaleur) et de la quantité de mouvement (impulse) entre elles. Ayant toujours lieu dans un milieu fluide, elle a comme caractéristique de base le fait que le transfert de chaleur est étroitement lié au mouvement de ce milieu. La convection peut apparaître entre des couches de fluide ayant des températures différentes ou entre un courant de fluide en écoulement le long d'une surface solide ayant une température différente que celle du fluide. Ce phénomène de la convection est toujours accompagné par le mode de la conduction dans le film mince de fluide adhérent à la paroi solide, à l'intérieur duquel le gradient de température est important. Compte tenu des forces qui produisent le mouvement du fluide, on a deux type de convection : forcée et naturelle ou libre. Dans la convection forcée, le mouvement de fluide est causé par l'action des forces extérieures du processus (par exemple pompe, ventilateur, etc.) qui lui implique des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement du fluide.

La convection naturelle a comme origine le mouvement produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles qui sont froides existant dans un fluide situé dans un champ de forces de volume (par exemple champ de la gravité terrestre). La convection forcée est accompagnée souvent par la convection libre (nommée parfois convection mixte). Les effets de la convection naturelle seront d'autant plus importants que la différence de température entre les particules sera plus grande et que la vitesse du fluide dans la convection forcée sera plus faible. Des exemples typiques pour la convection sont: l'échauffement ou le refroidissement des fluides dans les échangeurs de chaleur, le refroidissement d'un aliment chaud en soufflant à sa surface, la cuisson des aliments dans les fours conventionnels, etc. [2]

I.2 Le système des coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est un système de coordonnées qui étend le système de coordonnées polaires à deux dimensions en y ajoutant une troisième dimension qui mesure la hauteur d'un point par rapport au plan repéré par les coordonnées polaires ; de la même manière que l'on étend le système de coordonnées cartésiennes de deux à trois dimensions. La troisième coordonnée est souvent notée h ou z .

À partir des coordonnées cartésiennes (x, y, z) on peut obtenir les coordonnées cylindriques (r, θ, z) grâce aux formules suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

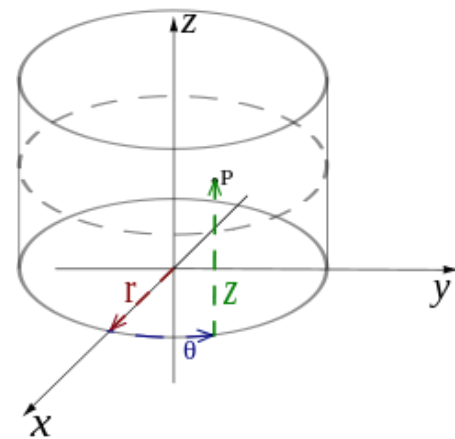


Fig. 1 : Système de coordonnées cylindriques.

I.3 La condition aux limites de Robin

En mathématique, une condition aux limites de Robin (ou de troisième type) est un type de condition aux limites portant le nom du mathématicien français Victor Gustave Robin (1855-1897), qui a travaillé dans le domaine de la thermodynamique[3]. Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine.

Une condition aux limites de Robin est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet (premier type) et d'une condition aux limites de Neumann (deuxième type). Ceci contraste avec la condition aux limites mêlée, constituée de conditions aux limites de types différents imposées chacune sur une partie du bord du domaine. La condition aux limites de Robin est aussi appelée condition d'impédance, en raison de son rôle dans les problèmes d'électromagnétisme.

Si D est un domaine dans lequel une équation doit être résolue, et si $F = \partial D$ désigne le bord (frontière) du domaine, la condition aux limites de Robin est de la forme :

$$a T + b \frac{\partial T}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial D \quad (1)$$

où a , b et g sont des fonctions définies sur ∂D . Ici, T est la solution définie dans D que l'on cherche à déterminer et $\frac{\partial T}{\partial n}$ désigne la dérivée par rapport à la normale extérieure sur la frontière.

En dimension un, si, par exemple, $D = [0, 1]$ la condition aux limites de Robin s'écrit :

$$\begin{aligned} a T(0) - b T'(0) &= g(0) \\ a T(1) - b T'(1) &= g(1) \end{aligned} \quad (2)$$

Remarquons que le signe devant le terme dérivé change selon la partie du bord considérée : la raison est que le vecteur normal à $[0, 1]$ au point 0 pointe vers la direction négative (gauche), tandis qu'en 1 ce vecteur pointe vers les positifs.

II. MODELE MATHEMATIQUE

Différents modèles d'étude du transfert thermique (milieu fini, milieu semi-infini ou milieu infini) sont proposés pour la caractérisation de matériau. Des techniques de mesures permettent ainsi de déterminer des paramètres thermo physiques (conductivité thermique, effusivité thermique, coefficient de diffusivité thermique...)

Nous proposons une étude à deux dimensions en coordonnées cylindriques du transfert thermique dans un matériau de forme cylindrique, de dimensions finies, avec symétrie axiale en régime transitoire.

Les profils des courbes de température et de densité de flux de chaleur permettent de mettre en exergue le transfert de chaleur par convection et conduction à travers le matériau étudié.

II.1 Schéma de la géométrie étudiée :

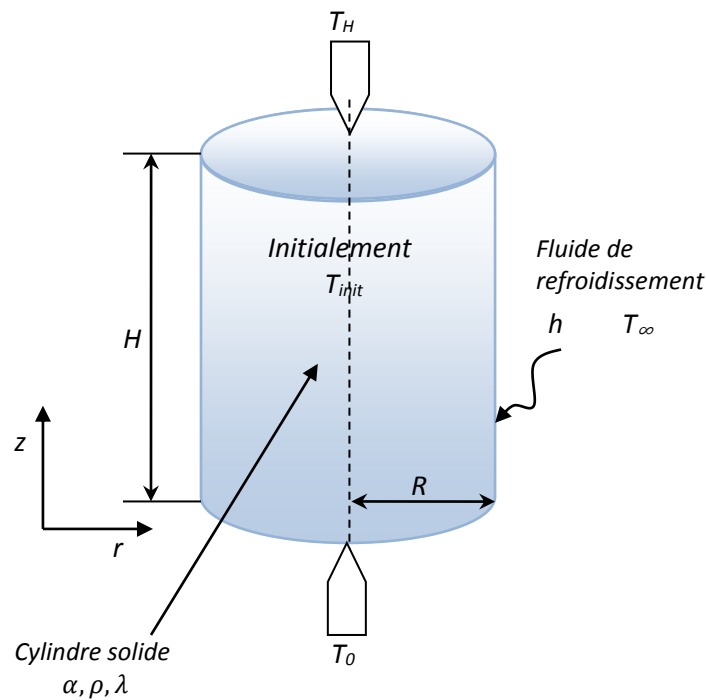


Fig. 2 : Géométrie du problème étudié.

II.2 Équation de la chaleur et de la densité du flux thermique

II.2.1 Équation de la chaleur

Sans source et puits de chaleur, l'équation de la chaleur se résume à l'expression suivante :

$$\Delta T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Avec $\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C}$ est le coefficient de diffusivité thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$)

λ est la conductivité thermique ($W/m \cdot ^\circ C$)

ρ est la masse volumique du matériau (kg/m^3)

C est la capacité thermique du matériau ($J.Kg.^{\circ}C$)

En coordonnées cylindriques à symétrie axiale (la température T ne dépend pas de la coordonnée θ),

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

La résolution de l'équation (3) en régime dynamique fréquentiel, munie des conditions imposées à la figure 1, et en appliquant

La méthode de séparation de variables, conduit à la solution donnée par l'équation suivante:

$$T(r, z, \omega, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(u_j \cdot r) [A_j \sinh(\beta_j z) + B_j \cosh(\beta_j z)] e^{i\omega t}$$

$J_0(\mu_j \cdot r)$ est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

II.2.2 Conditions aux limites et condition initiale

En appliquant les conditions aux limites suivantes:

$$1/ \text{ à } r = 0; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad \text{Axe de symétrie} \quad (5)$$

$$2/ \text{ à } r = R; \quad -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h(T(R) - T_{\infty}) \quad (6)$$

qui représente la convection au niveau de la paroi latérale (Condition de Robin)

$$3/ \text{ à } z = 0; \quad T(0) = T_0 \quad \text{Bord inférieur (Température imposée)}$$

$$4/ \text{ à } z = H; \quad T(H) = T_H \quad \text{Bord supérieur (Température imposée)}$$

Et la condition initiale

$$\text{A } t = 0; \quad T = T_{init}$$

Les tableaux ci-après récapitulent les différentes valeurs utilisées dans ce problème.

Tableau 1 Valeurs utilisées dans les calculs

Quantité	valeur	Unité (SI)
T_{∞}	20	°C
h	1500	W/m ² .°C
T_0	30	°C
T_H	30	°C
T_{init}	55	°C

Tableau 2 Propriétés thermo-physiques des matériaux choisis pour les calculs

	La conductivité thermique (W/m.°C)	La masse volumique du matériau (kg/m ³)	la capacité thermique du matériau (J/Kg.°C)
Aluminum	237	2700	888
Acier	55	7850	465
Verre	0.87	2480	700

III. SOLUTION NUMERIQUE

III.1 Méthode de différence finis (MDF) :

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage [6].

- **Avantages** : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- **Inconvénients** : le principe de conservation n'est pas assuré après la discrétisation, limitation de la géométrie des domaines de calcul, difficultés de prise en compte des conditions aux limites portant sur les dérivées ou les gradients de l'inconnue et en général absence de résultats de majoration d'erreurs.

III.2 Discrétisation et maillage :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

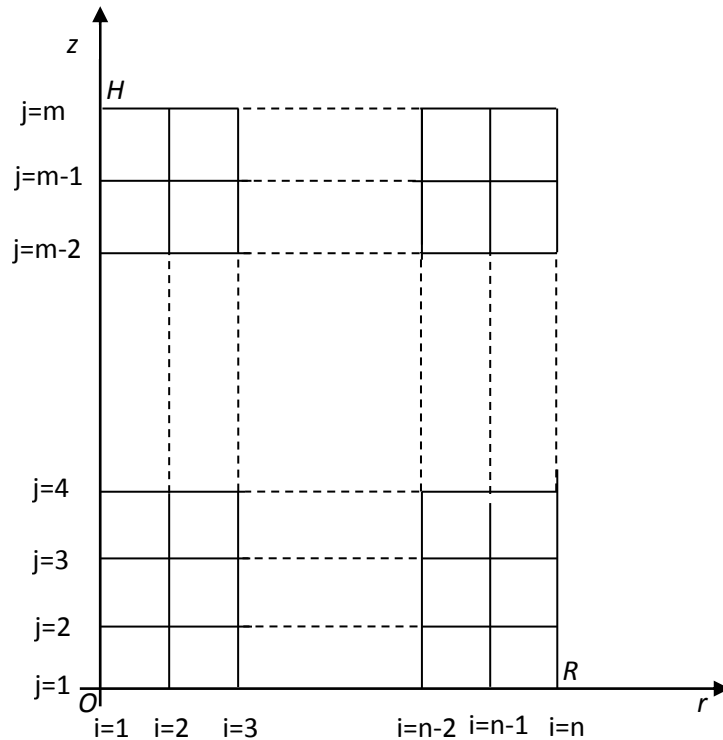


Fig. 3 : Maillage du domaine étudié.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j}^k = \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_{i,i}^{k+1} = \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta r^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Big|_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta r} \quad r_i = (i-1) \cdot \Delta r \quad (10)$$

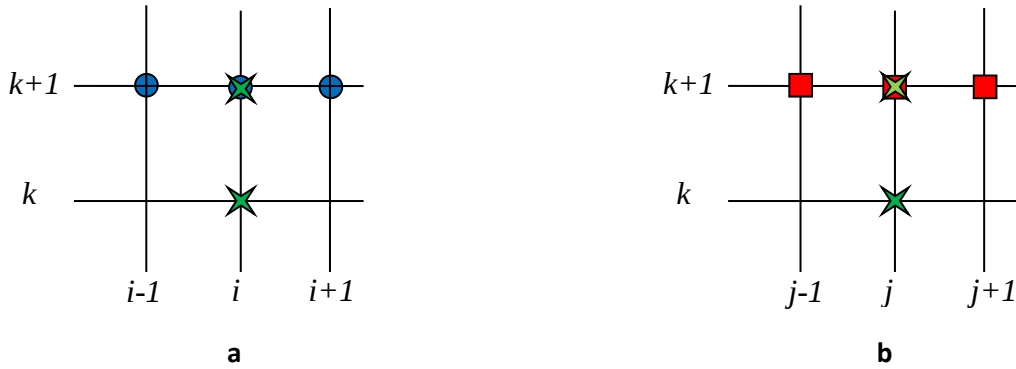


Fig. 4 : Schéma implicite dans le temps.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{(i-1) \cdot \Delta r} \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{2\Delta r} + \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} \quad (11)$$

Ou pose : $A = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta r^2}$; $B = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$

$$T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k = A(T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}) + A \left(\frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1}}{2(i-1)} \right) + B(T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1})$$

Après simplification ;

$$A \left(1 + \frac{1}{2(i-1)} \right) T_{i+1,j}^{k+1} - (2A + 2B + 1) T_{i,j}^{k+1} + A \left(1 - \frac{1}{2(i-1)} \right) T_{i-1,j}^{k+1} + B(T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}) = -T_{i,j}^k$$

On obtient la formule à 5 points, valide pour $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$ et $k > 0$

$$A \left(\frac{2i-1}{2(i-1)} \right) T_{i+1,j}^{k+1} - (2A + 2B + 1) T_{i,j}^{k+1} + A \left(\frac{2i-3}{2(i-1)} \right) T_{i-1,j}^{k+1} + B T_{i,j+1}^{k+1} + B T_{i,j-1}^{k+1} = -T_{i,j}^k \quad (12)$$

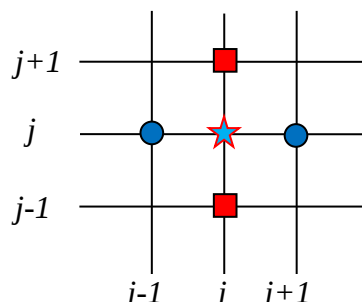


Fig. 5 : Formule à cinq points.

III.3 Discrétisation de l'équation de la chaleur sur l'axe de symétrie :

Sur l'axe de symétrie, on a la condition [6] ; $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$

Mais puisque ce problème est étudié en coordonnées cylindriques possède une symétrie circulaire alors

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Ou a $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ en $r = 0$ (symétrie par rapport à l'origine), ce qui implique que $\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$ prend la forme indéterminée (indéfinie) $\frac{0}{0}$ en ce point.

Utilisons le développement de Maclaurin pour obtenir : $T'(r) = T'(0) + rT''(0) + \frac{1}{2}r^2T'''(0) + \dots$

Mais $T(0) = 0$; donc la valeur limite de $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}\right)$ quand r tend vers zéro est la valeur de $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ en $r = 0$ par conséquent, l'équation de la chaleur en $r = 0$ peut être remplacée par:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \alpha \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

La représentation en différences fines de l'éq. (13) est simplifiée par la condition $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ en $r = 0$ car celle-ci donne $T_{0,j} = T_{2,j}$ donc

$$\frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{1,j}^k}{\Delta t} = \alpha \left(2 \frac{T_{0,j}^{k+1} - 2T_{1,j}^{k+1} + T_{2,j}^{k+1}}{\Delta r^2} + \frac{T_{1,j+1}^{k+1} - 2T_{1,j}^{k+1} + T_{1,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} \right)$$

Se simplifie à :

$$\frac{T_{1,j}^{k+1} - T_{1,j}^k}{\Delta t} = \alpha \left(4 \frac{T_{2,j}^{k+1} - T_{1,j}^{k+1}}{\Delta r^2} + \frac{T_{1,j+1}^{k+1} - 2T_{1,j}^{k+1} + T_{1,j-1}^{k+1}}{\Delta z^2} \right)$$

$$4A(T_{2,j}^{k+1}) + (-4A - 2B - 1) T_{1,j}^{k+1} + B(T_{1,j+1}^{k+1} + T_{1,j-1}^{k+1}) = -T_{1,j}^k$$

$$4A(T_{2,j}^{k+1}) - (4A + 2B + 1) T_{1,j}^{k+1} + B(T_{1,j+1}^{k+1} + T_{1,j-1}^{k+1}) = -T_{1,j}^k \quad (14)$$

III.4 Discrétisation de l'équation de convection (la condition de Robin) :

Sur la paroi latérale, on a la condition de convection [6] : $-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = h(T - T_\infty)$

$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{i=n,j}^{k+1} = -\lambda \frac{T_{n,j}^{k+1} - T_{n-1,j}^{k+1}}{\Delta r}$, en substituant dans l'équation précédente on obtient :

$$-\lambda \frac{T_{n,j}^{k+1} - T_{n-1,j}^{k+1}}{\Delta r} = h(T_{n,j}^{k+1} - T_\infty) \quad (15)$$

III.5 La méthode de Gauss-Seidel :

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution d'un système linéaire (de dimension finie) de la forme $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, ce qui signifie qu'elle génère une suite qui converge vers une solution de cette équation, lorsque celle-ci en a une et lorsque des conditions de convergence sont satisfaites (par exemple lorsque A est symétrique définie). L'algorithme suppose que la diagonale de A est formée d'éléments non nuls. La méthode se décline en une version « *par blocs* ».

Le principe de la méthode peut s'étendre à la résolution de systèmes d'équations non linéaires et à l'optimisation, mais avec des conditions d'efficacité moins claires. En optimisation, l'utilité de cette approche dépendra beaucoup de la structure du problème. Le principe Gauss-Seidel permet aussi d'interpréter d'autres algorithmes [6-7].

- Algorithme de la méthode de Gauss-Seidel :

Pour m=0, maxiterations

Pour i=1,n

$$\varphi_i^{m+\frac{1}{2}} = \left(d_i - \sum_{j<i} a_{ij} \varphi_j^{m+1} - \sum_{j>i} a_{ij} \varphi_j^m \right) / a_{ii}$$
$$\varphi_i^{m+1} = \varphi_i^{m+\frac{1}{2}}$$

FinPour

Test de convergence

FinPour

III.6 Environnement de programmation MATLAB :

MATLAB « *MATrix LABoratory* » est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran. Les utilisateurs de MATLAB (environ un million en 2004) sont de milieux très différents comme l'ingénierie, les sciences et l'économie dans un contexte aussi bien industriel que pour la recherche. MATLAB peut s'utiliser seul ou bien avec des programmes prédéfinis appelés *toolbox* [8].

IV. RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1 Cas de l'aluminium : $\lambda = 237 \text{ (W/m.}^\circ\text{C)}$, $\alpha = 1.1386 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{.s}^{-1}\text{)}$

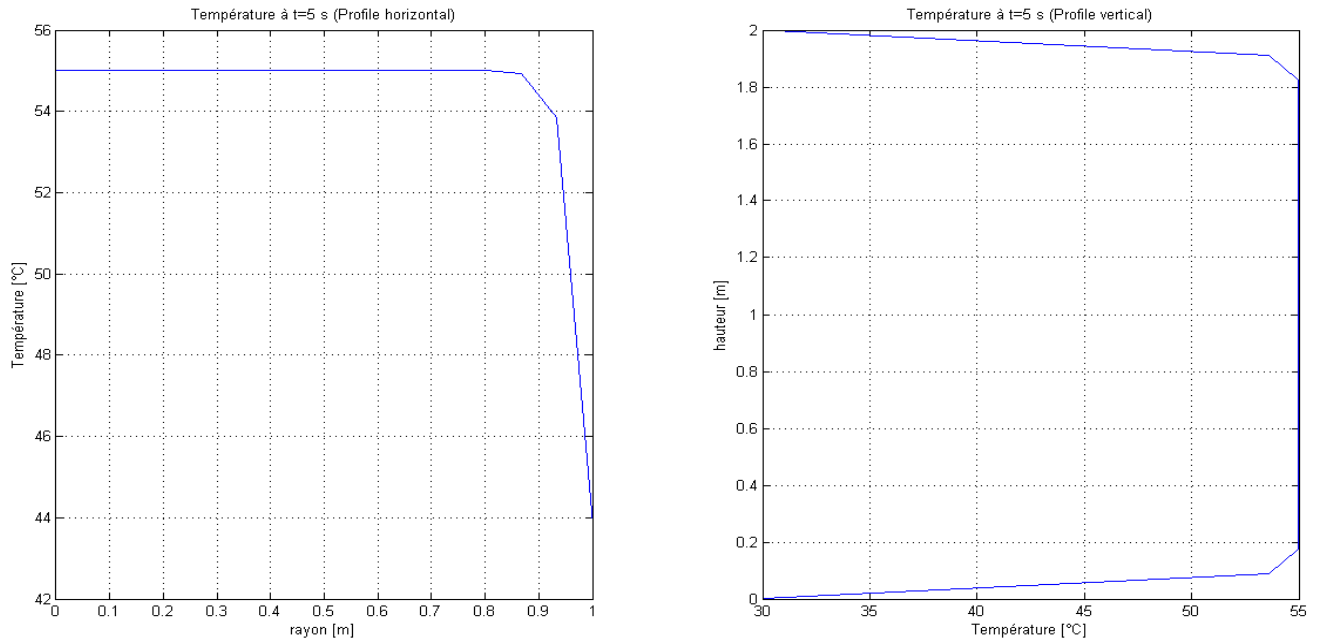


Fig. 6: Profils de la température le long des linges médianes (à t=5 s)

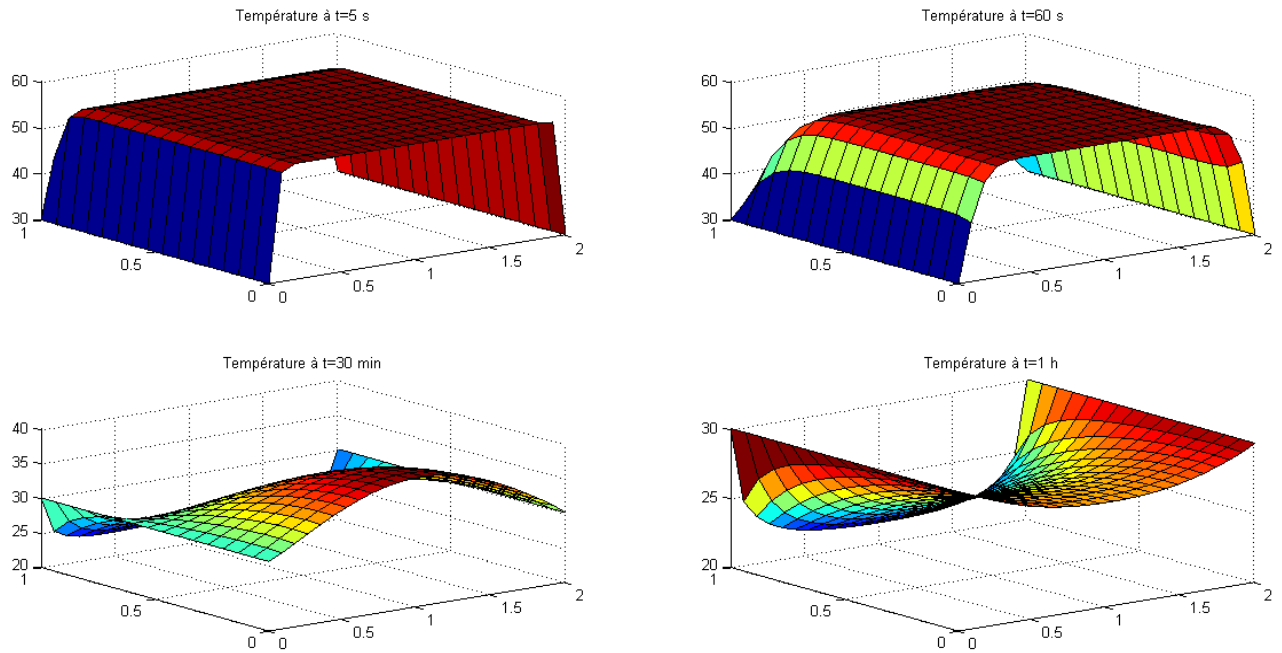


Fig. 7: Distributions de la température aux temps indiqués

Des figs. 6 et 7, pour le cas de l'aluminium on peut constater aisément que le refroidissement commence graduellement à la paroi latérale du cylindre où s'impose la condition de convection (du type Robin). Toutefois, les deux extrémités du cylindre contribuent aussi au refroidissement, mais l'échange de chaleur par convection est plus intense malgré que dans ce cas la conductivité du matériau soit importante ($\lambda = 237 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$).

IV.2 Cas de l'acier : $\lambda = 55 \text{ (W/m.}^\circ\text{C)}$, $\alpha = 1.5067 \times 10^{-5} \text{ (m}^2\text{.s}^{-1}\text{)}$

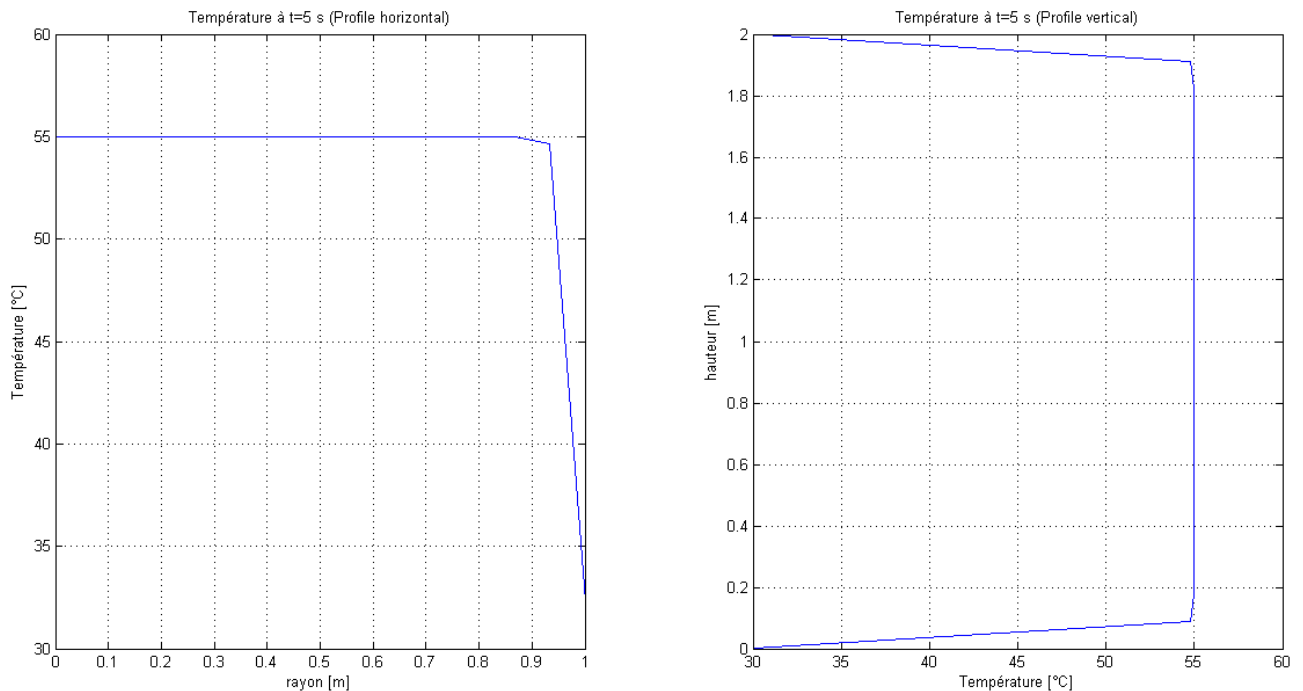


Fig. 8: Profils de la température le long des lignes médianes (à t=5 s)

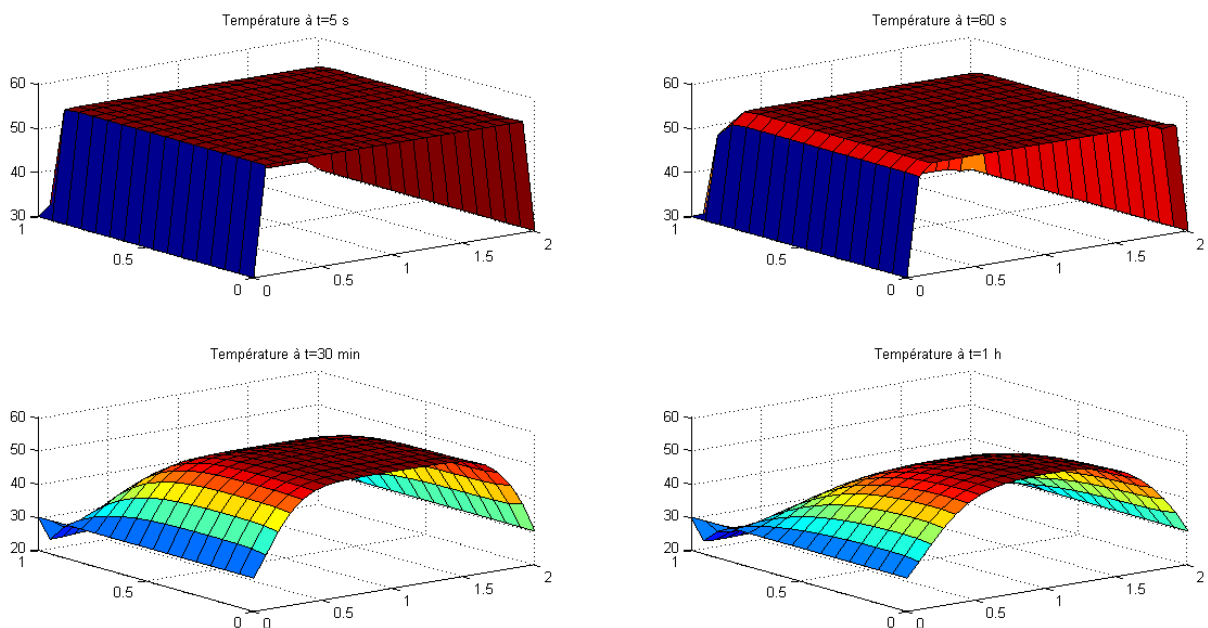


Fig. 9: Distributions de la température aux temps indiqués

On observe aussi des figs. 8 et 9, que pour le cas de l'acier, qui est moins conducteur que l'aluminium, le refroidissement diffuse progressivement au sein du cylindre, en commençant des trois frontières de aux basses températures. La distribution de la température atteindra un état uniforme indiquant que le cylindre a été refroidi au cours du temps.

IV.3 Cas du verre : $\lambda = 0.87 \text{ (W/m.}^\circ\text{C)}$, $\alpha = 5.0115 \times 10^{-7} \text{ (m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$

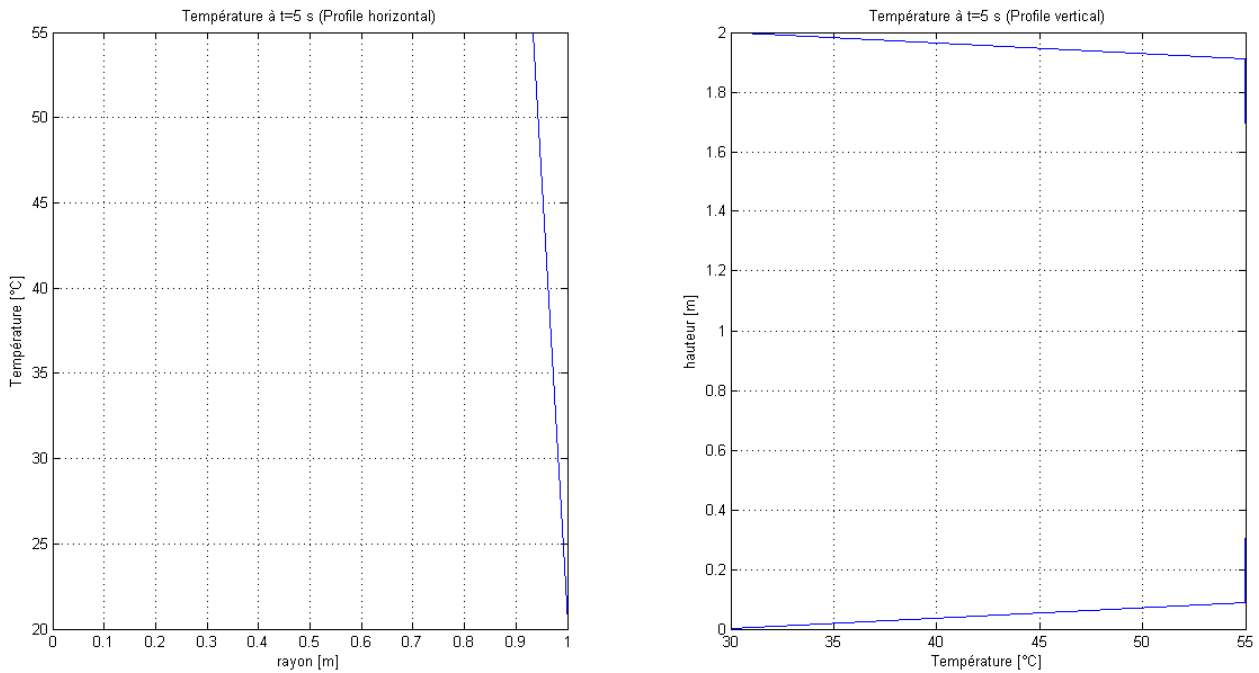


Fig. 10: Profils de la température le long des linges médianes (à $t=5 \text{ s}$)

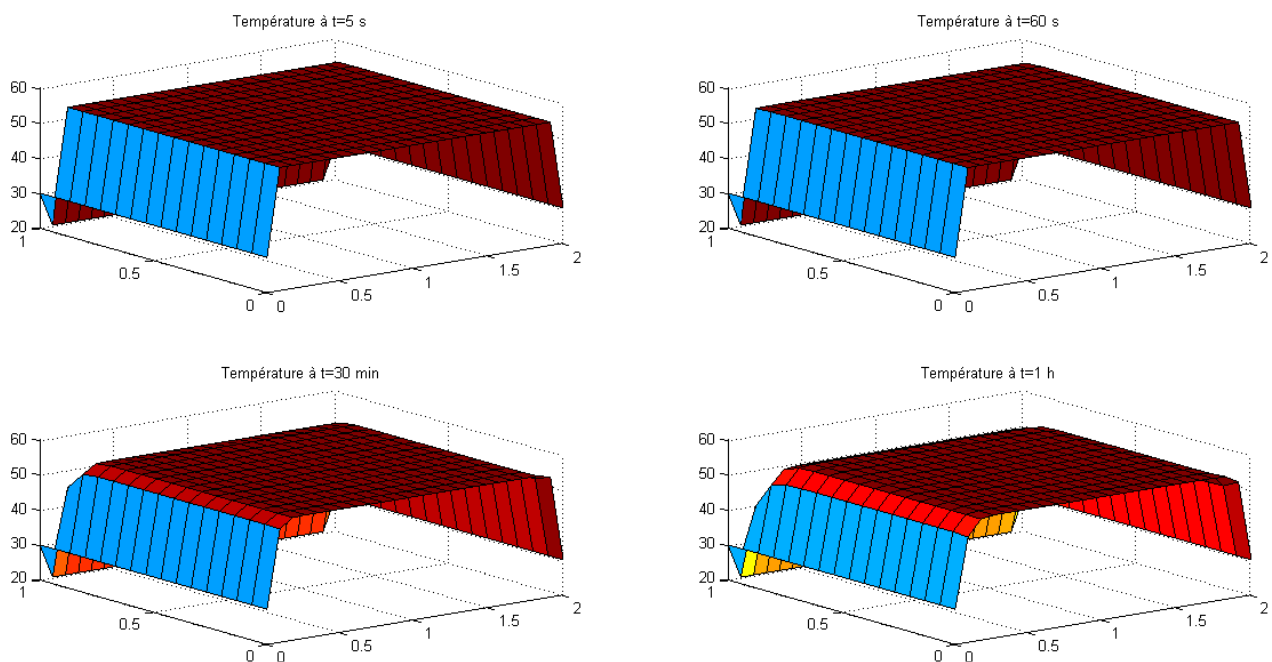


Fig. 11: Distributions de la température aux temps indiqués

Dans le cas du verre, qui présente une faible conductivité comparé aux deux matériaux déjà mentionnés, la diffusion de la chaleur reste modérée malgré que le coefficient d'échange par convection soit élevé ($h = 1500 \text{ W/m}^2\text{C}$), ce qui est conclu d'après les figs. 10 et 11. Et l'état stationnaire de répartition de la température sera atteint après longues périodes du temps.

V. CONCLUSION

La question de minimiser les temps du transfert de chaleur s'impose beaucoup dans l'industrie, notamment dans les échangeurs de chaleur, ce qui la rend un facteur primordial de performance.

On peut conclure à l'issue de cette étude numérique du transfert de chaleur dans un cylindre solide soumis aux conditions de Robin, que l'échange par convection sera plus intense (plus rapide) si la conductivité du matériau (et par conséquent sa diffusivité $\alpha = \lambda/\rho C$) est plus importante. Ce qui illumine la relation entre les deux modes du transfert de chaleur dans matière (la conduction et la convection), où l'échange est considéré d'être effectué selon la loi de convection de Newton.

REFERENCES

- [1] S. Boughali, 'Transfert de chaleur par conduction', Université Kasdi Merbah, 2013.
- [2] A. M. Bianchi, 'Transferts thermiques', Université de la francophonie, 2004.
- [3] K. Gustafson, 'condition aux limites de Robin', Université New york, 2001.
- [4] A. Diouf, 'Transfert de chaleur en régime dynamique fréquentiel dans un matériau cylindrique', Journal des sciences, 2010.
- [5] Y. Janot, 'Transferts thermiques', École des Mines de Nancy, 2012.
- [6] A. Boukhari, 'Notes de cours des différences finies', Université d'El-Oued, 2013.
- [7] D. Pastre, 'Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, gradient, gradient conjugué, optimisation', Université René Descartes, 2002.
- [8] A. J. Casadevall, 'Introduction à MATLAB', Université Paris Dauphine, 2013.

ANNEXE

Programme de calculs par différences finies de l'équation de la chaleur en coordonnées axisymétriques (r, z); en utilisant le schéma implicite.

```
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Université Hamma Lakhdar d'El-Oued
% Faculté des Sciences et Technologie
% Département de Génie Mécanique: option Energétique
% %
% Programme de calcul du transfert de chaleur en coordonnées cylindriques
% par la méthode des différences finies en utilisant le schéma implicite
% dans le temps.
% Et la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système d'équations
% résultant.
% %-----%
% Programme en MATLAB créé par :                               Encadreur: Ali Boukhari
%           - Degachi El Hachemi
%           - Zahouani Khair Eddine
%           - Ben Seghier Yassine
%
%                                           Promotion El-Oued, 2015
%-----%
%
clear all      %effacer les variables mémoire
clc           %nettoyer l'affichage (la sortie)

R=1;          %Rayon du cylindre
n=16;         %nombre d'intervalles axe r dans l'espace
dr=R/(n-1);   %Le pas de discrétisation dans l'espace (delta r)

H=2;          %Hauteur du cylindre
m=24;         %nombre d'intervalles axe z dans l'espace
dz=H/(m-1);   %Le pas de discrétisation dans l'espace (delta z )

dt=0.5;       %Le pas de discrétisation dans le temps (delta t) (schéma
implicite)
alpha=5.0115e-7; % Diffusivité du materiau [m²/s]
lambda=0.87;    %Conductivité thermique [W/m/°C]
h=1500;         %Coefficient d'échange par convection [W/m²/°C]
T_inf=20;       % Température du fluide [°C]

A=alpha*dt/(dr*dr);
B=alpha*dt/(dz*dz);

%   initialisations
T=zeros(n,m,1); % Matrice des températures inconnues
a=zeros(n,m);   % Matrice contenant les éléments de la diagonale
principale
b=zeros(n,m);   % Matrice contenant les éléments de la diagonale
inférieure
```

```

c=zeros(n,m);      % Matrice contenant les éléments de la diagonale
supérieure
e=zeros(n,m);      % Matrice contenant les éléments de la diagonale
inférieure
f=zeros(n,m);      % Matrice contenant les éléments de la diagonale
supérieure
d=zeros(n,m);      % Matrice des constantes

% Condition initiale
for i=1:n
    for j=1:m
        T(i,j,1)=55;
    end
end

% Préparation de l'affichage
hold off
hold on
figure(1)
r=0:dr:R;          % Les coordonnées sur l'axe des r
z=0:dz:H;          % Les coordonnées sur l'axe des z

for k=1:7200        % boucle sur le temps (tf=209*dt)
    % pour i=1
    for j=2:m-1
        % Condition à la limite gauche (axe de symétrie)
        a(1,j) = -(4*A+2*B+1);
        c(1,j) = 4*A;
        e(1,j) = B;
        f(1,j) = B;
        d(1,j) = -T(1,j,k);
    end
    % pour i=2:n-1 ; j=2:m-1
    for i=2:n-1
        for j=2:m-1
            % Les nœuds intérieurs
            a(i,j) = -(2*A+2*B+1);
            b(i,j) = A*((2*i-3)/(2*(i-1)));
            c(i,j) = A*((2*i-1)/(2*(i-1)));
            e(i,j) = B;
            f(i,j) = B;
            d(i,j) = -T(i,j,k);
        end
    end
    % pour i=n
    for j=2:m-1
        % Condition à la limite droite (paroi latérale)
        a(n,j) = (1+ h*dr/lambda);
        b(n,j) = -1;
        d(n,j) = (h*dr/lambda)*T_inf;
    end
end

% Résolution du système linéaire
maxit = 5000; % maximum des itérations
eps = 0.001; % tolérance

```

```

error = 1.;
itr = 1;
Tmp(:, :) = T(:, :, k);
while ((error > eps) && (itr < maxit)) % Boucle pour Gauss-Seidel
    error = 0.;
    % i=1
    for j=2:m-1
        field = (d(1,j) - c(1,j)*Tmp(2,j) - e(i,j)*Tmp(1,j-1) ...
                - f(1,j)*Tmp(1,j))/ a(1,j);
        rsd = abs(field - Tmp(1,j));
        error = max(rsd, error);
        Tmp(1,j) = field;
    end
    for i=2:n-1 % Noeuds intérieurs
        for j=2:m-1
            field = (d(i,j) - b(i,j)*Tmp(i-1,j) - c(i,j)*Tmp(i+1,j) ...
                    - e(i,j)*Tmp(i,j-1) - f(i,j)*Tmp(i,j+1)) ...
                    / a(i,j);
            rsd = abs(field - Tmp(i,j));
            error = max(rsd, error);
            Tmp(i,j) = field;
        end
    end
    % i=n
    for j=2:m-1
        field = (d(n,j) - b(n,j)*Tmp(n-1,j) - e(n,j)*Tmp(n,j-1) ...
                - f(n,j)*Tmp(n,j+1))/ a(n,j);
        rsd = abs(field - Tmp(n,j));
        error = max(rsd, error);
        Tmp(n,j) = field;
    end
    itr = itr+1;
end

T(:, :, k+1) = Tmp(:, :);
T(:, 1, k+1) = 30; % Condition à la limite sud (base du cylindre, T0)
T(:, m, k+1) = 30; % Condition à la limite nord (fond du cylindre, TH)

end
% graphique
subplot(1,2,1); plot(r, T(:, m/2, 10));
title('Température à t=5 s (Profile horizontal)'); grid on
xlabel('rayon [m]'); ylabel('Température [°C]')
subplot(1,2,2); plot(T(n/2, :, 10), z);
title('Température à t=5 s (Profile vertical)'); grid on
xlabel('Température [°C]'); ylabel('hauteur [m]')

[ss, dd] = meshgrid(r, z);

figure(2)
%hold off
subplot(2,2,1); TT(:, :) = T(:, :, 10);
surf(dd, ss, TT); title('Température à t=5 s');
%
```

```

subplot(2,2,2);TT(:,:)=T(:,:,120)';
surf(dd,ss,TT);title('Température à t=60 s');
%
subplot(2,2,3);TT(:,:)=T(:,:,3600)';
surf(dd,ss,TT);title('Température à t=30 min');
%
subplot(2,2,4);TT(:,:)=T(:,:,7200)';
surf(dd,ss,TT);title('Température à t=1 h');
itr % Nombre d'itérations
T   % Solution

```

ملخص

في هذه المذكرة تمت دراسة كيفية انتقال الحرارة بطريقتي النقل و الحمل الحراري في المواد الصلبة المختلفة (الألمنيوم ، الحديد ، الزجاج) و هذه الدراسة تم انجازها في الإحداثيات الاسطوانية عن طريق تطبيق طريقة الفروق المنتهية لحل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية وخوارزمية (غوص-صايدل) لحل جمل المعادلات الجبرية الناتجة، مع وجود شرط حدي من النوع الثالث (شرط روبن) وذلك باستخدام برنامج حسابي يعمل في بيئة برمجة ماتلاب.

Résumé

Dans ce mémoire on a étudié le transfert de chaleur selon les deux modes connus ; la conduction et la convection, dans de différents matériaux solides (Aluminium, Acier et verre), et cette étude était réalisée dans le système de coordonnées cylindriques en appliquant la méthodes des différences finies pour résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles, et la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système des équations algébriques résultant. Avec la présence d'une condition aux limite du troisième type (condition de Robin), ceci était en élaborant un programme de calcul qui fonctionne sous l'environnement de programmation MATLAB.

Abstract

In this work, heat transfer was studied according to two known mechanisms; conduction and convection in different solid materials (aluminum, steel and glass), and the study was performed in the cylindrical coordinate system by applying the finite difference methods for solving partial derivative equations, and the method of Gauss-Seidel to solve the resulting system of algebraic equations. With the presence of a boundary condition of the third kind (Robin boundary condition), this was by developing a computer program that runs on the MATLAB programming environment.