N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur
et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR
EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Intégrale impropre

Présenté par: **Debbar Mabrouka**
Hariz Abdelkader Hana
Necir Chaima

Sous la supervision de :

Dr Ben Ali Brahim

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciements

Aprés au nom de dieu, toutes les salutations et prières soient sur notre prophète.

On tient particulièrment à remercier notre dieu pour son soutien.

Un grand merci à l'encadrement de notre encodreur Dr "**BEN ALI BRAHIM**" à l'université d'**El Oued** qui nous pousse à términer ce travail.

Ainsi qu'à les enseignents de professeurs "**Farah Abdelfatah, Rhouma Abdelhamide, Medekhel Hamza, Douib Bachir, Touati Brahim M Said, Habita Khaled, Doudi Najet, Beloul Said, Niss Khadija",** et à touts les professeurs l'université d'**El Oued**.

On tient à remercier chaleureusement mes parent et toute la famile surtont les frères et les soeures.

Nous tenons a remercie: "**Aicha, Hamas, Mayada, Sara, Radja, Kaltoum, Hayet, Tahani, Khalil, Ali, laid, Imad"** et touts les étudiants de la promotion 2015/2014 de math de l'université d'**El Oued.**

Finalement, mes remerciement chaleureux vont aux personnes qui ont accepté de lire ce travail.

Table des matières

Introduction

Depuis les origines et l'évolution du calcul du différentiel et de l'intégration dans le XVIIe siècle, où les mathématiques se sont développés significativement et à pas de géant, alors on a inventé des nouvelles méthodes afin d'accélérer ce développement. On a utilisé le calcul d'intégration en physique et dans la plupart des branches scientifiques pour résoudre les problèmes scientifiques.

L'intégration d'une fonction en mathématiques est considérée une sorte de généralisation des quantités divisibles comme l'air et le volume .

Le calcul d'intégration c'est de trouver l'origine de la fonction que nous voulons faire son intégration.

Notre objectif dans ce mémoire est l'étude de l'intégrale impropre selon une méthodologie répartie en trois chapitres:

Premier chapitre dans ce chapitre nous avons abordé des généralités sur l'intégrale traitant la définition de l'intégrale de Riemann, la mesure et les fonctions primitives.

Deuxième chapitre dans ce chapitre nous avons abordé la discussion des domaines d'intégrale impropre et ses méthodes de calcul en citant certains critères de convergence et des théorèmes prouvés, on a défini aussi la fonction Gamma et ses propriétés.

Troisième chapitre dans ce chapitre nous avons abordé les applications de d'intégrale impropre dans un probléme physique et un autre de probabilité ainsi ses applications en mathématiques.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Intégrales des fonctions des éscaliers

1.1.1 Fonctions de éscalier

Définition 1.1.1 [4] *On appelle fonction de éscalier sur* $I = [a, b]$, *toute fonction vérifie la condition suivante:*

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ il existe une subdivision $S = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$, avec f est constante sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, la fonction f s'écrit alors :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i I_{[t_i, t_{i+1}[}(x) \tag{1.1.1}$$

Par exemple

$$f(x) = 2I_{[0,2[}(x) - 5I_{[2,4[}(x) + 3I_{[4,5[}(x)$$

$$g(x) = I_{[0,1/2[}(x) + 2I_{[1/2,3[}(x) - 3I_{[3,5[}(x).$$

1.1.2 Sommes de Darboux

Définition 1.1.2 [4] *Soit* f *une fonction de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *bornée. Pour définir son intégrale, on va approcher* f *par des fonctions des éscaliers. Etant donnée une subdivision* S, *on définit des fonctions des éscaliers qui minorent* f *et qui majorent* f. *On a donc*

$$A^{-}_{(f,s)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i I_{[t_i,t_{i+1}[(x)} \tag{1.1.2}$$

Où $m_i = \inf_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x)$ et le majorant est $M_i = \sup_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x)$ on a donc

$$A^{+}_{(f,s)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i I_{[t_i,t_{i+1}[}(x). \tag{1.1.3}$$

On peut approcher par f est

$$\tilde{A}_{(a,f,s)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i) I_{[t_i,t_{i+1}[}(x). \tag{1.1.4}$$

Définition 1.1.3 *Où $\alpha_i \in [t_i, t_{i+1}[\ \forall i \in [0, n-1]$ existe et qui vérifie le minimum de f sur $[t_i, t_{i+1}[$, on obtient la première fonction de éscalier **(1.1.2)**, avec i vérifie le maximum, on obtient la seconde **(1.1.3)**.*

Souvent, on prend $\alpha_i = t_i$ pour tous les $i = \overline{0..n-1}$,$n \in \mathbb{N}$ où $\alpha_i = t_{i+1}$. Et quand la subdivision est uniforme, on considère la fréquence des fonctions dé éscalier suivantes :

$$\tilde{A}_{\left(f,S_{unif}\right)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) I_{\left[a-i\frac{b-a}{n},a+i\frac{b-a}{n}\right[}(x). \tag{1.1.5}$$

Exemple 1.1.1 *On considère ses fonctions des éscaliers pour la fonction $f(x) = \sin x$ est la subdivision$\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$ de $[0,\pi]$.*

Définition 1.1.4 *Etant donnée une subdivision S, on appelle somme de Darboux inférieure à l'intégrale de la fonction de éscalier **(1.1.2)**.*

$$A^{-}(f,s) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (t_{i+1} - t_i) \tag{1.1.6}$$

*On appelle la somme de Darboux supérièure l'intégrale de la fonction en escalier **(1.1.3)***

$$A^{+}(f,s) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i) \tag{1.1.7}$$

toujours avec $m_i = \inf_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x)$ et $M_i = \sup_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x)$.

1.1.3 Fonctions intégrables de Riemann

Définition 1.1.5 *Soit la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que ses sommes de Darboux vérifient :*

$$A^{+}(f,s) - A^{-}(f,s) \leq \varepsilon. \tag{1.1.8}$$

Proposition 1.1.1 [3] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, en prenant* sup *et* inf *sur l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, on a alors*

$$\inf_{s} A^{+}(f,s) = \sup_{s} A^{-}(f,s). \tag{1.1.9}$$

Preuve. En et comme $A^{-}(f,s)$ est croissant quand s satisfait et est bornné par les sommes de Darboux supérieures, $\sup\limits_{s} A^{-}(f,s)$ est bien défini. De même $\inf\limits_{s} A^{+}(f,s)$ est bien définie Puis d'aprés (1.1.8), pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\inf_{s} A^{+}(f,s) - \sup_{s} A^{-}(f,s) \leq \varepsilon$$

D'où l'égalité **(1.1.9).** ■

1.1.4 Intégrale de Riemann

l'intégrale de Riemann de f, Riemann-intégrable est la valeur commune **(1.1.9)** et égalité on a donc :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \sup_{s} A^{-}(f,s) = \inf_{s} A^{+}(f,s). \tag{1.1.10}$$

1.1.5 Intégrales et mesures

Définition 1.1.6 *On appelle intégrale sur le tribu (Ω, Σ), alors toute l'application linéaire continue L telle que $L : \overline{\mathcal{L}}_{+}(\Sigma) \to [0, +\infty[$.*

Proposition 1.1.2 [1] *l'application linéaire continue L telle que $L : \overline{\mathcal{L}}_{+}(\Sigma) \to [0, +\infty[$ possède la propriété suivante:*

1)- $L(0) = 0, \quad L(f+g) = L(f) + L(g); \;\; f_n \uparrow f \Rightarrow L(F_n) \uparrow L(f).$

2)- $L(0) = 0, \quad L\left(\sum\limits_{n} f_n\right) = \sum\limits_{n} L(f_n).$

Définition 1.1.7 *Pour une telle L on a en plus $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ pour $\lambda \geq 0$ et*

$L(f) \leq L(g)$ si $f \leq g$.

On appelle mesure sur Σ toute application $\mu : \Sigma \to [0, +\infty[$ vérifiant l'une ou l'autre des conditions équivalentes :

1)- $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, si $A \cap B = \emptyset$

alors $\mu(A \cap B) = 0$ et donc $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.

2)- Si $\mu(\Phi) = 0, (A_n)_n$ est disjonte alors $\mu(\cup_n A_n) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Ces deux notions des intégrales et des mesures et qu' il existe une correspondance bijective $L \leftrightarrow \mu$ (entre L et μ).

Proposition 1.1.3 [1] *Toute l'intégrale L définit une mesure $\mu = \mu_L$ sur Σ par l'égalité:*

$$\mu(A) = L(I_A).$$

Théorème 1.1.1 [1] ***(Riemann - Lebesgue)****: Soit f une fonction intégrable et bornée sur $[a, b]$. Alors l'intégrale suivante :*

$$I_n = \int_a^b f(x) \exp(2i\pi nx)\, dx \tag{1.1.11}$$

tend vers 0 quand $|n| \to +\infty$.

Démonstration. On établit lorsque f est continûment dérivable sur $[a, b]$, en utilisant une intégration par partie on a alors :

$$I_n = \frac{1}{2i\pi n} \left[f(x) \exp(2i\pi nx)\right]_a^b - \frac{1}{2i\pi n} \int_a^b f'(x) \exp(2i\pi nx)\, dx \tag{1.1.12}$$

d'où la majoration de I_n on a :

$$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi |n|} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)|\, dx \right) \tag{1.1.13}$$

quantité qui tend bien vers 0 quand $|n| \to +\infty$.

On utilise une propriété de densité, admettant que l'ensemble des fonctions contintŭment dérivables sur $[a, b]$ est dense dans $L^1(a, b)$, c'est-à-dire quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe

$g_\varepsilon \in C^1([a,b])$ telle que

$$\int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1.14}$$

On déduit

$$I_n \leq \int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)|\, dx + \left| \int_a^b g_\varepsilon(x) \exp(2i\pi nx)\, dx \right|. \tag{1.1.15}$$

Il existe $N > 0$ telle que la prémière intégrale soit majorée par $\dfrac{\varepsilon}{2}$ des que $|n| \geq N$. On obtient alors $|n| \geq N \Longrightarrow |I_n| \leq \varepsilon$. ■

a) Construction de l'intégrale

Définition 1.1.8 [1] $\Sigma(x, z, \mu)$ *est espace mesuré et* $e = \sum_{i=1}^{n} a_i x_s$ *une fonction positive sur* X *par raport à la mesure* μ *le nombre positive (eventuellement* $+\infty$*) que noté* $\int_x ed\mu$ *défini par*

$$\int_x ed\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(s_i) \tag{1.1.16}$$

e elle est intégrable si $\int_x ed\mu$ est fini.

b) Définition Soit E un ensemble mesurable, on définit l'intégrale de e sur l'ensemble E par :

$$\int_E ed\mu = \int_x e\varkappa d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap S_i). \tag{1.1.17}$$

Pour la fonction caractréstique de E on a :

$$\int_E d\mu = \int_x \varkappa_E d\mu = \mu(E). \tag{1.1.18}$$

c) Comparaison entre l'intégrale de Riemann et de Lebesgue:

Nous admettons $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Nous avons vu qu'une fonction peut être Lebesgue - intégrale sans être Riemann - intégrale par contre, on peut établir le résultat suivant.

Théorème 1.1.2 [1] *Si l'intégrale de Riemann* $\int_a^b f(x)\, dx$ *existe, alors l'intégrale de Lebesgue* $\int_{[a,b]} f d\mu$ *existe. les deux intégrale sont égales.*

Proposition 1.1.4 [1]*Soit* f *fonction positive Riemann-intégrable sur* $[a,b]$, *et telle que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \tag{1.1.19}$$

en tout point où elle est continue.

Preuve. Soit t_0 un point de continuité de f. Si $f(t_0) \neq 0$ alors par continuité de f en t_0, on peut trouver un intervalle I de longueur $L(I) > 0$ où $f(t) \geq t_0/2 > 0$.

Soit g la fonction de éscalier : $g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t_0)}{2} & \text{sur } I \\ 0 & \textit{par ailleur} \end{cases}$

Alors $f \geq g$ et on a donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \frac{L(I)\,f(t_0)}{2} > 0 \tag{1.1.20}$$

ce qui est absurde, on a donc à bien $f(t_0) = 0$. ■

Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann

1- Toute fonction Riemann-intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est borné.

2-Les fonctions continues sont Riemann-intégrables.

3- Les fonctions monotones (croissantes ou décroissantes) sont Riemann-intégrables.

4-Soient a, b deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$,alors pour tout élément c de $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.1.21}$$

Cas particulier:

Si $a = b$ on posera par définition que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.1.22}$$

Nous avans défini la notion d'intégrale, on suppose que $a < b$ et cas contraire où $b < a$.

Définition 1.1.9 *On posera par définition que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1.1.23}$$

Proposition 1.1.5 *Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a, b]$, dans $\mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linèaire.*

Alors $u \circ f$ est Riemann-intégrable et

$$\int_a^b u \circ f(x)\,dx = u\left(\int_a^b f(x)\,dx\right). \tag{1.1.24}$$

Intégrale d'une fonction continue

Définition 1.1.10 *Soient a, b deux nombres réels et f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$, est*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.1.25}$$

1.1.6 L'intégralité de Cauchy-Schwarz

Soient (a, b) deux nombres réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deus fonctions continues. Alors

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right) \tag{1.1.26}$$

Cette rélation est appelée l'intégralité de Cauchy-Schwarz.

1.1.7 Critère de comparaison:

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et supposons qu'il existe un élément c de $[a, b[$, telle que pour tout $x \in [c, b[$, on dit que :

$$0 \leq f(x) \leq g(x). \tag{1.1.27}$$

Alors l'hypothése que $\int_a^b g(x)\,dx$ est finie entraîne que $\int_a^b f(x)\,dx$ finie.
L'hypothése que $\int_a^b f(x)\,dx$ est indefinie entraîne que $\int_a^b g(x)\,dx$ est indefinie.

1.2 Intégrales et primitives

Définition 1.2.1 [2] *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi (si et seulement si)*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.1 *Sur $\mathbb{R}$, une primitive de fonction $f : x \to x$ est fonction $F : x \to \dfrac{x^2}{2}$.*

Proporiétés de primitives 1. F est continue sur I.

2. Si f est continue en $x_0 \in I$, alors F est dérivable en x_0 et l'on a $F'(x_0) = f(x_0)$.

3.Soit F_1, F_2 deux primitives de f. Alors $F_1 - F_2 =$ constante.

1.2.1 Intégrale définie

Définition 1.2.2 [2] *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit la fonction f est une intégrable sur intervalle I telle que :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \tag{1.2.2}$$

où F est une primitive de f sur I.

Exemple 1.2.2

$$\int_0^1 \exp(-t)\,dt = [-\exp(-t)]_0^1 = -\exp(-1) - (-\exp(0)) = 1 - \frac{1}{\exp(1)}$$

1.2.2 Quelques calculs d'intégrales

a) Intégration par parties :

Soit I un intervalle, a, b deux éléments de I , U et V deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle I alors

$$\int_a^b U(t)\,V'(t)\,dt = [U(t)\,V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\,V(t)\,dt. \tag{1.2.3}$$

b) Changement de variable :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit U une fonction de classe C^1 sur I et soit f une fonction continue sur$U(I)$. alors la formule suivante :

$$\int_a^b U'(t) f(U(t))\,dt = \int_{U(a)}^{U(b)} f(y)\,dy. \tag{1.2.4}$$

Exemple 1.2.3 *Soit* $I = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x+1}}{x+1}dx.$

On pose $y = \sqrt{x+1}, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$*donc* $dy = 2ydy;$*telle que* $y \in \left[1, \sqrt{2}\right]$ *puis*

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1+y}{y^2} 2ydy = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{y} + 2\right) dy = [2\ln(y) + 2y]_1^{\sqrt{2}}$$

$$I = \ln 2 + 2\sqrt{2} - 2.$$

Proposition 1.2.1 [2] *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable, alors l'application intégrale $t \to \int_a^b f(x)\,dx$ est continue.*

Preuve. Soit $t_0 \in [a,b]$, et $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, un voisinage de t_0. La fonction f est intégrable et bornée par M sur $[\alpha,\beta]$. Par la relation de Chasles, on a pour tout $t \in [\alpha,\beta]$

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx\right| = \left|\int_t^{t_0} f(x)\,dx\right| \leq M\,|t-t_0| \tag{1.2.5}$$

La restriction de $t \to \int_a^t f(x)\,dx$, à $[\alpha,\beta]$, est donc lipschitzienne et en particulier elle est continue en t_0. ■

Proposition 1.2.2 [2] *Si f admet une limite à droite (resp a gauche) en $t_0 \in [a,b]$, alors l'application intégrale $t \to \int_a^b f(x)\,dx$ est dérivable à droite (resp a gauche) en t_0 de dérivée $L = \lim\limits_{t\to t_0} f(t)$ (resp. $f\left(t_0^+\right), f\left(t_0^-\right)$).*

Preuve. D'aprés l'existence de la limite L en t_0, pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Il existe telle que si $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$, alors $|f(t) - L| \leq \varepsilon$ mais alors pour tout $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, on a (pour $t \geq t_0$) :

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx - (t-t_0)\,L\right| \tag{1.2.6}$$

$$= \left|\int_{t_0}^t f(x)\,dx - \int_{t_0}^t L dx\right| \leq \left|\int_{t_0}^t |f(x) - L|\,dx\right| \leq \varepsilon\,|t-t_0|\,. \tag{1.2.7}$$

Il suit

$$\left|\frac{\int_a^t f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx}{t-t_0} - L\right| \leq \varepsilon \tag{1.2.8}$$

ce qui conclut d'aprés la définition de la dérivée comme limite des taux d'accroissement.

■

1.2.3 Intégrale indéfinie

Définition 1.2.3 [6] *L'ensemble de toutes les primitives de la fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est appelé intégrale indéfinie de* f *et est noté* $\int f dx$.

Ainsi, si F *est une primitive quelconque de* f *, on a* $\int f dx = \{F + C\}$.

Où C *parcourt l'ensemble de toutes les fonctions constantes* $[a, b] \to \mathbb{R}$. *On écrira* $\int f dx = F + C$.

Chapitre 2

Les Intégrales Impropres

Lorsque la limite survante $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe, cette limite est appelée intégrale impropre de la fonction f sur l'intervalle $[a,+\infty[$,on la repésente par $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. On a par définition suivant:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.0.1}$$

2.1 Intégrale impropre d'une fonction

2.1.1 Intégrabilité locale

Définition 2.1.1 [5] *On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui n'est ni vide, ni réduit à un point et qui n'est pas un intervalle fermé borné. On considère une fonction f réelle définie sur I , on supposera f localement intégrable sur I.*

Une fonction f localement intégrable sur I est une fonction intégrable sur tout intérvalle fermé borné contenu dans I .

Par exemple si $I = [a,+\infty[$, cela signifie que, pour tout $x > a$, l'intégrale existe $\int_a^x f(t)\,dt$ ou encore que la fonction $F : x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est définie sur l'intérvalle $[a,+\infty[$.

2.1.2 Intégrale sur un intérvalle semi-ouvert

Définition 2.1.2 [5] *Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ de $\mathbb{R}$ $(-\infty < a \le b \le +\infty)$ On dit que l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ est la limite* *au point b, si elle existe, de la fonction*

$$F : x \to \int_a^x f(t)\,dt \ \ (a \leq x < b) \tag{2.1.1}$$

Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente. De même, si f est localement intégrable sur l'intérvalle semi-ouvert $]a, b]$ $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ est la limite au point a, si elle existe, de la fonction

$$F : x \to \int_x^b f(t)\,dt\,(a < x \leq b)\,. \tag{2.1.2}$$

Dans les deux cas, l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple 2.1.1

$$\int_0^x \exp(-t)\,dt = 1 - \exp(-x)$$

puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(-x) = 0$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t)\,dt = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$$

diverge en effet

$$\forall a, 0 \leq a < 1, \int_0^a \frac{1}{1-x} dx = [-\ln(1-x)]_0^a$$

et la divergence résulte du fait que

$$\lim_{a \to 1} \ln(1-a) = -\infty$$

Théorème 2.1.1 [5] *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$,et prolongeable par continuité en b.*

Alors la fonction $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en b, et on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b, x \prec b} \int_a^x f(t)\,dt. \tag{2.1.3}$$

2.1.3 Intégrales sur l'intérvalle $\mathbb{R}$ tout entier

Définition 2.1.3 [5] *Si pour tout nomber réel c , les intégrales de la fonction f sur $]-\infty, c]$ et sur $[c, +\infty[$, sont convergentes on dit que lintégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ convergente .*

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$, soit convergente est qu'il existe un tel nomber c .

En effet , pour tout couple (c, c') de nombers réels ,

$$\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^{c'} f(t)\,dt + \int_{c'}^x f(t)\,dt. \tag{2.1.4}$$

Il s'ensuit que les intégrales de f sur $[c, +\infty[$ et sur $[c', +\infty[$, sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Il en est de même des intégrales de f sur $]-\infty, c]$ et sur $]-\infty, c']$.

Proposition 2.1.1 [6] *Soit $f \in \mathbb{R}_{loc}([a, b[)$, alors la convergence de l'intégrales de f sur $[a, b[$ est équivalente à celle de l'intégrale de f sur $[c, b[$ avec c un point quelconque l'intérvalle $[a, b[$.*

Preuve. On a :

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt, \forall c \in]a, b[.$$

Donc quand x tend vers b les intégrales de f sur $[a, c]$ et sur $[c, x]$ admettent ou non en même temps une limite.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt.$$

■

2.2 Les méthodes des intégrales impropres

2.2.1 Les cas des foncations à valeurs réelles positives

Définition 2.2.1 [5] *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, à valeur réelles positives alors la fonction f est défénie par la formule$f(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croisante ,rappelons que $f(x)$ admet une linite finie lorsque x tend vers $+\infty$.*

2.2.2 Procédés de calcul des intégrales impropres

Les procédés fondmentaux de calcul des intégrales (chamgement de variable et intégration par parties) s'étendent aisément aux cas des intégrales impropres : il suffit de faire tendre la borne supérieure des intégrales vers $+\infty$.

Changement de variable

Fonction à valeurs réelles continument dérivable et strictement croissante sur $[a, +\infty[$ telle que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty \tag{2.2.1}$$

et f une fonction continue sur l'intervalle $[\varphi(a), +\infty[$, à valeurs réelles aux complexes alors l'intégrales $\int_a^{+\infty} (f \circ \varphi)(t) \varphi(t) \, dt$ et $\int_{\varphi(t)}^{+\infty} f(x) \, dx$ sont toutes deux convergentes au toutes deux divergentes .Dans le prèmier cas elles sont égales :

$$\int_a^{+\infty} (f \circ \varphi)(t) \varphi(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{+\infty} f(x) \, dx. \tag{2.2.2}$$

Intégrale par parties

Soient f et g deux fonctions continument dérivables sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelle au complexes si le produit $f(x) g(x)$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$, les intégrales de fg' et de $f'g$ sur $[a, +\infty[$, sont toutes deux convergentes au toutes deux divergentes. Dans le prèmier cas

$$\int_a^{+\infty} f(t) g'(t) \, dt = [f(t) g(t)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(t) g(t) \, dt \tag{2.2.3}$$

où l'expression entre crochets désigne

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) g(x) - f(a) g(a). \tag{2.2.4}$$

2.3 Convergence d'une intégrale impropre

2.3.1 Critère de Cauchy

Théorème 2.3.1 [6] *Soit f une fonction localement intégrale sur $[a,b[$, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergent ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon) > 0, \forall X_1, X_2 \in [a,b[, \left[X(\varepsilon) < X_1 < X_2 < b \Rightarrow \left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)\,dt\right| < \varepsilon\right] \quad (2.3.1)$$

si $b = +\infty$ alors on remplacera $X_1, X_2 \in]b - X(\varepsilon), b[$,par $X_1, X_2 > X\varepsilon$.

Démonstration. On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ convergente.Cela signifie que la fonction F définie par $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ à une limite que nous noterons L, quand x tend vers b .Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X(\varepsilon)$ tel que les inégalités $X(\varepsilon) < x < b$ entraînent $|F(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.On a donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon) \in [a,b[, \forall X_1, X_2$,tel que $X(\varepsilon) < X_1 < X_2 < b \Rightarrow |F(X_1) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$|F(X_2) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.On déduit $|F(X_2) - F(X_1)| < \varepsilon$ et donc $\left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$.

On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon), \forall X_1, X_2 \in [a,b[, \left[X(\varepsilon) < X_1 < X_2 < b \Rightarrow \left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)\,dt\right| < \varepsilon\right]$$

donc $\varphi(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ vérifie le critère de Cauchy quand x tend vers b,on a :

$$\left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{X_1}^{a} f(t)\,dt + \int_{a}^{X_2} f(t)\,dt\right| = |\varphi(X_2) - \varphi(X_1)| < \varepsilon$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon), \forall X_1, X_2 \in [a,b[, [X(\varepsilon) < X_1 < X_2 < b \Rightarrow |\varphi(X_2) - \varphi(X_1)| < \varepsilon]$$

et donc $\lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ est existe alors $\int_a^b f(t)\,dt$ convergent par définition . ■

2.3.2 Critère de comparaison

Théorème 2.3.2 [6] *Soit $f \in \mathbb{R}_{loc}([a,b[)\,, f \geq 0$.Pour que l'intégrale $\int_a^b f dt$ soit convergente il faut , et il suffit , que la fonction $x \to F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ soit majorée autrement dit si*

$$\exists M > 0, \forall x \in [a,b[: \left[\int_a^x f(t)\, dt \leq M \right]. \tag{2.3.2}$$

Comme $f \geq 0$,la fonction F et croissante, donc a une limite finie quand $x \to b$ ssi F est majorée .

Démonstration. En cas de divergence, on a $\lim\limits_{x \to b} F(x) = +\infty$.

Pour cette raison, on écrit souvent (lorsque $f \geq 0$) $\int_a^b f(t)\, dt = +\infty$ si $\int_a^b f dt$ est divergente, $\int_a^b f(t)\, dt < +\infty$ si $\int_a^b f dt$ est convergente. ■

Théorème 2.3.3 [6] *Soient $f, g \in \mathbb{R}_{loc}([a,b[)$ vérifiant $0 \leq f \leq g$. Alors*

1.$\int_a^b g dt$ est covergente, alors $\int_a^b f dt$ est convergente et $\int_a^b f dt \leq \int_a^b g dt$.

2.$\int_a^b f dt$ est divergente, alors $\int_a^b g dt$ est divergente.

Démonstration. En posant $F(x) = \int_a^x f dt, G(x) = \int_a^x g dt$, on a $F(x) \leq G(x)$ quelque soit $x \geq a$. D'après le théorème **(2.3.2)**.

$\int_a^b g dt$ convergente $\Leftrightarrow$ G majorée $\Leftrightarrow$ F majorée $\Leftrightarrow$ $\int_a^b f dt$ convergente, $\int_a^b f dt$ divergente $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to b} F(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to b} G(x) = +\infty \Leftrightarrow \int_a^b g dt$ divergente. ■

Théorème 2.3.4 [6] *1.L'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$ $(c > 0)$ (converge ssi $p > 1$).*

2.L'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^p}$ (converge ssi $p > 1$).

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} \int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^p} &= \lim_{x \to +\infty} \int_c^x \frac{dt}{t^p} = \lim_{x \to +\infty} \int_c^x t^{-p} dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{(1-p)} t^{(1-p)} \right) \Big|_c^x \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{(1-p)} x^{(1-p)} - \frac{1}{(1-p)} c^{(1-p)} \right) \end{aligned}$$

si $1 - p < 0$ c'est à dir $(p > 1)$ alors $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$ converge , sinon $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$ diverge si $p \leq 1$.

2.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^p} &= \lim_{x \to b} \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^p} = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x (t-b)^{-p} \lim_{x \to b} \left(\frac{-1}{1-p} (b-t)^{(1-p)} \right) \Big|_a^x \\ &= \lim_{x \to b} \left(\frac{-1}{1-p} (b-x)^{(1-p)} \right) - \left(\frac{-1}{1-p} (b-a)^{(1-p)} \right) \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^p}$ converge si $p < 1$ et $p \geq 1$. ■

2.3.3 Convergence absolement

Définition 2.3.1 *Soit $f \in R_{loc}([a, b[)$,on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si l'intégrale$\int_a^b |f(t)|\,dt$ est converge.*

Théorème 2.3.5 [7] *Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.*

Démonstration. L'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente par hypothése . Donc elle vérifie le critére de Cauchy

$$\forall\varepsilon > 0, \exists X_1, X_2 \in [a, b[\,, \left[X(\varepsilon) \leq X_1 \leq X_2 < b \Longrightarrow \int_{X_1}^{x^2} |f(t)|\,dt < \varepsilon\right]$$

comme on a $\left|\int_{X_1}^{X^2} f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt < \varepsilon$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ vérifie aussi le critére de Cauchy , donc elle est convergente. ■

2.3.4 convergence et semi-convergente

Définition 2.3.2 [7] *Soit $f \in R_{loc}([a, b[)$,on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente si l'intégrale$\int_a^b |f(t)|\,dt$ diverge et $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*

2.4 Intégrale impropre dépendant d'un paramètre

On considère ici une fonction de deux variables $f : J \times [a, b[\to \mathbb{R}$

$$(x, t) \to f(x, t)$$

Où J est un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Et $b \leq +\infty$ avec $f(x, .) \in R_{loc}([a, b[)$.

2.4.1 La convergence simple

Définition 2.4.1 [9] *On dit que l'intégrale $F(x)$ converge simplement sur l'intervalle J, si pour chaque $x \in J$, l'intégrale $F(x) = \int_I f(t, x)\,dt$ est convergente , i.e.*

$$\forall x \in J, \forall\varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon, x) > 0 : u \geq A(\varepsilon, x)\,, \textit{on ait } \left|\int_a^u f(t, x)\,dt - F(x)\right| < \varepsilon.$$

2.4.2 La convergence uniforme

Définition 2.4.2 [9] *On dit que l'intégrale $F(x)$ converge uniformément sur l'intervalle J, si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) > 0 : u \geq A(\varepsilon), \forall x \in J, \text{ on ait } \left| \int_a^u f(t,x)\, dt - F(x) \right| < \varepsilon.$$

2.4.3 Convergence normale

Définition 2.4.3 [9] *On dit que l'intégrale $F(x)$ converge normalement sur J, s'il existe une fonction φ indépendante de x, définie et positive sur I, localement intégrable sur I et telle que :*

1. $\forall (t,x) \in E, |f(t,x)| \leq \varphi(t)$.

2. $\int_I \varphi(t)\, dt < +\infty$.

Exemple 2.4.1 *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2} dt$. *La fonction* $f(x,t) = \dfrac{\exp(-xt)}{1+t^2}$ *est défini et continue sur* $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ *, en plus elle est positive. Donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2} dt$ *est une intégrale impropre* $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2} = \begin{cases} 0 & si \quad x > 0 \quad et\ a = 2 \\ +\infty & si \quad x < 0 \quad et\ a = 1 \end{cases}$

pour $x = 0. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2} dt$ *converge pour tout* $\subset [0, +\infty[$ *, donc F est définie sur* $\mathbb{R}^{+}$. *En plus on a* $\forall x \in \mathbb{R}^{+}, \dfrac{\exp(-xt)}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ *et comme* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ *converge alors* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{1+t^2} dt$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}^{+}$.

Remarque 2.4.1 [9] *Convergence normale $\Longrightarrow$ covergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple.*

Et on a également :

Convergence normale $\Longrightarrow$ convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence simple .

2.5 Intégration d'une fonction non bornée définie sur un intervalle borné non fermé

Théorème 2.5.1 [9] *Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle $[a, b[$, $(a < b)$. On suppose f non bornée au voisinage de b , et localement intégrable, ce qui signifie que la fonction $F : x \to \int_a^x f(t)\, dt$ est définie sur l'intervalle $[a, b[$. Quand x tend vers 0.*

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui tend vers $+\infty$, la série de terme général $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ est convergente.

Démonstration. On pose $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ D'après le théorème rappelé ci-dessus, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui tend vers $+\infty$,la suite $(F(x_n))$ définie par $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\, dt$ est convergente, soit encore si et seulement si la suite $(F(x_n))$ est de Cauchy.

On a pour $p > m$ alors

$$F(x_p) - F(x_m) = \int_{x_m}^{x_0} f(t)\, dt = \sum_{k=m}^{n-1} v_k \tag{2.5.1}$$

l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ satisfait au critère de Cauchy, et encore ssi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente. ∎

2.5.1 Intégrale de bertrand

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 et α un nombre réel pour que la fonction $f : x \to \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ soit intégrable sur $[a, +\infty[$, il faut et il suffit que α soit strictement supérieur à 1.

En effet, le changement de variable $X = \ln t$ montre que

$$\int_a^x \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(\ln \alpha)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}}\right) \tag{2.5.2}$$

et que

$$\int_a^x \frac{dt}{t\ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln a)\,. \tag{2.5.3}$$

2.6 Définition fonction $\Gamma(z)$

Définition 2.6.1 [8] *la fonction gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'expression*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt, z > 0. \tag{2.6.1}$$

2.6.1 Propriétés de la fonction Gamma

1-On peut transformer l'intégrale définite $\int_0^{+\infty} \exp(-x)\, x^{\alpha-1} dx$ en une autre, en posant: $\exp(-x) = y$ d'où $\exp(-x)\, dx = -dy$

$x = \log \frac{1}{y}$, et pour $x \in [0, +\infty[$ correspondant à $y \in [0,1]$, on aura immédiatement.

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x)\, x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy \tag{2.6.2}$$

Et en conséquence, on peut poser indifféremment **(3.1.2)**

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy. \tag{2.6.3}$$

2-Les valeurs particuliéres de $\Gamma(1)$ et de $\Gamma(2)$ sont les valeurs de $\Gamma(\alpha)$ pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$,s'obtiennent facilement ,car si l'on remplace ces deux valeurs **(3.1.2)** il vient

$\Gamma(1) = \int_0^1 dy = 1$, et $\Gamma(2) = -\int_0^1 \log(y)\, dy = 1 \Rightarrow \Gamma(1) = \Gamma(2)$.

3-Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)\, x^{\frac{1}{2}-1} dx. \tag{2.6.4}$$

Posons

$$x = z^2 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = z, \text{ et } dz = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \tag{2.6.5}$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) dz \tag{2.6.6}$$

Pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) dz \tag{2.6.7}$$

On peut écrire que

$$A = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) dt \tag{2.6.8}$$

d'où

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) dz \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) dt \tag{2.6.9}$$

le facteur $\exp(-z^2)\, dz$ est une constante qu'on peut inclue dans l'intégrale

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - z^2\right) dt dz \tag{2.6.10}$$

le calcul est plus simple à réaliser si l'on utilise les cordonnées polaires .

On connaît que : $r = \sqrt{t^2 + z^2}$ et l'élément de surface est égale à $rdrd\theta$. Donc

$$A^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} \exp\left(-r^2\right) rdr = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{-\infty} \exp(u)\, du \tag{2.6.11}$$

où

$$u = -r^2, du = -2rdr \tag{2.6.12}$$

$$A^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\exp(u)\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4} \tag{2.6.13}$$

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2A = \sqrt{\pi}. \tag{2.6.14}$$

2.6.2 Définition de la fonction $\beta(u, v)$

Définition 2.6.2 [8] *La fonction bêta $\beta(u, v)$ est définie par*

$$\beta(u, v) = \int_0^1 (1-t)^{v-1}\, t^{u-1} dt, \ \operatorname{Re} u > 0, \ \operatorname{Re} v > 0. \tag{2.6.15}$$

Chapitre 3

Quelques applications sur l'intégrale impropre

Selon notre étude au deuxième chapitre , on a découvert que l'intégrale impropre servit à plusieurs domaines non mathématiques dant on cite : les physiques, les probabilités , les chimies .....etc.

Dans ce chapitre nous intéressons à l'application de l'intégrale impropre en physique et en probabilités .

3.1 Calcul l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right) dt$

Définition de deux fonctions . Pour x réel, posons

$$f(x) = \left(\int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt\right)^2$$

Et puis

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2} dt.$$

la dérivée de f .

La fonctin $t \to \exp\left(-t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $x \to \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus pour x réel

$$f'(x) = 2\exp\left(-x^2\right)\int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt.$$

Dérivé de g. Posons
$$\begin{aligned} \Psi : [0,1]\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Pour tout réel x, la fonction $t \to \dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

Ψ admet sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à x et pour $(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t) = -2x\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right).$$

De plus pour chaque $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto -2x\exp(-x^2(1+t^2))$ est continue sur $[0,1]$ et pour chaque $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto -2x\exp(-x^2(1+t^2))$ est continue sur $\mathbb{R}$.Enfin sur A est un réel positif donné,

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,t)\right| \le 2A\times 1 = 2A = \varphi(t),$$

où φ est une fonction continue et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

g est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\right) dt = -2x\int_0^1 \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right) dt.$$

La fonction $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$.Soit x un réel non nul.En posant $u = xt$;on obtient

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x\int_0^1 \exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right) dt = -2x^2\int_0^1 \exp\left(-(xt)^2\right) d(xt) \\ &= -2\exp\left(-x^2\right)\int_0^x \exp\left(-u^2\right) du = -f'(x) \end{aligned}$$

donc, pour $x\neq 0, (f+g)'(x) = 0$.Cette derinière égalité reste vraie pour $x=0$ par continuité de f' et g' en 0.

Ainsi $(f+g)'=0$ et on en déduit que la fonction $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}$.Mais alors , pour tout réel x,

$$(f+g)(x) = (f+g)(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2} dt.$$

Limite de g quand x tend vers $+\infty$.Soit x un réel positif. Pour tout réel $t \in [0,1]$,on a

$$0 \leq \frac{\exp\left(-x^2\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2} \leq \exp\left(-x^2\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient pour $x \geq 0$,

$$0 \leq g(x) \leq \exp\left(-x^2\right).$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \exp\left(-x^2\right) = 0$,alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Valeur de l'intégrale de Gauss.Pour $x > 0$,

$$\int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)}$$

et puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Remarque 3.1.1 *Générallement*

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-ax^2\right) dx :$$

n	0	1	2	3	4
I_n	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

3.2 Application de physique

Problème 3.2.1 *Les valeurs propres permises de l'énergie de translation d'une molécule de gaz parfait, se déplaçant dans une boîte parallépipédique de dimension a, b, c ,sont:*

$$E = \frac{\pi^2 h^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)$$

tell que K =constante de Boltzmann: $k = 1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{{}^0K}$, h =constante de Blauc , m =la masse , E =l'énergie.

Quelle est la valeur de la fonction de partition Z de ce mouvement à la température T ?

Solution 3.2.1 *La fonction de partition Z de ce mouvement de translation est :*

$$Z = \sum_{n_x, n_y, n_z = 0} \exp\left[-\frac{E}{KT}\right].$$

Comme $\pi^2 h^2 = \dfrac{h^2}{4}$*,l'expression de l'énergie totale de la molécule s'écrit:*

$$E = \frac{h^2 n_x^2}{8ma^2} + \frac{h^2 n_y^2}{8mb^2} + \frac{h^2 n_z^2}{8mc^2}.$$

Donc,

$$Z = \sum_{n_x=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{h^2 n_x^2}{8ma^2 KT}\right] \times \sum_{n_y=0} \exp\left[-\frac{h^2 n_y^2}{8mb^2 KT}\right] \times \sum_{n_z=0} \exp\left[-\frac{h^2 n_z^2}{8mc^2 KT}\right].$$

A l'aide d'un exemple numérique quelconque , on constate que:
$A = \frac{h^2}{8ma^2KT} \ll 1$ *de même* $B = \frac{h^2}{8mb^2KT} \ll 1$ *et* $C = \frac{h^2}{8mc^2KT} \ll 1.$
On peut par conséquent,remplacer les sommes par des intégrales :

$$Z = \int_{n_x=0}^{n_x=\infty} \exp\left(-An_x^2\right) dn_x \int_{n_y=0}^{+\infty} \exp\left(-Bn_y^2\right) dn_y \int_{n_z=0}^{+\infty} \exp\left(-Cn_z^2\right) dn_z.$$

Chaque intégrale est de la forme:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

(voir remarque **(3.1.1)**).

On en déduit:

$$Z = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sqrt{\frac{\pi}{A}}\sqrt{\frac{\pi}{B}}\sqrt{\frac{\pi}{C}}.$$

Solution 3.2.2 *En remplaçant A, B et C par leurs expressions, on obtient, enfin :*

$$Z = \frac{1}{2^3}\left(\frac{8\pi mKT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} a.b.c$$

ou

$$Z = \frac{1}{2^3}\left(\frac{8\pi mKT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V$$

$v = a.b.c$ étant le volume de la boîte.

3.3 Application de probabilité

Définition 3.3.1 *(**La répartition normale**) On dit qu'un variable aléatoire subit à la répartition normale si sa densité de répartition probabilité est définie comme suite :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right); \qquad -\infty < x < +\infty$$

telle que :

$\pi = 3.14$ $(constante)$

$\exp = 2.7183$ $(constante)$

σ : *paramétre égal à l'écart-type .*

a : *paramétre égal à l'espérance mathématique .*

On en note par $x \in N(a, \sigma)$ et qui vérifié la condition de la densité de répartition de probabilité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right) dx$$

On pose $t = x - a = \sigma t \Rightarrow x = a + \sigma t$ et $dx = \sigma dt.$

En substituant, on trouve:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1.$$

3.4 Calcul de l'intégrale de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \exp(-x)\, dx$

Remarquons d'abord qu'on ne peut calculer directement cette intégrale, étant donné que la primitive de la fonction $\exp(-x) \dfrac{\sin(\alpha x)}{x}$ n'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires. Pour calculer cette intégrale, on la considérera comme fonction du paramètre α

:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx \tag{3.4.1}$$

on dérivie les deux parties de (3.4.1) on obtient

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left[\exp(-x) \frac{\sin(\alpha x)}{x}\right]_\alpha' dx = \int_0^{+\infty} \exp(-x) \cos(\alpha x)\, dx.$$

qui égal:

$$= \frac{1}{\alpha} \exp(-x) \sin(\alpha x)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \exp(-x) \sin(\alpha x)\, dx$$

par suite:

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} - \exp(-x) \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \cos(\alpha x)\, dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \cos(\alpha x)\, dx \end{aligned}$$

en creie

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x) \cos(\alpha x)\, dx + \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \exp(-x) \cos(\alpha x)\, dx + \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} \exp(-x) \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha^2}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x) \cos(\alpha x)\, dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

on a

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$I(\alpha) = \arctan(\alpha) + c. \tag{3.4.2}$$

Reste à déterminer c . Remarquons à cet effet que

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \exp(-x) \frac{\sin(0.x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0.$$

Par ailleurs , $\arctan(0) = 0$.Substituant $\alpha = 0$ dans l'égalité **(3.4.1)** ,on trouve:

$$I(0) = \arctan(0) + c$$

donc $c = 0$. On a donc pour toute valeur de α l'égalité suivante

$$I(\alpha) = \arctan(\alpha)$$

Exemple 3.4.1 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}$

On pose $U = \tan \frac{t}{2} \Longrightarrow t = 2 \arctan U = \varphi(U)$ *telle que* $\varphi \in C^1$ *de* $[0, +\infty[$ *sur* $[0, \pi[$ *et la fonction* $f : t \to \dfrac{1}{2 + \cos t}$ *est contunue sur* $[0, \pi[$ *donc on peut appliquer le théorème de changment de variable: pour*

$$U = \tan \frac{t}{2}; \cos t = \frac{1 - U^2}{1 + U^2}; \quad \sin t = \frac{2U}{1 + U^2}; \quad dt = \frac{2U}{1 + U^2}$$

donc:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + \dfrac{1 - U^2}{1 + U^2}} \frac{2dU}{1 + U^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3 + U^2} dU \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{U}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] **Claude Gasquet et Patrick Witomski;** Analys de fourier et application.

[2] **Gabriel Baudrand;** Mathematique: Résumes du caurs ece 1^{re} et 2^{e} anneés, 2008.

[3] **Henri Leon Lebesgue;** Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au collége de fronce, 2009.

[4] **Jean-Chritophe Breton;** Intégrale de Riemann, septembre-décembre 2009.

[5] **J.Quint;** Caurs éléméntaire de mathematiques supérieures, 1976.

[6] **Kada Allab,** Éléments d'analyse,OPU,2002.

[7] **Matthieu Alfaro;** Glma 302, analyse 3, 25 october 2012.

[8] **Robert Campbell;** Lesintégrales ulériennes, 1966.

[9] **V.Smirnov;** Cours de mathématique athématique supérieures, Tome 2, office des publications universitaires 1, Place Centre de Ben Aqnune(Alger).