

N° d'ordre :  
N° de série :



**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA**  
**RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE D'EL-OUED**  
**FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE**  
**Département D'électronique**

**Mémoire de fin d'étude présenté Pour l'obtention du diplôme de**

# **LICENCE ACADEMIQUE**

Domaine : **Sciences et techniques**  
Filière : **Electronique**  
Spécialité : **Télécommunications**

Présenté par :

**YOUCEF Hicham**

**BENYAYA Idris**

## **Compression d'image par ondelette géométrique : les ridgelet**

Déposé le : 1-06- 2014

Au niveau du jury composé de :

M.	.....	MA	Président
M.	.....	MA	Examineur
M.	<b>HIMA Abdelkader</b>	MA	Directeur du mémoire

**Année 2013-2014**

# ***Remerciement***

*Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant de m 'avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier très chaleureusement, Monsieur HIMA Abdelkader qui m'a permis de bénéficier de son encadrement.*

*Je tiens à remercier également, tous ceux qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette recherche.*

# DEDICACE

*Je dédie ce travail à :*

*A celle qui a inséré le goût de la vie et le sens de la  
responsabilité....merci MÈRE.*

*A celui qui a été toujours la source d'inscription  
et de courage .....merci PÈRE.*

*A mes frères et mes sœurs.*

*A mes amis de la promotion.et a tous mes amis surtout*

*HOUSSSEM , AMINE , BACHIR, ABDELLEAH*

*HICHAM*

# Résumé :

Ce travail consiste en l'étude des nouvelles techniques de représentation des images, dites ondelettes géométriques. Comme son nom l'indique ces techniques sont basées sur les ondelettes, mais permettant une amélioration de la représentation par cette dernière. On commence notre mémoire par l'étude de l'analyse par ondelettes, ces caractéristiques et ces limitations. On étudie ensuite les méthodes basées sur la géométrie, en prend l'exemple des Ridgelets.

On fait ensuite une étude détaillée sur les Ridgelets. Cette technique utilise la transformée de Radon suivie par la transformée en ondelettes monodimensionnelle. La transformée de Radon permet la détection des lignes, et la transformée en ondelettes est appliquée ensuite pour la meilleure décorrélation.

## **Mots –clés**

Transformée en ondelette, les ondelettes géométriques, transformée de radon, la transformée en ridgelet,.

# Abstract :

This work is the study of new techniques of representation of images, called geometric wavelets. As its name suggests these techniques are based on wavelets, but allowing an improved representation of the latter. Our memory begins by studying the wavelet analysis, these characteristics and limitations. We then study the methods based on geometry, take the example of ridgelets.

Then we made a detailed study of ridgelets. This technique uses the Radon transform followed by transformée monodimensionnel wavelet. The Radon transform is used to detect lines, and the wavelet transform is then applied to the best correlation.

## **Key-words**

Wavelet transform, the geometric wavelet transform Radon transform ridgelet

## ملخص :

هذا العمل هو دراسة تقنيات جديدة لتمثيل الصور، و يدعى الموجات الهندسية. وكما يتضح من اسمها تستند هذه التقنيات على الموجات، و لكن يسمح بتحسين تمثيل هذا الأخير. نبدأ مذكرتنا بدراسة تحليل الموجات، وهذه الخصائص والحدود. نقوم بدراسة الطرق المعتمدة على الهندسة، ونأخذ على سبيل المثال *ridgelets*. ثم نجري دراسة تفصيلية على *ridgelets*. تستعمل تحويل الرادون بالتحويل المتبوع بالتحويل الموجات أحادي البعد. تحويل الرادون تحويل يسمح بتحديد الخطوط كما يستخدم التحويل الموجات على أفضل الارتباط.

### الكلمات الرئيسية

تحويل الموجات، والموجات هندسية تحويل غاز الرادون تحويل *ridgelet*

# LISTE DES FIGURES

Figure I. 1: Schéma général de la compression /décompression .....	6
Figure I. 2 : codage JPEG.....	7
Figure I. 3 : fonction de quantification .....	8
Figure I. 4 : image compressée à 0.188bpp avec JPEG. (PSNR= 28dB) .....	9
Figure I. 5 : Schéma bloc du codeur JPEG 2000.....	9
Figure II. 1: Exemple de transformation de Fourier d'un signal déterministe .....	15
Figure II. 2 :a) transformation de Fourier à court terme , b) le domaine obtenu par TFCT .....	16
Figure II. 3 :Espace de représentation temps-échelle.....	17
Figure II. 4 : Exemple d'ondelette mère, domaine temporel (à gauche) et fréquentiel (à droite) .....	17
Figure II. 5 : grille dyadique.....	20
Figure II. 6 : Synoptique de l'AMR .....	22
Figure II. 7 : analyse multi-résolutions mono- dimensionnelle.....	26
Figure II. 8 : Analyse multi résolutions en deux dimensions .....	29
Figure II. 9 : décomposition bidimensionnelle sur deux niveaux de résolution de l'image LENA .....	30
Figure III. 1 : Une image avec ses coefficients en ondelettes. ....	33
Figure III. 3 : Représentation graphique de la transformée de Radon pour $\theta$ fixe.....	34
Figure III. 2 : Principe de la transformée en ridgelets .....	34
Figure III. 5 : Exemple de transformation en ridgelet .....	35
Figure III. 4 :Transformation de Radon d'une ligne .....	35
Figure III. 6 : Exemple d'une fonction Ridgelet $\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2)$ .....	36
Figure III. 7 : Relation entre les transformations Ridgelet- Radon et Radon- Fourier 2D.....	37
Figure III. 8 : (a) Lignes pour le FRAT 7x7. Des lignes parallèles sont groupées en chacune des huit directions possibles. Les images dans l'ordre de haut en bas, de gauche à droite correspondent aux valeurs de k de 0 à 7. Dans chaque image, des Pixels dans différentes lignes sont assignés avec différents niveaux de gris. (b) tout autour de la ligne L l'addition des pixels P1et P2 vient pour compléter les segments L1 et L2, respectivement , elle est définie par le reste de l'opération de division par p.....	39
Figure III. 9: Exemple d'une tranche du domaine de Fourier discret (indiquer par les cases noires) avec le meilleur vecteur normal pour la projection du FRAT. Dans cet exemple, p=17 et la pente k=11. Le meilleur vecteur normal est (a,b)=(1,3). .....	43
Figure III. 10: lignes des projection du FRAT comme montrer dans Fig. (9) en utilisant : (a) l'ordonnancement usuel, (b) l'ordonnancement optimal. Les flèches indiquent les directions représentées dans chaque cas. ....	43
Figure III. 11: Ensemble des vecteurs normaux pour le FRAT de taille p=17 : (a) ordonnancement usuel ; (b) ordonnancement optimal.....	44
Figure III. 12 : Les étapes de la transformée en ridgelet finie (FRIT) .....	44
Figure III. 13 : Image artificielle : (a) image originale, (b) reconstruite par 20 coefficients d'ondelettes, et (c) reconstruite par le même nombre de coefficients de Ridgelet .....	45

# LISTE D'ABREVIATIONS

$L^2$	: Espace des fonctions à énergie finie.
DCT	: Transformée en cosinus discrète.
CWT	: Transformée en ondelettes continue.
DWT	: Transformée en ondelettes discrète.
FFT	: Transformée de Fourier rapide.
FFT2D	: Transformée de Fourier rapide à deux dimensions.
IFFT2D	: Transformée de Fourier rapide inverse à deux dimensions.
DRT	: Transformée de Ridgelets discret.
DCTG1	: Transformée en Curvelets discret de première génération.
FDCT	: Transformée en Curvelets discret rapide.
USSFFT	: Unequally spaced FFT.
JPEG	: Joint Photographic Expert Group.
JPEG2000	: Standard de compression d'images fixes récent, introduit par JPEG.
EZW	: Embedded zero tree wavelets.
SPHIT	: Set Partitioning In Hierarchical Trees.
MPEG4	: Moving Picture Experts Group 4.
MSE	: Erreur quadratique moyenne.
PSNR	: Rapport signal sur bruit crête.
SNR	: Rapport signal sur bruit.
RC	: Rapport de compression.
Bpp	: bit par pixel.
PDF	: Fonction de distribution de la probabilité.
$Q_{MR}$	: Quantificateur scalaire midtrise
$Q_{MT}$	: Quantificateur scalaire midtread
RLE	: Codage de longueur de séquence.
AC	: Codeur arithmétique.
LZW	: Lempel Zip Welch.
VTC	: Volume Texture Compression
ISO	: International Organization for Standardization.
GIF	: Graphic Interchange Format.
ITU	International Telecommunication Union

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b> .....	2
<b>CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉS SUR LA COMPRESSION D'IMAGES</b> .....	3
I.1. Introduction.....	4
I.2. Image numérique .....	5
I.2.1. Types d'image.....	5
I.3. Compression d'image .....	5
I. 2.1 Principe de compression .....	5
I.3.2 Etapes de compression et décompression .....	6
I.3.3. Principaux algorithmes de compression .....	7
I.4. Calcul des performances d'un algorithme de compression d'images.....	11
I.4.1 Rapport de compression.....	12
I.4.2. Erreur quadratique moyenne.....	12
I.4.3 Rapport signal sur bruit.....	12
I.4.4 Temps de calcul .....	13
I.5. Conclusion .....	13
<b>CHAPITRE II : LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTE</b> .....	14
II.1. Introduction .....	15
II.2. Transformée de Fourier (TF).....	15
II.3. Transformée de Fourier à court terme (TFCT).....	16
II.4. Transformée en Ondelette .....	17
II.4.1 Transformée en ondelette continue (CWT).....	18
II. 4.2 Discrétisation de la CWT .....	19
II.5. Analyse multi-résolutions (AMR).....	21
II.6. Reconstruction .....	25
II.7. Extension en deux dimensions .....	26
II.8. Conclusion .....	30
<b>CHAPITRE III : LES ONDELETTES GÉOMÉTRIQUES</b> .....	31
III.1. Introduction .....	32
III.2. Ondelettes et analyse d'image.....	32
III.3. Ridgelets.....	34
a) Transformée de Radon continue (CRT).....	34
b. Transformée en ridgelets continues.....	35
III.4. Transformée de Radon discrète (FRAT usel) .....	38
III.4.1 Définition .....	38
III.5. Transformée de Radon finie inverse .....	39
III.6. Ordonnancement optimal des coefficients de la transformée de Radon finie.....	40
III.7. Transformée en ridgelets finies orthogonales .....	44
III.10. Conclusion.....	45
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b> .....	47

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La compression à bas débit repose sur la construction d'opérateurs d'approximation non-linéaires qui permettent d'approcher efficacement le signal à l'aide d'un faible nombre de coefficients. Dans ce cadre, les ondelettes sont connues pour représenter de manière optimale les signaux unidimensionnels possédant un nombre fini de discontinuités.

Cependant dans le cas d'images composées de région délimitées par des contours, les discontinuités apparaissent sous la forme de courbes. Les ondelettes séparables ne sont pas la manière optimale pour les représenter. Ainsi, dans les schémas de compression d'images basés sur les ondelettes séparables, on observe une forte concentration de coefficients d'énergie importante le long des contours de l'image.

De nombreuses approches récentes tentent de résoudre ce problème en utilisant les propriétés géométriques de l'image. Par conséquent des nouvelles méthodes de représentation d'images sont apparues, parmi lesquelles on cite les transformées en ridgelets, les transformées en curveletes et en fin les bandelettes.

Les transformées en ridgelets traitent efficacement les singularités linéaires on se basant sur la transformation de celles-ci en singularités point par l'intermédiaire de la transformation de Radon suivie par une transformation en ondelettes monodimensionnelle.

Notre mémoire contient trois chapitres dans lesquels nous allons essayer de couvrir au maximum ce sujet.

Le premier chapitre sera consacré aux généralités sur les types d'images, les différentes méthodes de compression et de codage.

Dans le deuxième chapitre nous allons présenter les principaux types de transformations telle que la transformation de Fourier, Fourier à court terme et finalement on parle de la transformée en ondelettes.

Le troisième chapitre est basé sur l'étude des ondelettes géométriques en général et sur la transformation en ridgelets en particulier. Dans lequel nous allons présenter la théorie des ridgelets dans le domaine continu et discret.

On termine notre travail par une conclusion générale sur notre.

# CHAPITRE I :

## GÉNÉRALITÉS SUR LA COMPRESSION D'IMAGES

## **I.1. Introduction**

L'utilisation de données sous leurs formes numériques ne serait pas possible aujourd'hui sans la compression préalable de celle-ci, et ceci pour plusieurs raisons :

- les capacités de stockage des supports, même si elles ne cessent d'augmenter, ne sont pas infinies.
- La durée des transmissions de ces données numériques est conditionnée par le débit du réseau qui est utilisé et qui est parfois relativement faible.

La compression des données numériques permet donc de diminuer la taille de stockage et de rendre possible leurs transport sur des réseaux de communication (internet, GSM, câble, TV satellite).

En informatique, les supports sont digitaux et l'unité de mesure est le bit. La compression d'image revient donc à réduire son espace en bits quelque soit le type d'image a compressée [1].

Vue l'intérêt de l'information a étudier ou a transmettre, on peut distinguer deux types de compression.

la compression sans perte, là où il n y a aucune perte de donnée sue l'information originale, et la compression avec perte, qui elle présente des dégradations par rapport à l'information originale.

## **I.2. Image numérique**

On désigne sous le terme d'image numérique tout (dessin, photo, image ..... ) acquis, réalisé, traité, ou stocké avec l'outil informatique sous forme binaire.

### ***I.2.1. Types d'image***

Une image numérique peut être vue comme une matrice. Chaque élément de cette matrice est appelé pixel. L'image peut être représentée de différentes manières au niveau informatique. De cela vient l'existence de plusieurs types d'image, parmi lesquelles on va citer, l'image binaire, l'image d'intensité, l'image couleurs (RVB) et couleur indexée.

#### **a) Image binaire**

C'est une matrice où ses éléments ne peuvent prendre que deux valeurs 0 et 1. Les zéros représentent le noir et les uns représentent le blanc.

#### **b) Image d'intensité (niveau de gris)**

Une image d'intensité est une matrice dans laquelle chaque élément est un nombre réel compris entre 0 et 255. On parle aussi d'image en niveau de gris.

#### **c) Image couleur RVB**

L'image couleur est formée par les trois couleurs de base, le rouge, le vert et le bleu. Pour présenter la couleur d'un pixel il faut donc donner 3 nombres. Qui correspondent au dosage des trois couleurs de base.

## **I.3. Compression d'image**

### ***I. 2.1 Principe de compression***

Les méthodes de compression et de codage réduisent le nombre de bits par pixel à stockés ou à transmettre, en exploitant la redondance informationnelle dans l'image. Les principaux critères d'évaluation de toute méthode de compression sont :

- 1 : la qualité de la reconstruction de l'image compressée.
- 2 : le taux de compression.
- 3 : la rapidité du codeur et décodeur.

### I.3.2 Etapes de compression et décompression

Le schéma fonctionnel suivant représente les étapes de la compression d'image.

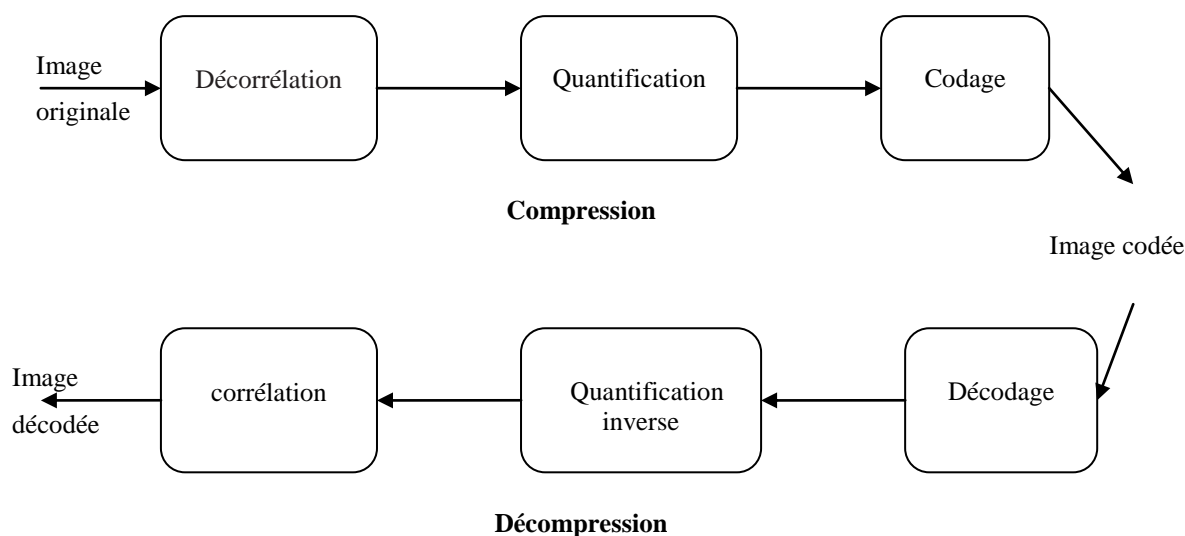


Figure I. 1: Schéma général de la compression /décompression

#### a) Décorrélacion

la décorrélacion consiste à transformer les pixels initiaux en un ensemble de coefficient moins corrélés, c'est une opération réversible.

Parmi les transformation utilisées dans cette opération. La transformée de Fourier[2], la transformée en cosinus discrète (DCT), la transformée en Ondelette (DWT) et les transformations géométriques, que nous allons voir par la suite, et qui sont à la base de notre travail.

#### b) Quantification

la quantification des coefficient a pour but de réduire le nombre de bits nécessaires pour leurs représentations. Elle approxime chaque valeur d'un signal par un multiple entier, d'une quantité  $q$ , appelé quantum élémentaire. Elle peut être scalaire ou vectorielle.

#### c) Codage

une fois les coefficient quantifiés, ils sont codés. Le codeur a pour but de réduire au minimum la redondance informationnelle. Un codeur doit satisfaire à priori les conditions suivantes :

1. **unicité** deux messages différent ne doivent pas être codés de la même façon.

2. **Déchiffrabilité** deux mot de codes successifs doivent être distingués sans ambiguïté.

### I.3.3. Principaux algorithmes de compression

Selon le type de la transformée utilisée et suivant le codage, on distingue quelques algorithmes. Parmi lesquels on va citer les standards JPEG, JPEG 2000 et les algorithmes géométriques.

#### I.3.3.1. Standard JPEG

JPEG est le sigle de Joint Photographic Expert Group. Qui édifier une norme du même nom pour la compression des images fixes. Ce standard utilise un protocole en trois étapes figure I. 2.

- transformation en cosinus discrète (DCT).
- Quantification scalaire uniforme.
- Codage entropique.

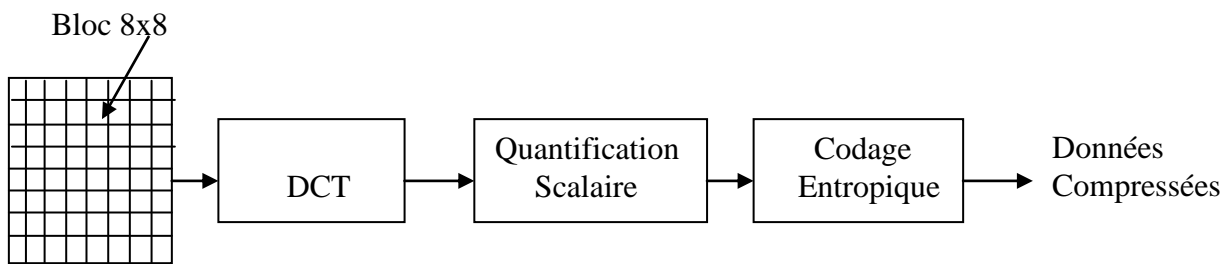


Image originale

Figure I. 3 : codage JPEG

#### a) Transformée en cosinus discrète (DCT)

La DCT est l'une des transformées les plus utilisées pour la compression d'image, adoptée dans de nombreux standards de compression. Elle est très similaire à la transformée de Fourier, excepté le fait qu'elle n'utilise pas de valeurs complexes [3].

Chaque composante de l'image  $f(i, j)$  est découpée en blocs de 8x8 pixels, auxquels on applique la DCT pour obtenir les coefficients fréquentiels  $F(u, v)$ .

$$F(u, v) = \frac{1}{8} a_u a_v \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 f(i, j) \cos\left(\frac{(2i+1)\pi u}{16}\right) \cos\left(\frac{(2j+1)\pi v}{16}\right) \dots\dots\dots (1.1)$$

Où :  $a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  si  $x = 0$  et 1 sinon.

Les coefficients de plus basse fréquence sont localisés en haut à gauche de chaque bloc, et les coefficients correspondants aux hautes fréquences se situent en bas à droite.

**b) Quantification**

Lors d'une compression avec perte, la précision sur les coefficients de la transformée est réduite par quantification scalaire uniforme. La fonction de quantification est présentée à la figure (1.3) où  $\Delta$  est le pas de la quantification,  $\omega$  est le coefficient de la transformée à quantifier et  $Q(\omega)$  le coefficient quantifié obtenu

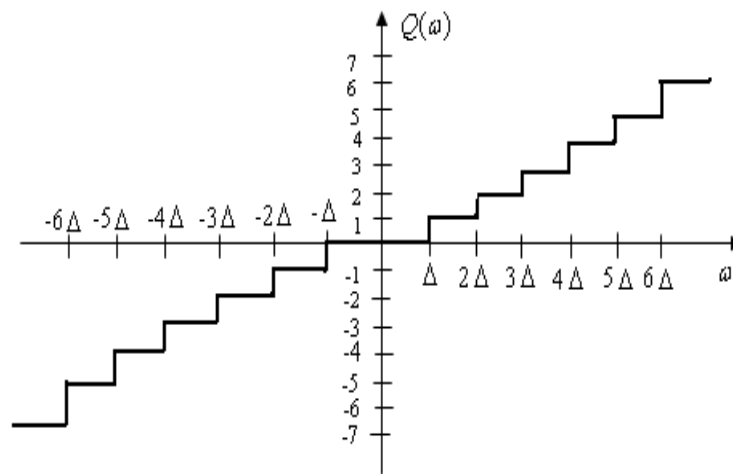


Figure I. 4 : fonction de quantification

**c) Codage entropique**

Un codeur parvient à compresser une séquence de '0' et de '1' en réduisant la redondance présente dans cette séquence. Le fait qu'il soit Entropique signifie qu'il réalise cette réduction de redondance en utilisant la probabilité d'occurrence de chaque symbole.

**d) Avantages et inconvénients de JPEG**

- JPEG est performant dans son domaine de prédilection c'est-à-dire, pour de faible taux de compression sur des images naturelles. L'algorithme de compression reste relativement simple.

- JPEG est moins adapté à l'impression d'images. Certains défauts sont plus visibles après impression.



Figure I. 5 : image compressée à 0.188bpp avec JPEG. (PSNR= 28dB)

- JPEG n'est prévue que pour deux types d'images :
  - Couleurs, avec trois plans de couleur RVB
  - Et en niveaux de gris, monochrome.

Pour essayer de corriger ces défauts. On va présenter un autre standard de compression le JPEG2000.

### I.3.3.2. Standard JPEG2000

L'objectif principal de la nouvelle norme est de disposer d'une plus grande flexibilité que JPEG. Cette flexibilité doit se situer à la fois au niveau de la qualité de images (niveau de résolution, degré d'approximation des pixels), du type d'images traitées (fax, méga-image, radiographie,...), des applications visées (application militaire, médicale, commerciale, ...), tout en suivant la chaîne de codage suivante. figure I. 6

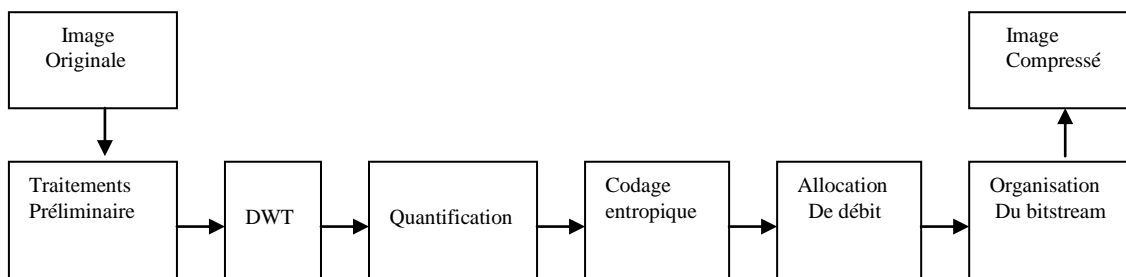


Figure I. 7 : Schéma bloc du codeur JPEG 2000

La transformée DCT (Discrete Cosine Transform) de JPEG a été remplacée par la transformée en ondelette (DWT) dans JPEG 2000. Mais toujours en utilisant une quantification scalaire uniforme et un codage entropique

#### **a) Domaine d'application**

Les domaines d'application du standard JPEG 2000 sont très vastes. Les principaux domaines d'application sont présentés ci-dessous.

- **Imagerie satellite**

les images acquises par satellite offrent une perspective unique de la terre. La caractéristique principale des images traitées par une satellite est leur grande taille. Ainsi, il sera courant de devoir traiter des images de 30 000 sur 30 000 pixels, avec une précision de 16 bits sur chaque pixel. On parle dans ce cas de méga-images. Le JPEG 2000 offre la possibilité de **naviguer** au sein de ces grandes images, ainsi que **l'archivage** de ces derniers est facilité par les possibilités de compression sans perte.

- **Imagerie médicale**

l'imagerie médicale est certainement un de secteurs d'application clé de JPEG 2000. La variété des images à traiter, l'important volume de données à gérer et l'exigence de qualité requise par les médecins nécessitent une flexibilité et une qualité de compression que JPEG 2000 assure largement.

#### **b) Avantage du JPEG2000**

l'algorithme de compression JPEG 2000 présente les performances suivantes :

- qualité d'image nettement meilleur que celle du JPEG.
- résistance aux erreurs lors de la transmission.

#### **I.3.3.3 Ondelettes géométriques**

La transformée en ondelette est un outil très efficace dans l'analyse et le débrouillage de signaux 1D non stationnaires présentant des discontinuités ponctuelles. Néanmoins, les discontinuités présentes dans les images naturelles sont principalement générées par les contours et par conséquent sont distribuées le long d'une courbe lisse dans le plan spatial.

Pour cette catégorie de signaux, les ondelettes s'avèrent par nature sous optimales. Pour surmonter la faiblesse des ondelettes dans des dimensions plus élevées (2D et plus), nombreux travaux ont intéressé sur l'utilisation de la nature géométrique des images et son exploitation. Candès et Donoho ont récemment créé un nouveau système des représentations appelé les Ridgelets qui traite efficacement les singularités linéaires dans l'espace 2D. ces représentation malgré leurs puissance dans les zones droites, ne sont pas de grand intérêt, puisque dans le cas des images naturelles les contours ne sont pas généralement des droites et les Ridgelets dans ce cas ne peuvent pas rapporter les représentations efficaces.

Motivé par les limitations de la méthode de Ridgelet, un nouveau système de représentation dite Curvelets est proposé et qui emploie la transformation Ridgelet comme module. L'idée de la transformation Curvelet est premièrement de décomposer l'image en sous-bandes, c'est-à-dire de séparer l'objet dans une série de disjonction d'échelle est en suite d'analyser chaque bloc au moyen d'une transformée en Ridgelet locale.

Pour décrire des images naturelles, il faut un modèle où les contours de l'image ne sont pas nécessairement des singularités, car ils peuvent être lisses. Les bases de bandelettes propose par Le Pennec et Mallat, ont un ordre d'approximation optimal pour cette classe plus complexe d'images géométriques. Les bases de bandelettes décomposent une image selon des vecteurs multi-échelles allongés le long d'un flot géométrique indiquant des directions de régularité de l'image à la place de représentation des contours par des singularités[4].

Ces types de transformations géométriques sont des transformations orthonormaux, réversible, et s'implémente par des algorithmes rapides. Ainsi, ces transformations permettent des résultats optimaux d'approximation d'image ; ce qui autorise des algorithmes rapides de compressions et de débrouillage d'image.

## **I.4. Calcul des performances d'un algorithme de compression d'images**

Dans toutes compression d'image on doit tenir compte de certaines performances importantes à qui on doit se référer pour juger de la qualité de la compression, parmi lesquelles :

- Le rapport de compression(TC)
- L'erreur quadratique moyenne(EQM)
- Le rapport signal/bruit (SNR), ou (PSNR)

### 1.4.1 Rapport de compression

le rapport de compression représente le rapport entre la quantité des données, originales et la quantité de leur code après la compression, il est donné par la formule suivante[5] :

$$\text{Rapport} = \frac{\text{Nombre de bit après la compression}}{\text{Nombre de bit avant la compression}} \dots\dots (1.2)$$

le taux de compression est un pourcentage de l'espace obtenue après la compression par rapport à l'espace total requis par les données avant la compression, il est donné par :

$$RC(\%) = 100 \times \left( 1 - \frac{\text{Taille de l'image après le codage}}{\text{Taille de l'image originale}} \right) \dots\dots\dots (1.3)$$

### 1.4.2. Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyenne, notée EQM est définie par :

$$EQM = \frac{1}{M * N} \sum_{i=j}^{N-1} \sum_{i=j}^{M-1} \left( L_{i,j} - \hat{L}_{i,j} \right)^2 \dots\dots\dots(1.4)$$

M\*N : la taille de l'image

$L_{i,j}$  : l'intensité du pixel de l'image original aux coordonnées(i,j)

$\hat{L}_{i,j}$  : l'intensité du pixel de l'image décompressée aux coordonnées(i,j)

### 1.4.3 Rapport signal sur bruit

le rapport signal sur bruit noté par PSNR est définie par :

$$PSNR = 10 \log_{10} \left[ \frac{(pic)^2}{EQM} \right] \dots\dots\dots(1.5)$$

Où (pic) est la valeur crête à crête des pixels de l'image original.

#### ***1.4.4 Temps de calcul***

La contrainte du temps est un facteur essentiel dans l'évaluation des performances de toute méthode de compression, elle revient à calculer le temps pris par la compression et la décompression des images.

### **1.5. Conclusion**

Dans ce chapitre on a parlé des images numériques et de la diversité des types de ces dernières, aussi on a exposé les différents algorithmes de compression notamment l'algorithme JPEG qui utilise le DCT comme transformée, le JPEG 2000 qui utilise les ondelettes et les améliorations qu'il a apporté sur le JPEG, et en fin sur les nouvelles méthodes de compression qui exploitent la géométrie des images pour réaliser une compression adaptative à cette géométrie, comme les ridgelets, les curvelettes et les bondelettes.

# CHAPITRE II :

## LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTE

## II.1. Introduction

Le codage par transformée est utilisé dans le but de représenter un signal (image, vidéo, son...) de manière plus efficace que sous sa forme brut. La transformée consiste en générale, a présenté le signal de base, en terme de ses fréquences fondamentales. Parmi les techniques les plus connues, on peut citer la transformée de Fourier, transformée de Fourier à court terme, la DCT, qu'on a évoqué dans le chapitre précédant, la transformée en Ondelette. A qui nous allons nous intéresser dans ce chapitre et en fin les Ondelettes géométriques, que nous allons développer dans le troisième chapitre.

Ces représentations en termes de fréquences nous permettent d'isoler des propriétés intéressantes de l'image. Ainsi, la plupart de l'énergie du signal se concentre dans les basses fréquences, alors que les hautes fréquences représentent les détails de l'image, comme par exemple, les bords. Le but et donc, grâce à la transformée, de décorrélé au maximum le signal d'entrée pour isoler la plupart de l'information dans les basses fréquences[1].

## II.2. Transformée de Fourier (TF)

Les analyseurs des signaux ont déjà à leur disposition un ensemble d'outil très important. Peut être le plus connu d'entre eux est l'analyse de Fourier, qui permet d'obtenir la représentation spectral (dans le domaine fréquentiel) des signaux. C'est-à-dire la représentation fréquentielle de l'amplitude, de l'énergie ou de la puissance de ces signaux.

figure II. 1

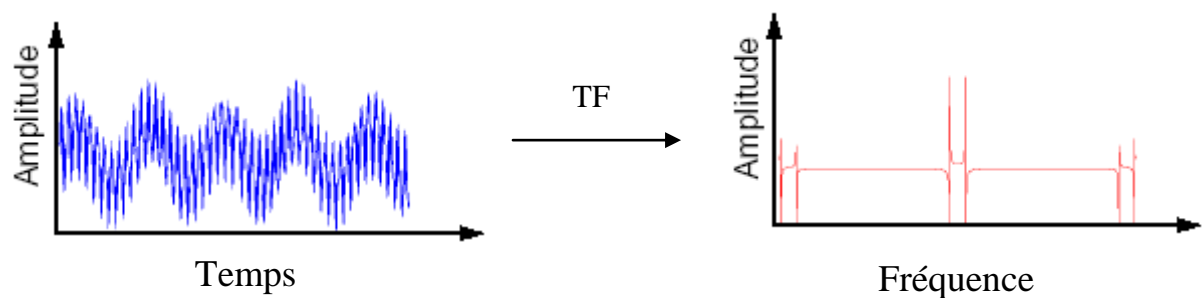


Figure II. 1: Exemple de transformation de Fourier d'un signal déterministe

La TF d'une fonction  $f(t)$ , est donnée par :

$$L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f(t) \longrightarrow \mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

La transformée inverse de la fonction  $F(\omega)$ ,  $f(t)$  est défini par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \dots\dots\dots (2.2)$$

L'inconvénient majeur de la transformée de Fourier est que, en passant au domaine fréquentiel, l'information temporelle est perdue. Comme solution à ce problème, les mathématicien on introduit un nouvel concept, appelé la transformée de Fourier à court terme. Connu aussi sous le nom de fenêtrage. [2]

### II.3. Transformée de Fourier à court terme (TFCT)

Dennis Gabor (1946), adapta la TF pour analyser un segment du signal, cette technique est appelée, l'analyse par fenêtre. Elle trace un signal dans une fonction bidimensionnelle de temps et de fréquence. Figure II. 2

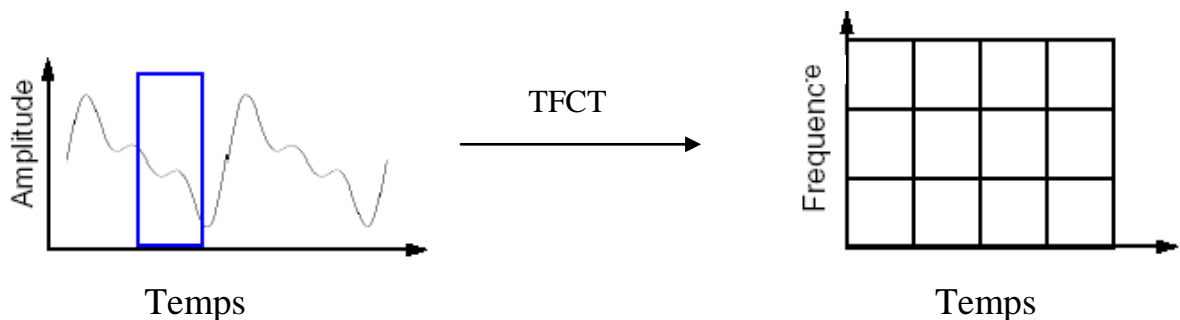


Figure II. 2 :a) transformation de Fourier à court terme , b) le domaine obtenu par TFCT

L'idée est de multiplier le signal  $f(t)$  par une fenêtre de dimension finit en un instant précis et de prendre la TF du produit. En faisant glisser la fenêtre sur tout le signal, il sera possible de faire une analyse en temps et en fréquence du signal.[6]

$$L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f(t) \longrightarrow F(\tau, \omega) = \int f(t)h(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \dots\dots\dots (2.3)$$

Où  $h(t - \tau)$  est la fenêtre d'analyse.

L'inconvénient est qu'une fois que vous choisissez une taille particulière de la fenêtre, cette fenêtre est la même pour toutes les fréquences. Beaucoup de signaux exigent une approche plus souple. Alors on a besoin de faire varier la taille de la fenêtre.

## II.4. Transformée en Ondelette

La transformée en Ondelette est un outil mathématique servant à l'analyse de signaux. En générale elle décompose une fonction donnée  $f(x)$  en ses composantes à différentes échelles ou bandes de fréquence figure II. 3. Nous devons noter que l'analyse par ondelette n'utilise pas la région temps fréquence, mais plutôt une région temps échelle.

Pour ce faire on convolue la fonction avec des versions dilatées et translatées d'une ondelette dite, ondelette mère  $\psi$  [7] figure II. 4.

L'analyse par ondelette permet d'utiliser une large fenêtre temporelle là où on veut obtenir plus d'information sur les basses fréquences, et de petites régions temporelles pour les hautes fréquences. L'intérêt d'une telle décomposition est que les fonctions d'ondelettes possèdent la propriété remarquable d'être à la fois bien localisées en temps et en fréquence .

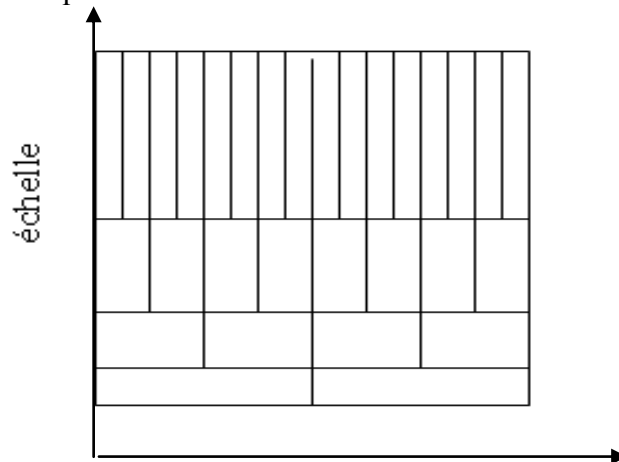


Figure II. 3 :Espace de représentation temps-échelle.

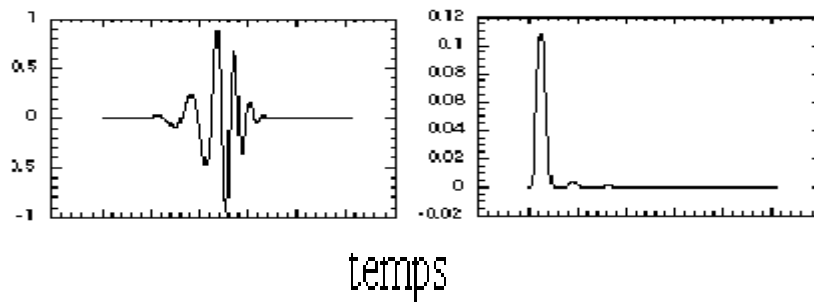


Figure II. 4 : Exemple d'ondelette mère, domaine temporel (à gauche) et fréquentiel (à droite)

Il existe principalement deux manières d'aborder la théorie de ondelettes. première et par le biais de la transformée continue et l'autre par le biais de l'analyse multi résolution.

**II.4.1 Transformée en ondelette continue (CWT)**

Comme mentionné précédemment, une décomposition en ondelette utilise des translations et des dilatations d'une fonction fixée. L'ondelette  $\Psi \in l^2(\mathbb{R})$ . Dans le cas de la transformée continue. En d'autres mots, la transformée utilise les fonctions.

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{Avec } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

La transformée continue en ondelette d'une fonction  $f \in l^2(\mathbb{R})$ , est définie comme suit :

$$W_f(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle \dots\dots\dots(2.4)$$

$$= \int f(x) \Psi_{a,b}^*(x) dx \dots\dots\dots (2.5)$$

**II.4.1.1 Inversibilité**

Cette transformation est inversible, à condition que l'ondelette mère vérifie une condition, dite d'admissibilité :

$$\int \left| \hat{\Psi}(f) \right|^2 \frac{df}{|f|} = c_\Psi < \infty \dots\dots\dots(2.6)$$

Où  $\hat{\Psi}(f)$  est la transformée de Fourier de  $\Psi(x)$ . Pour assurer la convergence de cette intégrale, il faut, à la fois que [7]

- $\hat{\Psi}(f)$  décroisse suffisamment vite quand  $f \rightarrow \infty$ , ce qui assure la qualité de la localisation dans le domaine fréquentiel.
- $\hat{\Psi}(0) = 0$ .

La CWT peut être théoriquement inversée de façon exacte par la formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{C_\Psi} \iint W_f(a, \tau) \Psi_{a,b}(\tau) \frac{d\tau da}{a^2} \dots\dots\dots(2.7)$$

### II.4.1.2 Redondance

Les transformées en ondelettes, telle qu'on vient de les définir, mettent en œuvre, un nombre de coefficients beaucoup plus grand que nécessaire : c'est une représentation redondante.

Redondance ne signifie pas qu'on a introduit un supplément d'information relativement à celle contenue dans la représentation temporelle, mais qu'une même fraction d'information est écrite plusieurs fois, l'un des intérêts majeurs de l'utilisation d'une transformée redondante est de permettre, à travers l'usage des variables continues, temps et échelle, de positionner avec une précision infinie la brique élémentaire  $\Psi_{a,b}(x)$ , qui partage le plus d'informations avec le signal. Il est alors possible de suivre et d'analyser, avec une très grande finesse, l'évolution du comportement du signal. La principale contrepartie de la redondance réside dans un coût de calcul élevé.

### II. 4.2 Discrétisation de la CWT

Morlet a proposé de construire des bases de fonctions construits sur le modèle suivant :

$$\psi_{t_0, \Delta t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \psi\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right) \dots\dots\dots (2.8)$$

Où les valeurs possibles de  $\Delta t$  sont pris sur une échelle géométrique et les paramètres de translation sont proportionnels  $\Delta t$  :

$$\Delta t = b^j$$

$$t_0 = \Delta t$$

Une gamme d'échelles  $\Delta t$  couramment utilisée est la gamme des échelles dyadiques  $2^j$ . Figure II.8, et on obtient des familles constituées de fonctions de la forme  $\{\psi_0(2^j(t-2^{-j}k)) = \psi(2^j t - k)$  où  $j$  et  $k$  sont des entiers relatifs}. La normalisation la plus couramment utilisée étant une normalisation en norme  $L^2$ , on obtient des familles de fonctions  $(\Psi_{jk}); j, k \in Z$  où

$$\Psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k) [7] \dots\dots\dots (2.9)$$

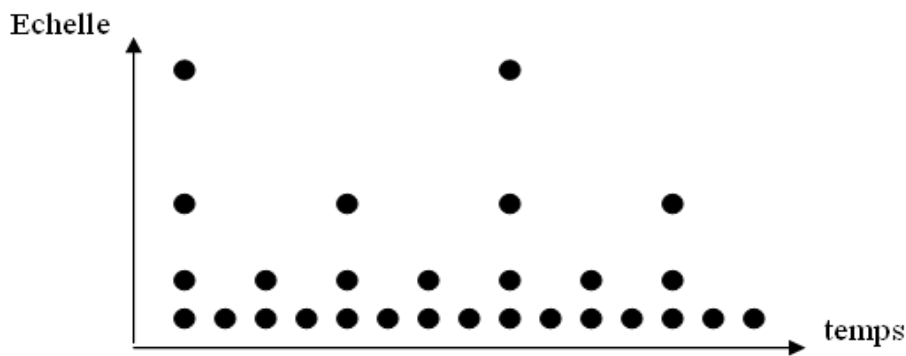


Figure II. 5 : grille dyadique

Stéphane Mallat a mis en œuvre une certaine catégorie de décompositions qui peuvent être réalisées numériquement en un temps très court par une « transformée en ondelettes rapide », pour laquelle l'ondelette de base doit être écrite comme convolution infinie de filtres discrets. Plus exactement, soit un couple de filtres discrets  $(h, g)$  :

$$\begin{aligned} k &\mapsto h[k] & k &\in \mathbb{Z}, \\ k &\mapsto g[k] & k &\in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

dont les transformées de Fourier  $\omega \mapsto h(\omega)$  et  $\omega \mapsto g(\omega)$  sont des fonctions  $2\pi$ -périodique. On suppose qu'il existe une fonction d'échelle  $\phi$  et une ondelette  $\Psi$  de  $L^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{+\infty} h\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\hat{\Psi}(\omega) = g\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \dots\dots\dots (2.11)$$

Sous certaines conditions sur  $m_0$  et  $m_1$ , la famille  $(\Psi_{j,k})$  est une base orthogonale, et la décomposition en ondelettes d'une fonction échantillonnée peut être effectuée par un algorithme rapide constitué d'une cascade de filtrages et de sous-échantillonnages.

Cette approche réduit considérablement la complexité de la construction d'une ondelette. Au lieu de choisir une fonction, on choisit l'ensemble discret (et en général fini) des coefficients des deux filtres.

## II.5. Analyse multi-résolutions (AMR)

L'obtention des bases discrètes d'ondelettes et plus particulièrement des bases orthonormales repose sur la théorie de l'AMR[8], cette théorie prévoit que l'on peut analyser un signal en le décomposant en un signal d'approximation et un signal détail. On fragmente l'approximation en un nouvel signal approximation, plus grossier, et un signal détail, puis on répète cette procédure comme illustrée en Figure II. 9.

Les approximations sont, en quelque sorte, des versions lissées (filtrage passe-bas du signal) dans lesquelles, les ruptures sont progressivement gommées ou atténuées ; les détails, au contraire, ressemblent au squelette du signal, ne comportent que les informations de ruptures ou discontinuités.

Par définition, une AMR est une suite de sous-espaces  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifiant les propriétés suivantes :

- 1)  $V_j \subset V_{j-1} \subset V_{j-2} \dots$
- 2)  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- 3)  $\bigcap V_j = \{0\}, j \in \mathbb{Z}$ .
- 4)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1} \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0$ .
- 5) Pour toute fonction  $f(x) \in V_0$  et toute  $k \in \mathbb{Z}, x(t-k) \in V_0$ .
- 6) Il existe une fonction  $\phi$  telle que la famille  $\{\sqrt{2^{-j}} \phi^j(x - 2^{-j} k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormale de  $V_j$ . Le facteur  $\sqrt{2^{-j}}$  normalise les fonctions de base en  $L^2(\mathbb{R})$ . La fonction  $\phi$  est appelée «fonction d'échelle».

Ces fonctions de base sont construites par dilatation et translation d'un opérateur d'échelle  $\phi(x)$ . La dilatation de  $\phi(x)$  d'un facteur  $2^j$  est définie par :

$$\phi^j(x) = 2^j \phi(2^j x) \dots\dots\dots (2.11)$$

La translation de  $\phi^j(x)$  d'un facteur  $k$  proportionnelle à  $2^j$  est définie par :

$$\phi_k^j(x) = \phi^j(x - 2^{-j} k) = 2^j \phi(2^{-j} x - k) \dots\dots\dots(2.12)$$

Vu la relation entre les espaces vectoriels ( $V_j \subset V_{j-1} \subset V_{j-2} \dots$ ), la fonction d'échelle  $\phi_k^j(x)$ , qui appartient à l'espace  $V_j$ , peut s'écrire en utilisant les fonctions de base de l'espace  $V_{j-1}$  :

$$\phi_k^j(x) = 2^{-(j-1)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_k^j, \phi_k^{j-1} \rangle \phi_k^{j-1}(x) \dots \dots \dots (2.13)$$

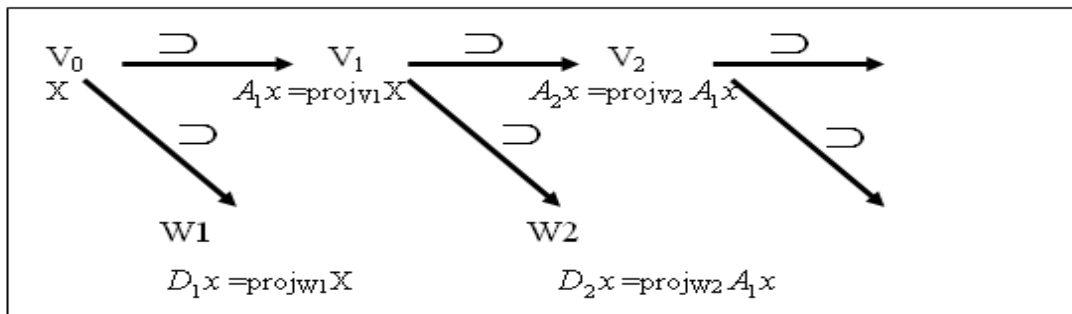


Figure II. 6 : Synoptique de l'AMR

L'idée de l'AMR est d'effectuer des projections successives du signal à étudier dans les espaces  $V_j$ , pour obtenir les approximations :

$$A_j f = \langle f, \phi_k^j \rangle \dots \dots \dots (2.14)$$

En utilisant la relation (2.13), et après changement des variables :

$$A_j f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_0^{-1}, \phi_{n-2k}^0 \rangle \langle f, \phi_n^{j-1} \rangle \dots \dots \dots (2.15)$$

Introduisant  $H$ , un filtre discret de réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \langle \phi_0^{-1}, \phi_n^0 \rangle \dots \dots \dots (2.16)$$

et  $\bar{H}$ , le filtre miroir de réponse impulsionnelle symétrique :

$$\bar{h}(n) = h(-n) \dots \dots \dots (2.17)$$

On peut alors introduire ce filtre dans (2.15) :

$$A_j f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(2k-n) \langle f, \phi_n^{j-1} \rangle \dots\dots\dots (2.18)$$

Donc, l'approximation du signal  $f(x)$  à la résolution  $R_j$  peut être calculée par la convolution de l'approximation à la résolution  $R_{j+1}$  avec un filtre discret  $H$  dont on connaît la réponse impulsionnelle

$$A_j f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(2k-n) A_{j-1} f \dots\dots\dots (2.19)$$

Le rapport entre le filtre  $H$  et la fonction d'échelle  $\phi(x)$  est donné par le théorème de Mallat, :

$$\varphi(w) = \prod_{k=1}^{+\infty} H(2^{-k} w) \dots\dots\dots (2.20)$$

$\varphi(w)$  : la transformée de Fourier de  $\phi(x)$ .

Comme  $V_j$  est inclus dans  $V_{j-1}$ , l'approximation  $A_j f$  constitue une approximation de  $f(x)$  plus grossière que  $A_{j-1} f$ . L'information perdue entre deux approximations successives est appelée **détail** :

$$D_j f = A_{j-1} f - A_j f \dots\dots\dots (2.21)$$

Les signaux de détail peuvent également être obtenus par projection du signal  $f(x)$  dans un ensemble d'espaces  $\{W_j, j \in Z\}$ , appelés espaces d'ondelettes.  $W_j$  est un complémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$  :

$$V_j \oplus W_j = V_{j-1} \dots\dots\dots (2.22)$$

Soit  $\psi(x)$  la fonction dont la transformée de Fourier est :

$$\psi(2w) = G(w)\varphi(w) \dots\dots\dots (2.23)$$

où  $G(w) = e^{-jw} \bar{H} * (w + \pi)$

avec  $\bar{H} *$  le complexe conjugué de  $H$

Alors l'ensemble :  $\{\sqrt{2^{-j}} \psi^{-j}(x - 2^{-j} x), n \in Z\}$ , est une base orthonormale de  $W_j$ .

Les fonctions  $\psi_k^j(x)$  sont aussi produites par dilatation et translation d'une fonction  $\psi(x)$ , telles que les fonctions d'échelle :

$$\psi_k^j(x) = 2^j \psi(2^{-j}x - k) \dots\dots\dots(2.24)$$

Le détail  $D_j$  d'un signal  $f(x)$  à la résolution  $R_j$  sera trouvé par projection de  $f(x)$  sur cette base :

$$D_j f = \langle f, \psi_k^j \rangle \dots\dots\dots (2.25)$$

$$D_j f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_0^{-1}, \phi_{n-2k}^0 \rangle \langle f, \phi_n^{j-1} \rangle \dots\dots\dots (2.26)$$

Soit  $G$  le filtre discret de réponse impulsionnelle :

$$g(n) = \langle \psi_0^{-1}, \phi_n^0 \rangle \dots\dots\dots (2.27)$$

Et  $\bar{G}$  le filtre miroir, de réponse symétrique :

$$\bar{g}(n) = g(-n) \dots\dots\dots(2.28)$$

L'expression (2.24) peut s'écrire sous la forme :

$$D_j f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(2k - n) \langle f, \phi_n^{j-1} \rangle \dots\dots\dots (2.29)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(2k - n) A_{j-1} f \quad (\text{en utilisant la relation (2.14)}) \dots\dots\dots (2.30)$$

Cette expression montre que le détail  $D_j$  du signal  $f(x)$  à la résolution  $j$ , qui correspond à la différence d'information entre les approximations  $A_j f$  et  $A_{j-1} f$ , peut être calculé par convolution de l'approximation à la résolution supérieure  $j-1$  avec un filtre  $G$  dont on connaît la réponse impulsionnelle.

Les deux filtres,  $H$  et  $G$  sont des filtres miroirs en quadrature, il sont en rapport par l'expression :

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n) \dots\dots\dots (2.31)$$

La transformée en ondelettes discrètes s'agit donc d'une opération de convolution par les filtres discrets  $\bar{h}(n)$  passe-bas (pour le calcul de l'approximation) et  $\bar{g}(n)$  passe-haut

(pour le calcul des détails), suivie d'une opération de décimation d'un coefficient sur deux Figure II. 7.

## II.6. Reconstruction

Si les espaces  $V_j$  et  $W_j$  sont orthogonaux et complémentaires en  $V_{j-1}$ , l'ensemble formé par leurs bases respectives :  $\{\sqrt{2^{-j}}\phi^{-j}(x-2^{-j}k), \sqrt{2^{-j}}\psi^{-j}(x-2^{-j}k), k \in Z\}$  est une base orthonormale de  $V_{j+1}$ . La fonction d'échelle  $\phi_n^{j-1}(x)$  peut s'écrire dans cette base :

$$\phi_n^{j-1} = 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_k^j, \phi_k^{j-1} \rangle \cdot \phi_k^j(x) + 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_k^j, \phi_k^{j-1} \rangle \cdot \psi_k^j(x) \dots\dots\dots(2.32)$$

Avec les définitions (2.14) et (2.25) :

$$\phi_n^{j-1} = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-2k) \cdot \phi_k^j(x) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-2k) \cdot \psi_k^j(x) \dots\dots\dots(2.33)$$

L'approximation du signal  $f(x)$  à la résolution  $R_{j+1}$  est un élément de l'espace  $V_{j+1}$ , si l'on fait la projection de  $f(x)$  dans les fonctions de base de cet espace :

$$\begin{aligned} A_{j-1}f &= \langle f, \phi_n^{j-1} \rangle \\ &= 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-2k) \langle f(x), \phi_k^j(x) \rangle + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-2k) \langle f(x), \psi_k^j(x) \rangle \dots\dots\dots(2.34) \end{aligned}$$

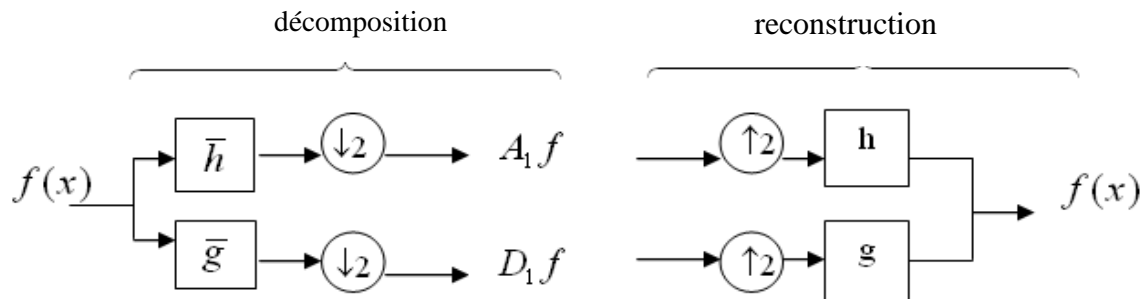
avec (2.14) et (2.25), on aura :

$$A_{j-1}f = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-2k)A_j f + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-2k)D_j f \quad (2.35)$$

Pour obtenir l'approximation au niveau  $j-1$ , il faut faire agir sur l'approximation, et le détail de l'échelle  $j$  l'opérateur d'interpolation suivi d'un filtrage à temps discret, passe-bas (h) pour l'approximation, et passe-haut (g) pour le détail, Figure II. 7.

Cette expression montre que la transformée en ondelettes est susceptible d'inversion : si l'on dispose d'une approximation quelconque à la résolution  $R_k$  et de tous les détails correspondants au résolutions de  $k$  à  $j$ , l'approximation à la résolution  $j+1$ , peut être reconstruite.

C'est cet ensemble de signaux discrets :  $\{A_k f, D_i f, i = k, \dots, j\}$ , qui constitue la représentation orthogonale en ondelettes du signal monodimensionnel  $f(x)$  à la résolution  $j+1$ .



avec :




-  : décimation d'un coefficient sur deux
-  : convolution avec le filtre  $(\bar{h}, \bar{g}, h, g)$
-  : interpolation (mettre un zéro entre deux éléments)

Figure II. 7 : analyse multi-résolutions mono- dimensionnelle

## II.7. Extension en deux dimensions

Dans les applications de traitement d'image, les signaux sont de dimension 2 ; ce sont des images définies par une fonction discrète  $f(x, y)$  ;  $x, y \in Z$  de domaine  $[0, 255]$  niveaux de gris. Dans ce cas, une AMR de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est un ensemble d'espaces vectoriels  $\{V_j^2\}$  qui vérifie des propriétés analogues à celle qu'on a décrit pour  $V_j$ . Si l'AMR est séparable, l'espace  $V_j^2$  peut être considéré comme le produit tensoriel de deux espaces vectoriels de dimension 1 :

$$V_j^2 = V_j \otimes V_j.$$

Les fonctions d'échelle de l'espace  $V_j^2$  ,  $\phi(x, y)$  sont les produits des fonctions d'échelle associées à chaque AMR mono-dimensionnelle :

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \dots\dots\dots (2.36)$$

Considérons maintenant l'espace  $V_{j+1}^2$  :

$$V_{j+1}^2 = V_{j+1} \otimes V_{j+1} \dots\dots\dots (2.37)$$

Qui contient l'espace  $V_j^2$  et son complément orthogonal  $W_j^2$  :

$$V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2 \dots\dots\dots (2.38)$$

En introduisant (2.22) dans (2.37), on aura :

$$\begin{aligned} V_{j+1}^2 &= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\ &= V_j^2 \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \dots\dots\dots (2.39) \end{aligned}$$

En comparant avec (2.38), on voit que :

$$W_j^2 = W_{01} \oplus W_{10} \oplus W_{11} \dots\dots\dots(2.40)$$

$W_j^2$ , l'espace complémentaire de  $V_j^2$  dans  $V_{j+1}^2$ , est la somme discrète de trois espaces  $W_{ik}$ , de dimension 2 qui peuvent s'écrire en fonction des espaces unidimensionnels :

$$W_{01} = V_j \otimes W_j \dots\dots\dots (2.41)$$

$$W_{10} = W_j \otimes V_j \dots\dots\dots (2.42)$$

$$W_{11} = W_j \otimes W_j \dots\dots\dots (2.43)$$

Soit  $\{ V_j^2, j \in \mathbb{Z} \}$  une AMR non séparable de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $\phi(x, y)$  la fonction d'échelle associée définie par (2.36) et l'ondelette qui correspond à la fonction d'échelle unidimensionnelle  $\phi(a)$ . On peut construire une base orthonormée de  $W_j^2$ , en dilatant et en translatant trois fonctions d'ondelettes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x, y) = \phi(x)\psi(y) \\ \psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y) \dots\dots\dots (2.44) \\ \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y) \end{array} \right.$$

L'approximation d'une fonction  $f(x, y)$  à la résolution  $j$  est calculée par sa projection orthogonale dans l'espace  $V_j^2$  :

$$A_j f = \langle f(x, y), \phi^j(x, y) \rangle \dots\dots\dots (2.45)$$

Par un développement analogue à celui détaillé en dimension 1, on obtient :

$$A_j f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(2n-k) \bar{h}(2m-l) \langle f(x, y), \phi^{j-1}(x, y) \rangle$$

$$A_j f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(2n-k) \bar{h}(2m-l) A_{j-1} f \dots\dots\dots (2.46)$$

Les détails qui correspondent à la différence entre deux approximations successives sont donnés par trois projections sur la base décrite par les trois ondelettes définies dans (2.44)

$$D^k_j f = \langle f(x, y), \psi_j^k(x, y) \rangle, \quad k=1,2,3. \dots\dots\dots (2.47)$$

Les projections orthogonales sur l'espace complémentaire  $W^2_j$ , comme les projections (2.45) sur l'espace  $V^2_j$ , peuvent être calculés par convolution séparée en abscisses et ordonnées :

$$D^1_j f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(2n-k) \bar{h}(2m-l) A_{j-1} f \dots\dots\dots (2.48)$$

$$D^2_j f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{h}(2n-k) \bar{g}(2m-l) A_{j-1} f \dots\dots\dots (2.49)$$

$$D^3_j f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bar{g}(2n-k) \bar{g}(2m-l) A_{j-1} f \dots\dots\dots (2.50)$$

On peut prévoir que :

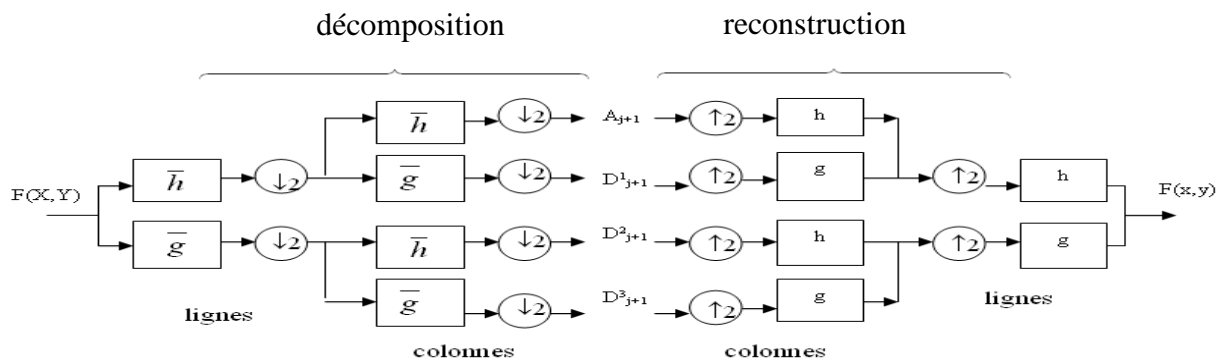
- Chaque approximation  $A_j f$  sera une version chaque fois plus grossière du signal initial, au fur et à mesure que la résolution se dégrade.
- Dans le signal détail  $D^1_j f$ , les hautes fréquences verticales seront dominantes, ce qui correspond aux bords horizontaux (DH).
- Dans le signal détail  $D^2_j f$ , les hautes fréquences horizontales seront dominantes, ce qui correspond aux bords verticaux (DV).
- Dans le signal détail  $D^3_j f$ , tous les points où il y a simultanément des hautes fréquences horizontales et verticales seront mis en évidence (DD).

L'ensemble des signaux bidimensionnels  $\{A_{kf}, (D^1_i f, D^2_i f, D^3_i f), i = k, k+1, \dots, j\}$  constitue la représentation orthogonale en ondelettes d'un signal bidimensionnel  $f$  à la résolution  $j$ . Cette représentation aura exactement le même nombre de points que l'approximation initiale du signal, quelque soit la résolution considérée.

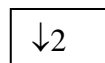
Par une même démarche en tous points analogue à celle suivie dans le cas unidimensionnel, l'approximation de  $f(x, y)$  à la résolution  $j-1$  peut être calculée à partir de l'approximation à la résolution inférieure  $j$  et de l'ensemble des détails correspondants à la différence d'information entre les deux résolutions :

$$A_{j+1}f = 4 \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(2n-k)h(2m-l)A_j f + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(2n-k)g(2m-l)A_j f + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(2n-k)h(2m-l)A_j f + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(2n-k)g(2m-l)A_j f \right] \dots\dots\dots(2.51)$$

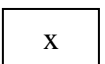
La procédure de décomposition et reconstruction en utilisant les bancs de filtres  $h$  et  $g$ , peut être représenté comme dans le cas unidimensionnel, dans la figure suivante :



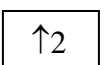
avec :



: décimation d'une ligne (colonne) sur deux



: convolution avec le filtre (h, g)



: interpolation des lignes (colonnes), c'est-à-dire mettre une colonne (ligne) de zéros entre deux.

Figure II. 8 : Analyse multi résolutions en deux dimensions

La figure II. 9 présente un exemple d'une décomposition en deux résolution de l'image LENA

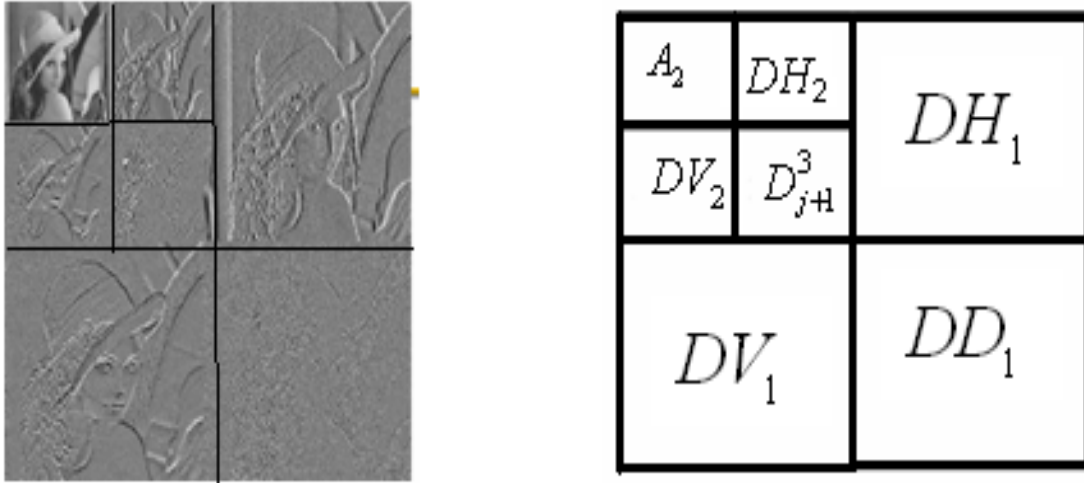


Figure II. 10 : décomposition bidimensionnelle sur deux niveaux de résolution de l'image LENA

## II.8. Conclusion

dans ce chapitre on a présenté les différentes méthodes de décomposition, et d'analyse du signal tel que la transformée de Fourier, la transformée de Fourier à court terme et principalement la transformée en ondelette. Avec l'avantages quelle apporte sur les autres transformées, notamment la bonne localisation temporelle de l'information fréquentielle, aussi la possibilité offerte par la DWT de réaliser une analyse multi-résolutions[7], a permit l'utilisation des ondelettes a la base de quelques algorithmes de compression d'image.

# CHAPITRE III:

## LES ONDELETTES GÉOMÉTRIQUES

### III.1. Introduction

La recherche d'une bonne représentation est un problème central du traitement d'image. On cherche dans la plupart des cas à des bases permettant une représentation creuse des images. C'est-à-dire permettant de bien les approcher avec peu de coefficients. Cette propriété est en effet à la base de nombreux algorithmes de compression ou de débrouillage.

Typiquement, ces représentations sont réalisées par l'intermédiaire d'une transformation orthogonal, non redondante. Actuellement, les choix les plus populaires à cette fin sont la transformée en ondelettes discrètes (DWT) ou la transformation en cosinus discrète (DCT) [9].

La transformée en ondelette est un outil très efficace dans l'analyse et le débrouillage de signaux 1D non stationnaires présentant des *discontinuités ponctuelles*. Néanmoins, les discontinuités présentes dans les images naturelles sont principalement générées par les contours et par conséquent sont distribuées le long d'une courbe lisse dans le plan spatial.

Pour cela de nouvelles techniques de représentation ont été développées telle que les ridgelets, les curveletes et les bandelettes

Ces types de transformations géométriques sont des transformations orthonormales, réversibles, et s'implémente par des algorithmes rapides. Ainsi, ces transformations permettent d'avoir des résultats optimaux d'approximation d'image ; ce qui autorise des algorithmes rapides de compression et de débrouillage d'images.

Dans ce chapitre nous allons essayer de présenter principalement la transformée en ridgelets, et de présenter brièvement les curveletes et les bandelettes.

### III.2. Ondelettes et analyse d'image

Depuis leur introduction il y a deux décennies, les ondelettes ont gagné un intérêt considérable pour le traitement des signaux. L'idée de représenter un signal à plusieurs résolutions permet de capturer ses tendances principales dans seulement quelques coefficients tout en localisant des discontinuités avec précision. En traitement d'images, les ondelettes ont été employées pour différentes applications telles que le débrouillage et la compression, l'une des applications les plus connues en compression d'image est la norme JPEG2000 qui donne des résultats supérieurs que l'ancien norme JPEG basé sur la DCT.

**a) Ondelettes 2D**

La base d'ondelettes bidimensionnelles est construite à partir de l'ondelette  $\psi$  et de la fonction d'échelle  $\phi$  correspondante [4]:

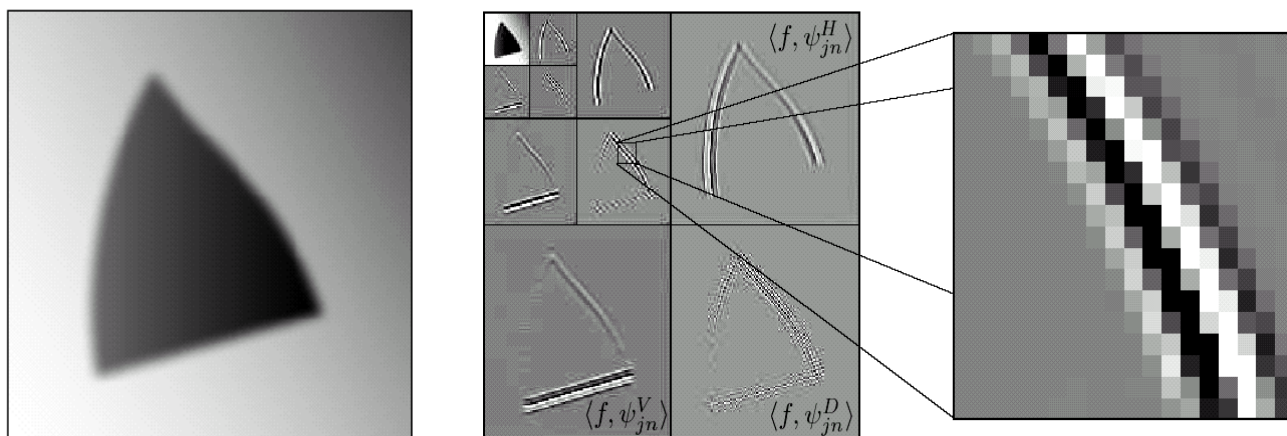
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m1}(x1)\psi_{j,m2}(x2) \\ \psi_{j,m1}(x1)\phi_{j,m2}(x2) \\ \psi_{j,m1}(x1)\psi_{j,m2}(x2) \end{array} \right\}_{j,m1,m2 \in \mathbb{Z}} = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{jn}^H \\ \Psi_{jn}^V \\ \Psi_{jn}^D \end{array} \right\} \quad (1)$$

Avec:  $\phi_{jn}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n)$

Les fonctions bidimensionnelles d'analyse:  $\Psi_{jn}^H$ ,  $\Psi_{jn}^V$  et  $\Psi_{jn}^D$  permettent le calcul des détails horizontales, verticales et diagonales respectivement par moyen de produit scalaire avec le signal.

Dans le cas des images, les ondelettes sont appliquées d'une manière séparable sur l'axe horizontal et vertical (lignes et colonnes). Ceci a comme conséquence d'avoir seulement une décorrélation partiel du signal, qui traduit en blocs de coefficients fortement énergiques le long des contours de l'image Figure III. 1 .

Bien que cette dépendance résiduelle soit réduite et partiellement capturée par des codeurs en sous-bande dans le cas de la compression d'image, il pourrait être d'intérêt d'avoir une transformation qui surmonte ces inconvénients par le filtrage le long des contours de l'image ; Cas des transformations dites géométrique étudiés dans ce rapport.



(a) image originale

(b) Transformée en ondelettes

(c) Zoom

**Figure III. 2** : Une image avec ses coefficients en ondelettes.

### III.3. Ridgelets

La transformée en ondelettes est un instrument puissant pour capturer les singularités ponctuelles. par contre les Ridgelets sont un puissant instrument pour la détection et la représentation des singularités mono-dimensionnelles (lignes) dans l'espace 2D. Elle réalise une représentation très compacte des singularités linéaires dans les images [12].

La mise en œuvre de la transformée en ridgelet est réalisée par la transformation de Radon [11], qui est un outil puissant pour extraire des lignes dans des images dominées par les contours. L'idée de la transformation ridgelet est assez simple : faire suivre une transformation Radon par un étage d'analyse en ondelettes.

Le schémas en blocs suivant illustre le principe général de la ransformation ridgelet

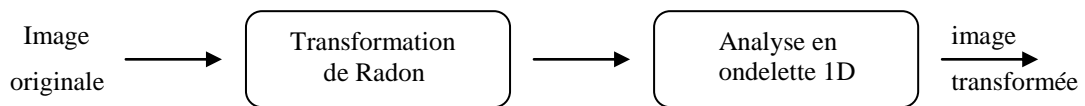


Figure III. 3 : Principe de la transformée en ridgelets

#### a) Transformée de Radon continue (CRT)

La transformée de Radon consiste à projeter un objet (image) sur un certain nombre d'orientations ( $\theta$ ) en intégrant l'objet le long de la direction orthogonale à l'axe de projection par rapport au décalage  $t$  [13].

La transformation de radon est capable de transformer chacune des lignes quelle détecte de l'image a un pic positionné par rapport aux paramètres des lignes (la pente et le décalage).

Dans le domaine obtenu, que nous appèlerons domaine de Radon Figure III. 4 .

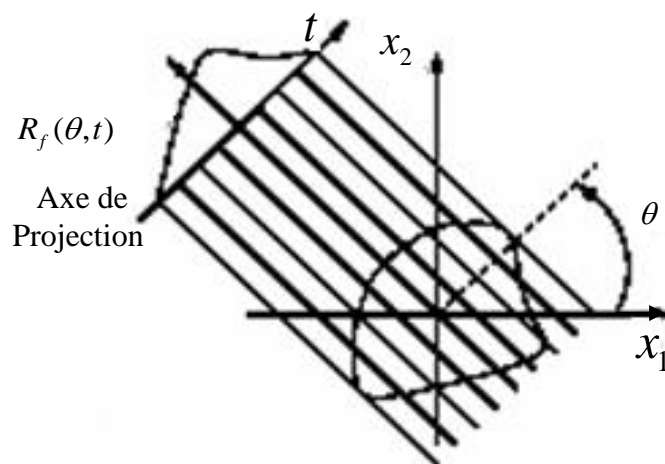


Figure III. 5 : Représentation graphique de la transformée de Radon pour  $\theta$  fixe

A la base la transformée de Radon, renvoi le domaine spatial au domaine de projection  $(\theta, t)$  dans lequel chaque point correspond a une ligne dans le domaine spatial, réciproquement, chaque point dans le domaine spatial Figure III. 4 ; devient une courbe sinus dans le domaine de projection[2].

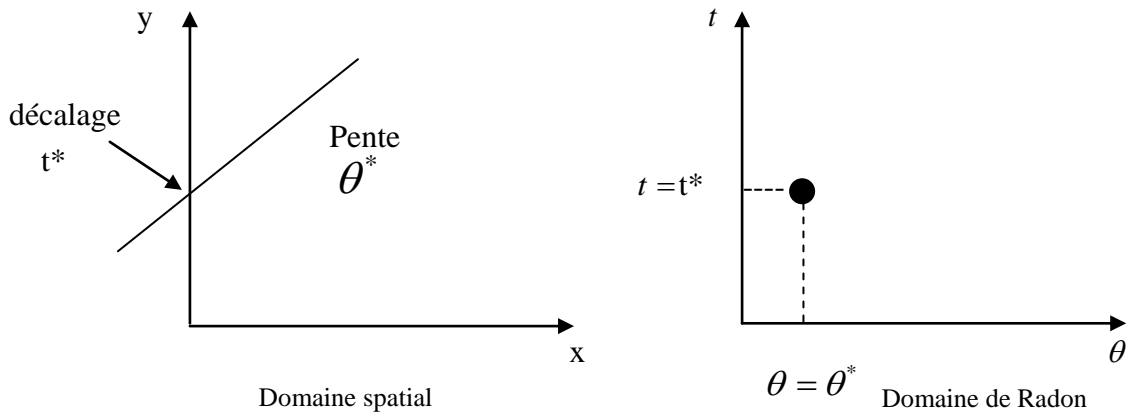


Figure III. 6 :Transformation de Radon d'une ligne

Soit  $f(x_1, x_2)$  une fonction bidimensionnelle intégrable, la transformation de Radon (RDN) de  $f$  est donnée par, [12] :

$$RDN_f(\theta, t) = \int_{R^2} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2 \quad (3.2)$$

Où  $\delta$  représente la distribution de Dirac.

**b. Transformée en ridgelets continues**

La transformation en ridgelets continues est simplement l'application de la transformée en ondelettes monodimensionnelle sur les arêtes obtenus par la transformation de radon [9][12] : figure III. 7

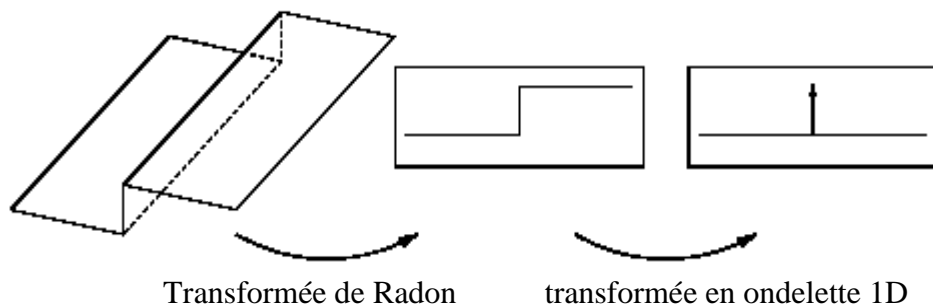


Figure III. 8 : Exemple de transformation en ridgelet

La transformée en ridgelets d'une fonction bidimensionnelle  $f(x_1, x_2)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 CRT_f(a,b,\theta) &= \int_R \psi_{a,b}(t) RDN_f(\theta,t) dt \\
 &= \int_R \psi_{a,b}(t) \left( \int_{R^2} f(x_1, x_2) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dx_1 dx_2 \right) dt \\
 &= \int_R f(x_1, x_2) \left( \int_{R^2} \psi_{a,b}(t) \delta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t) dt \right) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Avec :  $\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2}((t-b)/a)$ , est l'ondelette monodimensionnelle. a et b sont respectivement les facteurs de dilatation et translation.

Et la fonction bidimensionnelle d'analyse  $\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2)$  (3.3) est appelé *Ridgelet* est elle défini à partir du fonction d'ondelettes  $\psi(t)$  comme suit, [9] :

$$\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2) = a^{-1/2} \psi((x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b)/a) \tag{3.4}$$

Notons que la fonction ridgelet est constante le long des lignes où  $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = \text{const}$  et orienté par un angle  $\theta$ . Figure III. 9 [9] représente un exemple de fonction Ridgelet

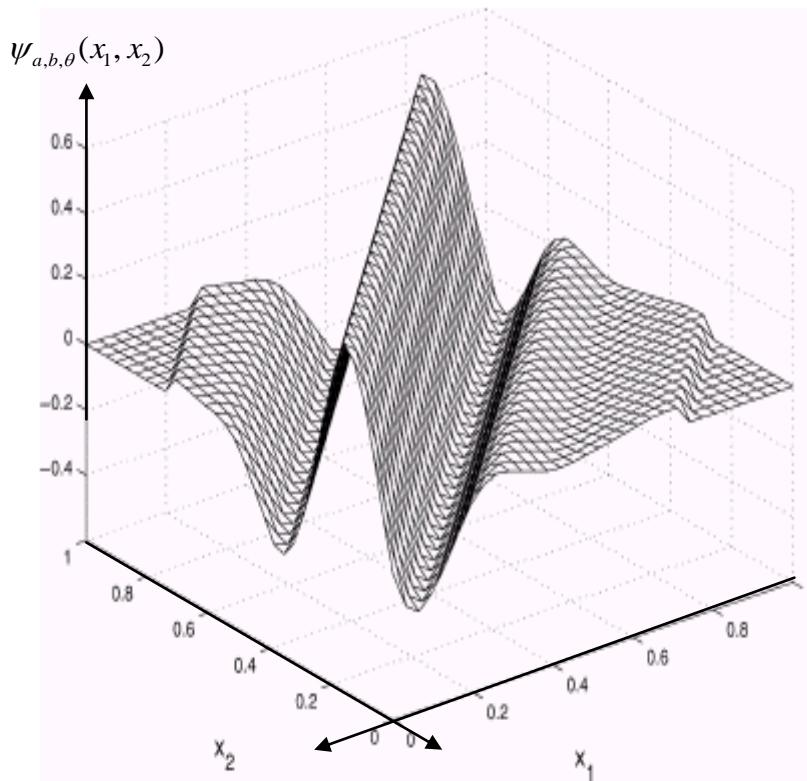


Figure III. 10 : Exemple d'une fonction Ridgelet  $\psi_{a,b,\theta}(x_1, x_2)$

Par comparaison, la transformée en ondelettes continus (CWT) dans l'espace bidimensionnel peut être écrite comme suit [9][14]:

$$W_f^2(a_1, a_2, b_1, b_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{a_1, a_2, b_1, b_2}(x) f(x) dx. \quad (3.5)$$

Où l'ondelette bidimensionnel est le produit tensoriel :

$$\psi_{a_1, a_2, b_1, b_2}(x) = \psi_{a_1, b_1}(x_1) \psi_{a_2, b_2}(x_2) \quad (3.6)$$

De deux ondelettes monodimensionnelles :  $\psi_{a,b}(t) = a^{-1/2} \psi((t-b)/a)$

La CRT ressemble donc au CWT 2D sauf que les paramètres  $(b_1, b_2)$  du point sont remplacés par les paramètres  $(b, \theta)$  de la ligne. En autre terme, ces transformations multi-échelles en 2D sont reliés par [9][14] :

Ondelettes :  $\rightarrow \psi_{echelle, position\ du\ point}$

Ridgelet :  $\rightarrow \psi_{echelle, position\ de\ la\ ligne}$

Par conséquent, les ondelettes sont très appropriés pour la représentation des objets avec des singularités isolées de type point, alors que les ridgelets sont très pertinentes en représentation des objets avec des singularités le long de lignes.

Notons que l'application de la transformée de Fourier 1D à la place du DWT 1D dans l'équation (3.3) donne une transformation de Fourier 2D [9][14][12]. Plus spécifiquement, supposons  $F_f(w)$  soit la transformée de Fourier d'une fonction  $f(t)$ , on a donc [9] :

$$F_f(w \cos \theta, w \sin \theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-jw t} R_f(\theta, t) dt. \quad (3.7)$$

La Figure III.7 représente la relation entre les transformations : Ridgelets, Ondelettes et de Fourier

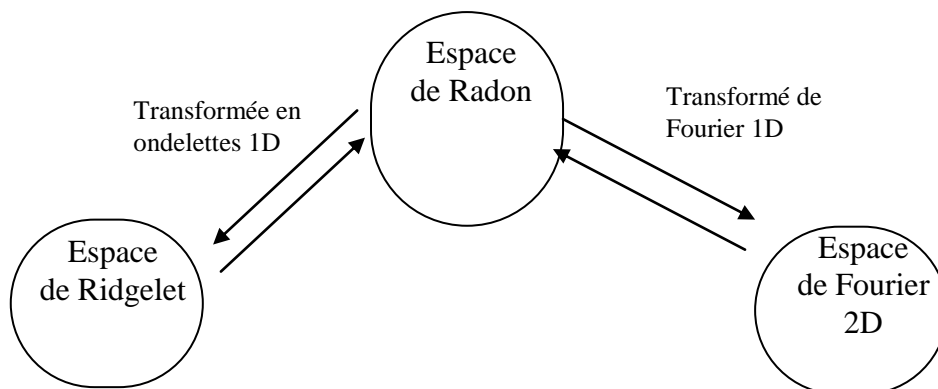


Figure III. 11 : Relation entre les transformations Ridgelet- Radon et Radon- Fourier 2D.

### III.4. Transformée de Radon discrète ( FRAT usel)

La mise en œuvre de la transformée en Ridgelet dans un programme, nous mène a développé une transformée de Radon discrète.

Plusieurs discrétisation de la transformée de Radon ont été proposées pour approximer la formule continue, mais plusieurs d'entre elle ne sont pas réversible. Comme solution une théorie appelée la transformation de Radon finie est proposée pour couvrir le problème de réversibilité. (FRAT : finit Radon Transform) [10][9]

#### III.4.1 Définition

La transformée de radon finie (FRAT) est définie comme la sommation des pixels de l'image sur une certaine direction ou ligne . Ces lignes sont définies dans une géométrie finie d'une façon similaire comme les ligne de la transformée de Radon dans la géométrie Euclidienne.

Soit  $Z_p = \{0,1,\dots,p-1\}$ , où  $p$  est un nombre premier,  $Z_p$  un champ fini. Pour de futur convenances , soit  $Z_p^* = \{0,1,\dots,p\}$ .

Le FRAT d'une fonction réel  $f$  dans un espace finie  $Z_p^2$  est définit comme.

$$r_k[l] = \text{FRAT}_f(k,l) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{(i,j) \in l_{k,l}} f[i,j] \quad \dots\dots(3.8)$$

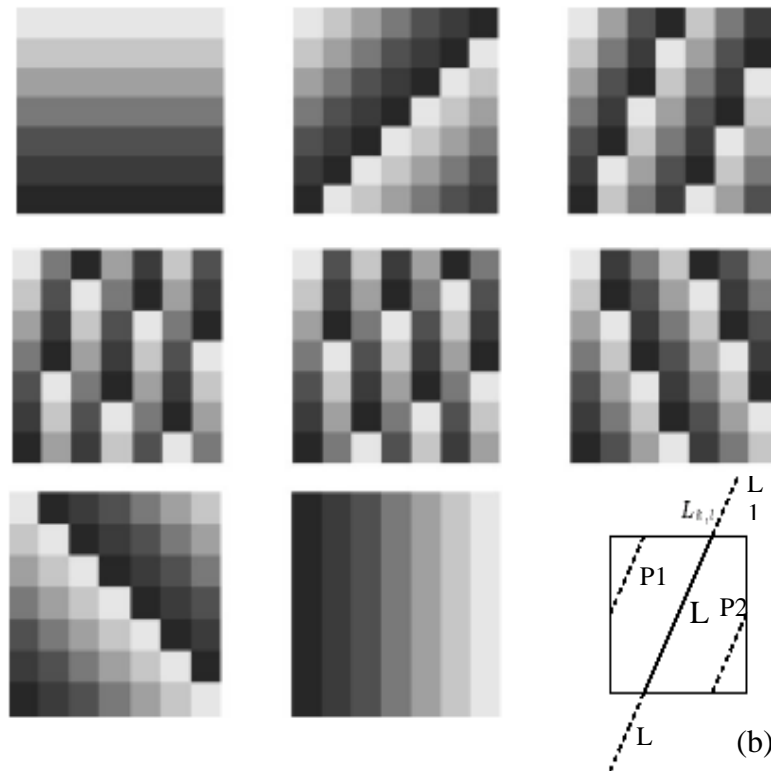
Ici  $l_{k,l}$  est l'ensemble de points formant une ligne dans le domaine  $Z_p^2$

Où  $k$  est la pente et  $l$  est le décalage.

$$\begin{cases} L_{k,l} = \{(i,j) : j = ki + l(\text{mod } p), i \in z_p\} \\ L_{p,l} = \{(l,j) : j \in z_p\} \end{cases} \quad 0 \leq k < p, \quad (3.9)$$

On constate que dans le domaine du FRAT, l'énergie est rendue mieux compacte si la moyenne de l'énergie de l'image est soustraite de l'image  $f(i,j)$ , avant d'effectuer l'opération (3.8), ce qui est assumé par la suite. Aussi on introduit le facteur  $p^{-1/2}$ , comme facteur de normalisation entre l'image originale et l'image transformée. Juste comme la géométrie euclidienne. Une ligne  $L_{k,l}$  dans le plan  $Z_p^2$  est représentée uniquement par sa pente ou sa direction.  $k \in Z_p^*$  ( $k = p$  correspond a la pente infinie ou aux lignes verticales), et son décalage  $l \in Z_p$ .

La figure III. 12 , montre un exemple de toutes le lignes qui peuvent se trouvées dans une image de taille  $p^2$  , et vous pouvez remarquer qu'il y a  $(p + 1)$  directions , et un nombre de  $p^2 + p$  de lignes. le FRAT obtenu est une matrice de dimension  $(p + 1) * p$  .



**Figure III. 13 :** (a) Lignes pour le FRAT 7x7. Des lignes parallèles sont groupées en chacune des huit directions possibles. Les images dans l'ordre de haut en bas, de gauche à droite correspondent aux valeurs de k de 0 à 7. Dans chaque image, des Pixels dans différentes lignes sont assignés avec différents niveaux de gris. (b) tout autour de la ligne L l'addition des pixels P1 et P2 vient pour compléter les segments L1 et L2, respectivement , elle est définie par le reste de l'opération de division par p

### III.5. Transformée de Radon finie inverse

La transformée de Radon finie inverse FBP( finit back projection), est définie comme la somme des coefficients de Radon de toutes les lignes qui passent par un point donné [9]

Alors on a :

$$FBP_r [i, j] = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{(k,l) \in p_{i,j}} r_k [l] \quad , (i, j) \in Z_p^2 \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

Où  $p_{i,j}$  représente l'ensemble d'index de toutes les lignes qui passent par un point  $(i, j) \in Z_p^2$

Plus précisément, en utilisant (3.9) on peut écrire

$$P_{i,j} = \{(k, l) : l = j - k \cdot i \pmod{p}, k \in Z_p\} \cup \{(p, i)\} \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

On remplaçant (3.8) dans (3.11) , on obtient

$$\begin{aligned}
 FBP_r[i, j] &= \frac{1}{p} \sum_{(k,l) \in P_{i,j}} \sum_{(i',j') \in L_{k,l}} f[i', j'] \\
 &= \frac{1}{p} \left( \sum_{(i',j') \in z_p^2} f[i', j'] + p \cdot f[i, j] \right) = f[i, j] \dots\dots\dots (3.12)
 \end{aligned}$$

Alors la transformée inverse définie dans (3.11) calcule le FRAT inverse pour les image, donc on a un algorithme de reconstruction exacte et efficace pour le FRAT.

### III.6. Ordonnancement optimal des coefficients de la transformée de Radon finie

Le FRAT décrit dans la section précédente, utilisant (3.9) comme méthode pour la définition des lignes du la grille  $Z_p^2$  via deux paramètres : la pente  $k$  et le décalage  $l$ . Cependant ce n'est ni la manière unique, ni la meilleur méthode pour notre but.

Considérons une définition plus générale des lignes dans le plan finie  $Z_p^2$

$$L'_{a,b,t} = \left\{ (i, j) \in z_p^2 : a \cdot i + b \cdot j - t = 0 \pmod{p} \right\} \dots\dots\dots (3.13)$$

Où  $a, b, t \in Z_p$  et  $(a,b) \neq (0,0)$ .

Cela est par analogie avec l'équation de la ligne  $(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - t = 0)$  dans  $R^2$ . Par conséquent, pour une ligne finie définie dans (3.13),  $(a,b)$  a le rôle du vecteur normal, alors que  $t$  est le paramètre de translation .

Pour atteler (3.9) avec (3.13), on considère l'équation générale de la ligne dans (3.13).

$$ai + bj - t = 0 \dots\dots\dots (3.14)$$

Si  $b \neq 0$  puis (3.14)  $\Leftrightarrow j = -b^{-1}a \cdot i + b^{-1}t$  où  $b^{-1}$  est l'inverse multiplicatif de  $b$  dans le champ fini  $Z_p$  ;  $bb^{-1} = 1 \pmod{p}$ . autrement, si  $b = 0$  alors il est nécessaire que  $a \neq 0$ , ainsi

(3.14)  $\Leftrightarrow i = a^{-1}t$  . en assortissant l'équation de ligne dans (3.9) et (3.13), on a se qui suit.

$$\begin{aligned}
 L'_{a,b,t} &\equiv L_{k,l} && \text{si } a = -kb, b \neq 0, t = bl, \text{ pour } 0 \leq k < p \text{ et} \\
 L'_{a,b,t} &\equiv L_{p,l} && \text{si } a \neq 0, b = 0, t = al.
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, il y a plusieurs choix entre les paramètres dans (3.13) et (3.9) pour tracer une ligne, précisément  $p-1$  pour chaque ligne. Il est évident de voir que pour  $c \in Z_p, c \neq 0$  puis  $\{cl : l \in Z_p\}$  est le même que l'ensemble  $Z_p$ . Pour un vecteur normal

fixe  $(a, b)$ , l'ensemble des lignes parallèle  $\{L'_{a,b,t} : t \in Z_p\}$  est égale à l'ensemble des lignes  $\{L_{k,t} : t \in Z_p\}$  avec la même pente  $k$ , où  $k = -b^{-1}a$  pour  $b \neq 0$  et  $k = p$  pour  $b = 0$ .

D'ailleurs, l'ensemble des lignes avec le vecteur normal  $(a,b)$  est aussi égale à l'ensemble des lignes avec le vecteur normal  $(na, nb)$ , pour chaque  $n = 1, 2, \dots, p-1$ .

Avec la spécification général de la ligne dans (3.13), en définie le nouveau FRAT.

$$r_{a,b}[t] = FRAT_f(a, b, t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{(i,j) \in L'_{a,b,t}} f[i, j] \dots\dots\dots (3.15)$$

De la discussion ci dessus, on voit que la nouvelle séquence du FRAT :

$(r_{a,b}[0], r_{a,b}[1], \dots, r_{a,b}[p-1])$ , est simplement un ordonnancement de la séquence de projection  $(r_k[0], r_k[1], \dots, r_k[p-1])$ , de (3.8). Cet ordonnancement est très important, puisque par la suite nous allons appliquer une transformée en ondelette 1D sur chaque projection du FRAT. Il est clair que les vecteurs normaux choisis  $(a,b)$  contrôlent l'ordre des coefficients dans chaque projection du FRAT.

Le FRAT usuel décrit dans la section précédente utilise un ensemble de  $(p+1)$  vecteurs normal  $u_k$ , où

$$\left. \begin{aligned} u_k &= (-k, 1) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, p-1, \text{ et} \\ u_p &= (1, 0). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

Pour fournir une représentation complète, on a besoin que le FRAT soit défini comme dans (3.15) avec un ensemble de  $p+1$  vecteurs normaux  $\{(a_k, b_k) : k \in Z_p^*\}$  tels qu'ils couvrent tous les  $p+1$  projections du FRAT représentées par  $\{u_k : k \in Z_p^*\}$ .

On a  $p-1$  choix pour chacun des vecteurs normaux comme suit :

$$(a_k, b_k) = nu_k, \quad 1 \leq n < p-1$$

Donc quel est le bon choix pour les  $p+1$  vecteurs normaux du FRAT ?

Pour cela on a ce qui suit :

On définit :  $W_p = e^{-2\sqrt{-1}\pi/p}$  , la transformée de Fourier discrète (DFT) de la fonction  $f$  dans  $Z_p^2$  peut être écrite comme

$$F[u, v] = \frac{1}{P} \sum_{(i, j) \in Z_p^2} f[i, j] W_p^{ui+vj} \dots\dots\dots (3.17)$$

Et pour les projections du FRAT dans  $Z_p$  comme

$$R_{a,b}[\omega] = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{t \in Z_p} r_{a,b}[t] W_p^{ot} \dots\dots\dots (3.18)$$

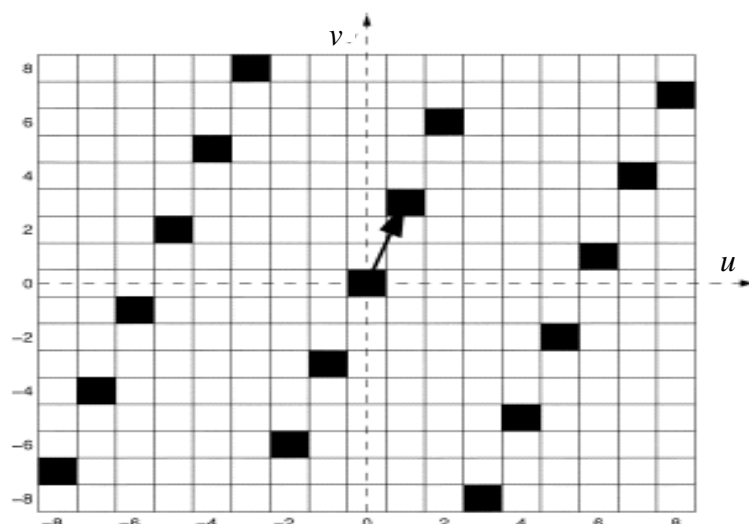
**Théorème :** la DFT 1D  $R_{a,b}[\omega]$  de la projection  $r_{a,b}[t]$  est identique à la DFT 2D  $F[u, v]$  de  $f[i, j]$  évaluée le long de tranche discret à travers l'origine à la direction (a,b) :

$$R_{a,b}[\omega] = F[a\omega, b\omega] \dots\dots\dots (3.19)$$

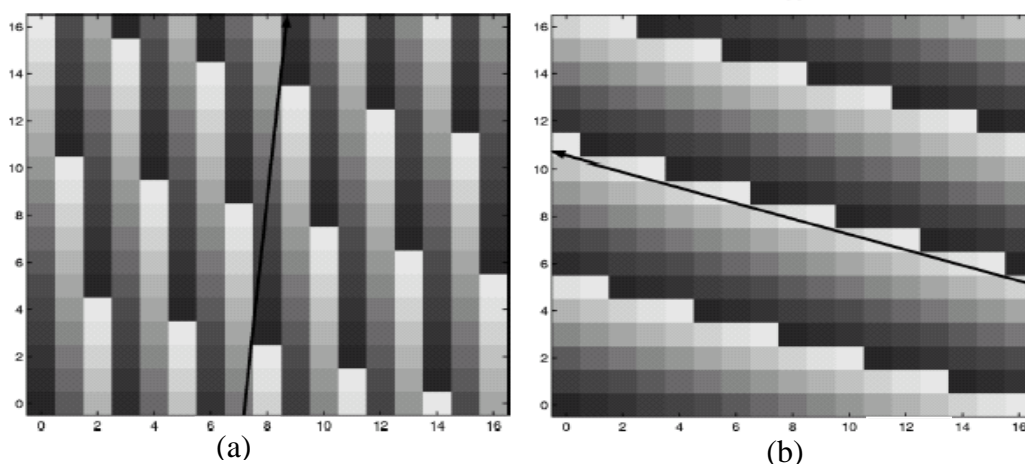
D'après l'équation (3.19), on peut remarquer le rôle des vecteurs normaux (a,b) du FRAT dans le domaine de Fourier :il contrôle l'ordre des coefficients des tranches de Fourier correspondantes.

En particulier,  $F[a, b]$  est égale à la première composante harmonique de la séquence de projection du FRAT avec le vecteur normal (a,b). Pour , les images naturelles par exemple, la majorité d'énergie est concentré dans les basses fréquences. Donc, pour assurer que chaque projection du FRAT soit lisse où les basses fréquences dominant. Alors, il peut être bien représenté par la transformée de l'ondelette, le vecteur normal (a,b) représenté doit être choisi pour être le plus proche possible de l'origine du le plan de Fourier. Figure 3.9 illustre ça en montrant un exemple d'une tranche discrète de Fourier.

Le vecteur normal de la projection du FRAT correspondante peut être choisie comme un vecteur de l'origine vers n'importe quel autre point dans la tranche de Fourier. Le choix du vecteur normal (a,b) comme le point le plus proche de l'origine, cause la direction de la projection du FRAT représentée. Pour avoir le moindre de tout autour « wrap around »,dû à la périodisation de la transformée. L'effet du nouvel ordonnancement des coefficients du FRAT est illustré dans la figure (3.8) pour le même exemple. Il est visible que l'effet du tout autour est très réduit avec l'ordonnancement optimal comparer avec celui du FRAT usuel.



**Figure III. 14:** Exemple d'une tranche du domaine de Fourier discret (indiquer par les cases noires) avec le meilleur vecteur normal pour la projection du FRAT. Dans cet exemple,  $p=17$  et la pente  $k=11$ . Le meilleur vecteur normal est  $(a,b)=(1,3)$ .



**Figure III. 15:** lignes des projection du FRAT comme montrer dans Fig. (9) en utilisant : (a) l'ordonnancement usuel, (b) l'ordonnancement optimal. Les flèches indiquent les directions représentées dans chaque cas.

On définit l'ensemble optimal de  $p+1$  vecteurs normaux  $\{(a_k^*, b_k^*) : k \in Z_p^*\}$  comme suit

$$(a_k^*, b_k^*) = \arg \min_{(a_k, b_k) \in \{n \cdot u_k : 1 \leq n \leq p-1\}} \|(C_p(a_k), C_p(b_k))\| \dots \dots (3.20)$$

*St.  $C_p(b_k) \geq 0$*

Ici  $c_p(x) = x - p * \text{round}(x/p)$ . Ainsi,  $\|(C_p(a_k), C_p(b_k))\|$  représente la distance entre l'origine et le point  $(a_k, b_k)$  dans le domaine périodique de Fourier comme montrer dans la figure III. 16

Le figure III. 17 illustre les différents ensembles de directions pour le FRAT usuel et le FRAT optimal

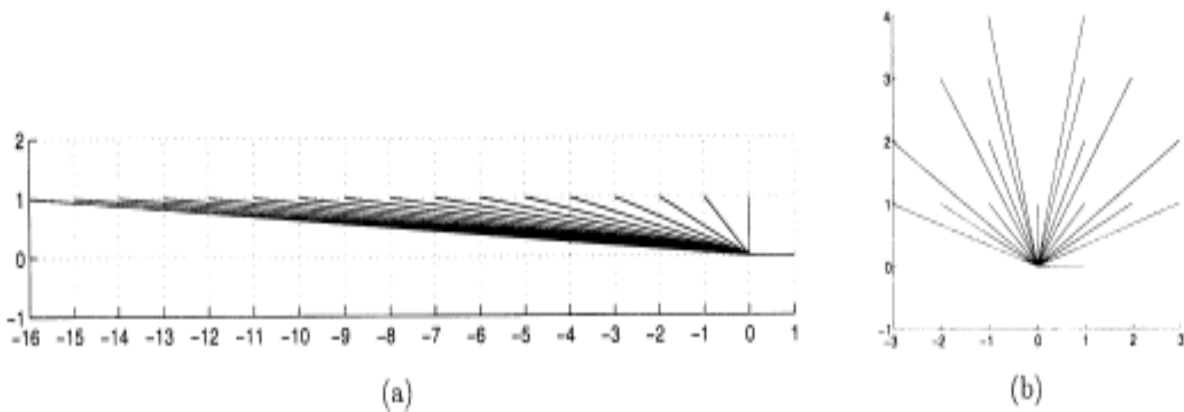


Figure III. 18: Ensemble des vecteurs normaux pour le FRAT de taille  $p=17$  : (a) ordonnancement usuel ; (b) ordonnancement optimal.

### III.7. Transformée en ridgelets finies orthogonales

Avec un FRAT réversible et en appliquant (3.3), on peut obtenir une transformée en ridgelets discrète réversible en prenant la DWT sur chaque séquence de projection du FRAT,  $(r_k[0], r_k[1], \dots, r_k[p-1])$ , où la direction  $k$  est fixée. On appelle le résultat obtenu la transformée en ridgelets finie FRIT (finite ridgelet transform). La Figure III. 19 dépeint ces étapes

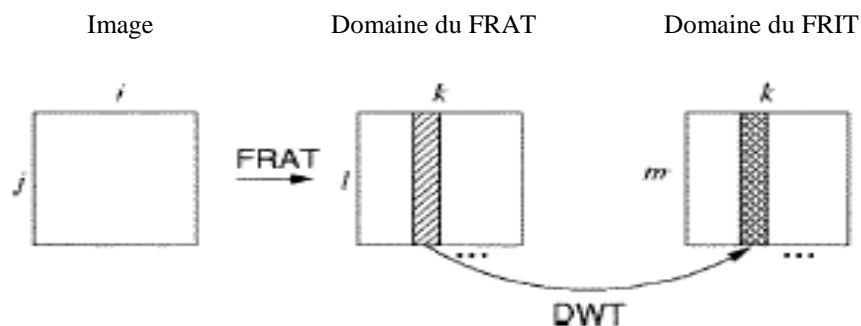
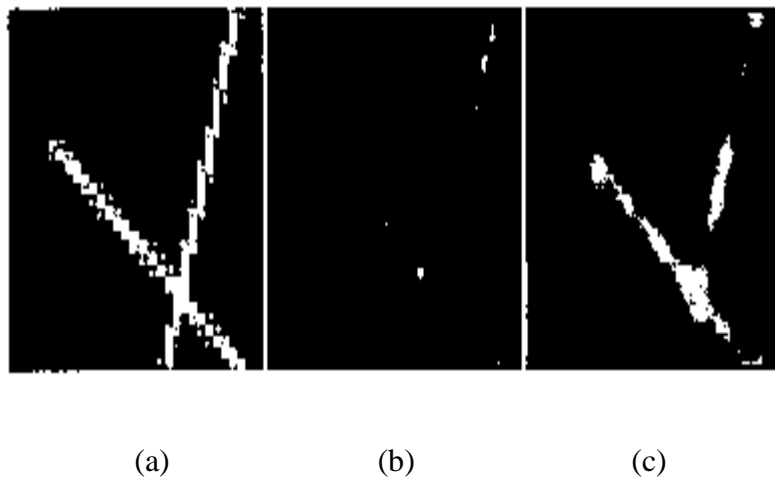


Figure III. 20 : Les étapes de la transformée en ridgelet finie (FRIT)

Le FRAT est redondant et non orthogonal. On peut enlever cette redondance et obtenir une transformation orthogonale. Le FRIT a besoin d'une image d'entrée de dimension  $p \times p$ , où  $p$  est un nombre premier[9], c'est une limitation importante de cet algorithme ; de plus

les ondelettes exigent habituellement un signal de longueur dyadique et c'est absolument incompatible avec la sortie du FRAT. En pratique, on étend la taille du FRAT pour avoir une taille dyadique[9].

Le figure III. 21 : représente une image artificielle 31x31 reconstruite avec l'ondelette (Dauhechies 9,7) et Ridgelets. Dans ce cas, le FRIT est capable de détecter les structures de types lignes utilisons même un très faible nombre de coefficients.



**Figure III. 22** : Image artificielle : (a) image originale, (b) reconstruite par 20 coefficients d'ondelettes, et (c) reconstruite par le même nombre de coefficients de Ridgelet

### III.10. Conclusion

Les bases d'ondelettes sont très efficaces pour la représentation des zones régulières, les textures homogènes et les discontinuités ponctuelles. Néanmoins, les discontinuités présentes dans les images naturelles sont principalement générées par les contours et conséquent sont distribuées le long d'une courbe lisse dans le plans spatial. La transformée en ondelettes est sous optimale pour ce type de géométrie.

Les techniques de représentation par ondelettes géométriques, récemment proposés, repose sur une exploitation efficace des régularités qui apparaissent dans les structures géométriques des images. Ces régularités ne sont pas mises à profit par les transformations traditionnelles telle que l'ondelettes ou la DCT.

Les transformations géométriques permettent une approximation optimale pour une classe plus complexe d'images géométriques. Ces techniques sont basées sur une analyse en

ondelettes dans un espace géométrique. Elles peuvent être réversibles, non redondantes et peuvent être calculées par des algorithmes rapides.

La transformation Ridgelet utilise la transformation on ondelettes 1D sur les singularités de types ligne calculer par la transformation de Radon. Cependant, la transformation Ridgelet est appropriée seulement aux discontinuités le long des lignes droites. Pour l'employer sur des images complexes, on est besoin d'utiliser d'autres techniques. Par exemple on peut utiliser premièrement une division en quad-tree de l'image en petits blocs et alors appliquer le ridgelet ou utiliser la transformation curvelet qui est basée sur une application localisée de ridgelets.

Les techniques de représentation par ondelettes géométriques permettent des résultats optimaux d'approximation d'images illustrées par des applications de compression et de débrouillage.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail réalisé dans ce mémoire, a pour objectif l'étude d'une méthode de représentations des images par les ondelettes géométriques : les ridgelets, et leurs applications dans le domaine de compression d'image.

Nous nous sommes basé sur la transformée en ridgelets, qui utilise la transformation de Radon pour la détection des singularités de type ligne et de les transformées par la suite en singularités points facilitant l'implémentation des ondelettes mono- dimensionnelles, qui traitent efficacement ce type de singularité.

Après l'étude théorique qu'on a menée, nous pouvons dire que la transformée en ridgelets est un moyen très efficace pour la représentation des zones droite, là où se produit des variations brusques, et qu'elle approche mieux les images avec peu de coefficients.

Par contre les ondelettes sont un moyen très efficace pour la représentation des zones homogènes et/ou régulières, mais elles sont sous optimales pour les discontinuités le long des lignes.

On peut conclure que les ridgelets appliquées par la manière étudiée dans notre travail ne sont souhaitées que pour les discontinuités le long des lignes droites. Pour des images plus complexes, où les zones sont d'une forme incurvée, la transformée en ridgelets ne peut pas rapporter une représentation efficace. Cependant, la décomposition en blocs avant d'appliquer la ridgelet local sur chaque bloc, peut améliorer la représentation d'image.

# ***BIBLIOGRAPHIES***

- [1] V. Chappelier "Codage progressif d'images par ondelettes orientées" Thèse de Doctorat. Université de Rennes 1, 2005.
- [2] A. Boukaache "Compression d'images hautes définitions en utilisant une transformation hybride" Thèse de doctorat 2012 Guelma algérie
- [3] E. H. Adelson, E. Simon, & R.Hingorani, "Orthogonal pyramid transform for image coding," *In Visual Communications and Image Processing: VCIP'87*, volume 845 II, pp. 50-59, 1987.
- [4] M.Shapiro, Jerome. Embedded Image Coding Using Zero Trees of Wavlets Coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*. December 1993, Vol. 41, 12.
- [5] Amir Said, William A.Pearlman. A New ,Fast, and Efficient Image Codec Based on Set Partitioning in Hierarchical Trees. *IEEE Transactions on signal processing*. June 1996, Vol. 6, 3.
- [6] L.Donoho, David. *Fast Ridgelet Transforms in dimention 2*. s.l. : Departement of statistics ,Stanford University, October 1997. 514.
- [7] Z. Lu, D. Y. Kim & W. A. Pearlman, "Wavelet compression of ECG signals by the set partitioning in hierarchical trees algorithm," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 47(7), pp. 849- 856 2000.
- [8] W.A. Pearlman, B.-J. Kim & Z. Xiong, "Embedded video subband coding with 3D SPIHT," Chap. 24 in *Wavelet Image and Video Compression*, N. P. Topiwala, Ed., 397- 432, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998.
- [9] S. Chang & L. Carin, "A Modified SPIHT Algorithm for Image Coding With a Joint MSE and Classification Distortion Measure," *IEEE Trans. Image Processing*, 15(3), pp. 713-725, 2006.
- [10] M. Akter, M. B. I. Reaz, F. Mohd-Yasin& F. Choong, "A Modified-Set Partitioning in Hierarchical Trees Algorithm for Real-Time Image Compression," *Journal of Communications Technology and Electronics*, 53(6), pp. 642–650, 2008
- [11] ABDELKRIM, OUAFI. Compression d'images fixes biomédicales par les transformées en ondelettes associées aux algorithmes de quantification vectorielle et de codage entropique. *Mémoire de Magister*. s.l. : Université MOHAMED KHIDER de BISKRA, 2001.
- [12]. DATASET OF STANDARD 512X512 GRAYSCALE TEST IMAGES. *departement Ciencias de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de l'Université de Grenade* . [Online] [Cited: Octobre 7, 2012.] <http://decsai.ugr.es/cvg/CG/base.htm>.
- [13] G.Jagadeeswar Reddy, T.Jayachandraprasad, M.N.Giriprasad, M. Madhavi Latha & T. Satya Savithri. Curvelets with new quantizer for image compression. *Global journal of computer science and technology*. 12, April 2012, Vol. 12, 0975-4172.
- [14] C. D-Faundez , V. Lecuire, "Compression et transmission d'images sur réseau decapteurs sans fil sous la contrainte de l'énergie," Journées non thématiques ResCom, Strasbourg, octobre, 2008.