



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR ELOUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et applique

Thème

**Sur une classe d' équations
fonctionnelles-intégrales non linéaire**

Présenté par : Derouiche Safa
Terki Samira

Soutenu publiquement devant le jury composé de

I.BEN ALI	MCA	Président	Univ. El Oued
E. ZAUCHE	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
B.HAFOUDHA	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018



Dédicace

*Je dédie le fruit d'années d'efforts
Pour le chef-d'œuvre merveilleux de Dieu de tout fatigué
de la paume des mains, les gens qui méritent mon respect
et mon amour*

Ma chère mère

*À la chose la plus précieuse que j'ai, à ceux qui
m'enseignent les principes de la science et de la
connaissance*

Cher Père

*À leurs yeux, ma joie et leur joie dans ma vie, mes frères
et sœur*

*À l'ami qui a supporté avec moi les difficultés de notre travail
*Samira**

À mes professeurs et enseignants

*qui ont suivi mes études et mes études tout au long de
ma carrière académique*

*À mes collègues de l'université, en particulier une
deuxième année Mathématique appliquée à l'Université*

Echahid Hamma Lakhdar d'El OUED

À tous ceux-ci j'ai consacré ce mémoire.

Safa Derouiche





Dédicace

*Je dédie le fruit d'années d'efforts
Pour le chef-d'œuvre merveilleux de Dieu de tout fatigué
de la paume des mains, les gens qui méritent mon respect
et mon amour*

Ma chère mère

*À la chose la plus précieuse que j'ai, à ceux qui
m'enseignent les principes de la science et de la
connaissance*

Cher Père

*À leurs yeux, ma joie et leur joie dans ma vie, mes frères
et sœur*

*À l'ami qui a supporté avec moi les difficultés de notre travail
*Safa**

À mes professeurs et enseignants

*qui ont suivi mes études et mes études tout au long de
ma carrière académique*

*À mes collègues de l'université, en particulier une
deuxième année Mathématique appliquée à l'Université*

Echahid Hamma Lakhdar d'El OUED

À tous ceux-ci j'ai consacré ce mémoire.

Samira Terki



Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Zaouche El Mehdi** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Un remerciement spécial et sincère au **Prof. Nisse Lamine**, de l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued pour Son aide et sa sympathie.

Nous voudrions également remercier mon collègue **Ali Maamra** pour nous avoir aidé et pour ses précieux conseils, et nous lui souhaitons bonne chance.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2018 de Mathématiques et nos amis pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Notations	iv
Introduction	1
1 <i>Préliminaires</i>	3
1.1 Espaces fonctionnels	3
1.1.1 Espace vectoriel normé	3
1.1.2 Espace de Banach	5
1.1.3 Espace $C^k([a, b])$	6
1.1.4 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$	7
1.2 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle	8
1.2.1 Suites et séries des fonctions	8
1.2.2 Le conexcité et la compacité	10
1.3 Topologie faible	11
1.4 Notions sur les opérateurs	12
1.4.1 Les opérateurs linéaires continus	12
1.4.2 Opérateur compact	12
1.4.3 Opérateur contractant	13
1.4.4 Opérateur intégral	13
1.4.5 Opérateur produit	13
1.5 Quelques théorèmes du point fixe	14
1.5.1 Principe de contraction de Banach	14

1.5.2	Théorème du point fixe de Schauder ([12])	15
2	<i>Équations intégrales de Volterra : Classification et quelques théorèmes d'existence et d'unicité</i>	16
2.1	Classification par linéarité des équations intégrales de Volterra	16
2.1.1	Équations intégrales linéaires de Volterra	16
2.1.2	Équations intégrales non linéaires de Volterra	17
2.2	Quelques théorèmes d'existence et d'unicité d'un solution des équations intégrales de Volterra	18
2.2.1	Équation intégrale linéaire de Volterra	18
2.2.2	Équation intégrale de Volterra non linéaire	24
3	<i>Existence d'une solution d'une classe d'équation fonctionnelle-intégrale</i>	35
3.1	Préliminaires	35
3.1.1	Quelques notions relatives à l'espace L^1	35
3.1.2	Mesure de non compacité faible	37
3.2	Théorème d'existence de solution d'une classe d'équation fonctionnelle- intégrale	39
	Conclusion	49
	Bibliographie	50

Notations

$\mathbb{R}$	: l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	: l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{C}$	: l'ensemble des nombres complexes.
c.s	: convergence simple.
c.u	: convergence uniforme.
$L(X, Y)$	: l'ensemble des applications linéaires de X dans Y .
$L(X, X)$	: $= L(X)$.
$\mathcal{L}(X, Y)$	: l'ensemble des applications linéaires et continues de X dans Y .
$\mathcal{L}(X, X)$	: $= \mathcal{L}(X)$.
X'	: $= \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ telle que } f \text{ linéaire et continue}\}$.
$C([a, b], \mathbb{R})$	: l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
$C_b([a, b], \mathbb{R})$	: l'ensemble des fonctions continues et bornées de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
k_x	: $= \frac{\partial k}{\partial x}$.
p.p	: prés que par tout.
$B(0, r)$	: $= \{x \in X, \ x\ \leq r\} = B_r$.
$\overline{X}^w$	: fermeture faible d'un ensemble X .
$co(X)$	: l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble X .
$\ \cdot\ _1$	: $= \ \cdot\ _{L^1(\mathbb{R}_+)}$.
$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^d)$	: l'espace des fonctions bornées sur X .
$\sup \text{ ess } f$	: $= \inf\{c, \text{ tell que } f(x) < c \text{ p.p sur } \Omega\}$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des équations fonctionnelles-intégrales apparaissent dans la formulation mathématique de nombreuses de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique. Elle peut être formulée sous la forme d'une équation fonctionnelle intégrale. C'est un domaine de recherche actif d'un point de vue de la mathématiques appliquées et la physique mathématique.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence d'une solution dans l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}_+)$ d'un type d'équation fonctionnelle-intégrale de la forme

$$x(t) = f_1\left(t, \int_0^t k(t, s)f_2(s, x(s))ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

où les fonctions f_1, f_2 et k satisfont aux conditions de Carathéodory. L'équation (1) contient plusieurs types d'équations intégrales de Volterra. Par exemple, l'équation intégrale non linéaire de type Volterra-Hammerstein et l'équation intégrale linéaire classique de Volterra. La preuve utilisée pour avoir une solution de l'équation (1) est basée sur la méthode du point fixe (théorème du point fixe de Schauder) en utilisant la notion de la mesure de non compacité faible.

Nous vous présentons dans ce document des définitions bien connues et quelques théorèmes importants d'existence et d'unicité des solutions des équations intégrales de Volterra. La partie importante de ce travail consiste à étudier l'existence d'une solution d'une classe d'équation fonctionnelle-intégrale (1) dans l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}_+)$. Nous avons réparti ce mémoire en trois chapitres :

Le première chapitre contient un rappelle sur certaines notions utilisées tout au long de ce mémoire, comme les espaces fonctionnelle (l'espace de fonction continue, l'espace Banach, les espaces de Lebesgue), quelques outils utilisés pour les opérateurs (opérateur contractant, ...). D'ailleurs, on énonce certains théorèmes de point fixe, ce sont le principe de contraction de Banach et le théorème de Schauder.

Le deuxième chapitre est consacré à présenter une classification par la linéarité des équations intégrales de Volterra (linéaire et non linéaire), avec des exemples sur tous les types. D'ailleurs, on introduit certains théorèmes d'existence et d'unicité pour les cas linéaire et non linéaire dans l'espace des fonctions continues $C([0, a], \mathbb{R})$ et l'espace des fonctions continues et bornées $C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Les différentes techniques utilisées pour prouver l'existence sont la méthode de la résolvante et le principe de contraction de Banach.

Finalement, le dernier chapitre de ce mémoire porte sur l'existence d'une solution dans l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}_+)$ de l'équation fonctionnelle-intégrale (1) où les fonctions f_1, f_2 et k satisfont aux conditions de Carathéodory. Tout d'abord, on commence à introduire quelques notions relatives à l'espace L^1 et aux fonctions de Carathéodory. Ensuite, on voit la définition de la mesure de non compacité faible et les outils concernés dont deux exemples très important sur cette définition. Enfin, en appliquant le théorème du point fixe de Schauder et à l'aide de la notion de la mesure de non compacité faible, on peut prouver l'existence d'une solution de (1). Nous donnons également un exemple qui peut s'appliquer à cette équation fonctionnelle-intégrale.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient certaines notions et quelques outils utilisées tout au long de ce mémoire concernant la topologie faible et l'analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel)

On définit sur un ensemble non vide X deux opérations, l'addition $(+)$ des éléments X et la multiplication $(\cdot)$ par un scalaire. Si les conditions suivantes vérifiées :

1. $(X, +)$ est un groupe abélien,
2. $\forall (x, y) \in X \times X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a :
 - * $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
 - * $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
 - * $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$
 - * $1.x = x,$

on dit que X est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, et noté par $(X, +, \cdot)$.

Définition 1.1.2 (La norme)

Soit X un espace vectoriel. Une norme sur X est une application de X dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tous x, y dans X et tout α dans $\mathbb{K}$:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité),
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.3 (Espace vectoriel normé)

Un espace vectoriel X muni d'une norme $\|\cdot\|$, noté $(X, \|\cdot\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1

Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur $[a, b]$. L'application $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $g \longmapsto \|g\| = \max_{x \in [a, b]} \left\{ |g(x)| \exp(-Lx) \right\}$ telle que $L \geq 0$ est une norme sur X . En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \|g\| = 0 &\Leftrightarrow \max_{x \in [a, b]} \left\{ |g(x)| \exp(-Lx) \right\} = 0 \\
 &\Leftrightarrow |g(x)| \exp(-Lx) = 0, \quad \forall x \in [a, b] \\
 &\Leftrightarrow |g(x)| = 0, \quad \forall x \in [a, b] \\
 &\Leftrightarrow g(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b] \\
 &\Leftrightarrow g = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \|\lambda g\| &= \max_{x \in [a, b]} \left\{ |\lambda g(x)| \exp(-Lx) \right\} \\
 &= \max_{x \in [a, b]} \left\{ |\lambda| |g(x)| \exp(-Lx) \right\} \\
 &= |\lambda| \max_{x \in [a, b]} \left\{ |g(x)| \exp(-Lx) \right\} \\
 &= |\lambda| \|g\|.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \|g + h\| &= \max_{x \in [a, b]} \left\{ |g(x) + h(x)| \exp(-Lx) \right\} \\
 &\leq \max_{x \in [a, b]} \left\{ (|g(x)| + |h(x)|) \exp(-Lx) \right\} \\
 &\leq \max_{x \in [a, b]} \left\{ |g(x)| \exp(-Lx) \right\} + \max_{x \in [a, b]} \left\{ |h(x)| \exp(-Lx) \right\} \\
 &\leq \|g\| + \|h\|.
 \end{aligned}$$

Donc, $\|\cdot\|$ est une norme sur X .

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.4 (Convergence simple de suite)

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge simplement vers un élément $x \in X$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.5 (Suite de Cauchy)

Soit X un espace vectoriel normé. Toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon,$$

est appelée suite de Cauchy.

Proposition 1.1.1

Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve.

Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite converge vers l , cela veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon : \|x_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\forall n, m \geq N_\varepsilon : \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - l\| + \|l - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par conséquent, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

Définition 1.1.6 (Espace complet)

Un espace X est dit complet, si dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.1.7 (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 1.1.2

$(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.1.3 Espace $C^k([a, b])$ **Définition 1.1.8 (Fonction continue)**

Soient $f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ une application et $y \in X$.

- *On dit que f est continue en point y si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(y, \varepsilon) > 0 : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

- *On dit que f est continue sur X si et seulement si pour toute $y \in X$, f est continue en y .*
- *On dit que f est uniformément continue sur X si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ tels que } \forall x, y \in X : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon.$$

Définition 1.1.9 (Fonction Lipschitzienne)

On dit que f est c -Lipschitzienne si :

$$\exists c > 0 \text{ tels que } \forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\|_Y \leq c \|x - y\|_X.$$

Définition 1.1.10 (Famille équicontinue)

- *Soit $\mathcal{F}$ une famille des fonctions continues sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue en point $y \in \Omega$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in \Omega : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

- *On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur Ω si et seulement s'il est équicontinue en tout point $y \in \Omega$.*

Définition 1.1.11 (Module de continuité d'une fonction)

- Une module de continuité est une fonction $\omega : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ utilisée pour mesurer quantitativement la continuité uniforme de fonctions.
- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet ω pour module de continuité si et seulement si

$$\forall x, y \in I : |f(y) - f(x)| \leq \omega(f, |y - x|),$$

où

$$\omega(f, h) = \max_{\substack{x, y \in I \\ |y - x| \leq h}} |f(y) - f(x)|, \quad h \in \mathbb{R}_+.$$

Proposition 1.1.2

Pour $h \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(f, h) = 0$, et $h \mapsto \omega(f, h)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 1.1.1

- Une fonction est uniformément continue si et seulement si elle admet un module de continuité.
 - Le module $\omega(t) = ct$ correspond aux fonctions c -lipschitziennes.
- Le module $\omega(t) = ct^\alpha$ aux fonctions höldériennes .
- En général, le rôle de ω est de fixer une dépendance fonctionnelle explicite de ε en δ dans la définition de la continuité uniforme.

Définition 1.1.12 (Espace $C^k([a, b])$)

$(f \in C^k([a, b])) \Leftrightarrow (f \text{ est dérivable jusqu'à l'ordre } k \text{ et sa dérivée d'ordre } k \text{ est continue})$,
muni de la norme

$$\|f\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a, b]} |f^{(i)}(t)|.$$

1.1.4 Espaces des Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.13 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < +\infty$.

$L^p(\Omega)$ est l'espace des classes des fonctions mesurables de puissance p -ème intégrable, i.e :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Pour $p = 1$:

L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace de toute le fonction intégrable sur Ω .

- Pour $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tell que : } \exists c > 0 \ |f(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega \right\},$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ c \geq 0 \mid \mu(\{f(x) > c\}) = 0 \right\}$$

Théorème: 1.1.1 (de Fischer-Riesz) ([6])

$\forall p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.2 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Suites et séries des fonctions

1) Suites des fonctions

Définition 1.2.1 (Suite des fonctions uniformément bornée)

On dit qu'une suite des fonctions (f_n) d'un espace normé X dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$) est uniformément bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad |f_n(x)| \leq M \quad (\text{ou } \|f_n(x)\| \leq M).$$

Il est équivalent de dire que la suite des normes $\|f_n(x)\|_\infty$ est bornée par M ou bien que les fonctions f_n sont toutes dans une boule $B(0, M)$ de l'espace normé $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions bornées sur X .

Convergence d'une suite des fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide.

a) Convergence simple

$$\left(f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{c.s.} f \text{ quand } n \rightarrow \infty\right) \iff \left(\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)\right).$$

b) Convergence uniforme

$$\left(f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{c.u.} f \text{ quand } n \rightarrow \infty\right) \iff \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0\right).$$

2) Séries des fonctions

|| Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une suite des fonctions de terme général f_n et (S_n) est des sommes partielles tel que $S_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

Convergence d'une série des fonctions

a) Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I lorsque la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles converge simplement sur I .

b) Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur I lorsque la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles converge uniformément sur I .

c) Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur I si la série numérique à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty}$ est convergente.

Proposition 1.2.1

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge normalement sur I alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur I .

Corollaire 1.2.1

Soit une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série de fonctions définies sur

$I \subset \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f_n(x)| \leq u_n.$$

Alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente, donc elle est uniformément convergente sur I .

1.2.2 Le conexcité et la compacité

Définition 1.2.2 (Convexe)

Un sous-ensemble U d'un espace vectoriel X est dit convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in U, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in U.$$

Définition 1.2.3 (Compact)

Soit U un ensemble d'un espace normé X . On dit que U est compact si pour tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts)}; U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}.$$

Théorème: 1.2.1 (Bolzano-Weierstrass)

Un ensemble U d'un espace normé X est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de U , on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de U .

Théorème: 1.2.2 (Mazur) ([22])

Soit U un sous-ensemble d'un espace de Banach X , l'enveloppe convexe fermée, notée par $co(U)$, est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de X qui contenant U . Ensuite, l'enveloppe convexe fermée d'un sous-ensemble compact $U \subset X$ est également compact.

Définition 1.2.4 (Relativement compact)

Soit U un ensemble d'un espace normé X . On dit que U est relativement compact si son adhérence $\overline{U}$ est compact.

Théorème: 1.2.3 *Tout ensemble borne d'un espace normé de dimension finie est relativement compact.*

Théorème: 1.2.4 (Arzéla-Ascoli)

Soit (K, d) un espace métrique compact. Un sous-ensemble U de $C(K, \mathbb{R}^n)$ est relativement compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- U est borné c'est-à-dire :

$$\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b], f \in U.$$

- U est équicontinue c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in U \quad x, y \in [a, b].$$

1.3 Topologie faible

Pour les notions de la topologie faible on réfère à ([6],[11]).

Définition 1.3.1 *La topologie faible sur un Banach X est la topologie la moins fine (celle qui a le moins d'ouverts) telle que toutes les formes linéaires du dual X' restent continues.*

Définition 1.3.2 (Convergence faible de suite)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X et soit x un élément de X , alors

$$\left(x_n \rightharpoonup x \text{ (Converge faiblement)} \right) \iff \left(\exists f \in X' \text{ tel que } f(x_n) \longrightarrow f(x) \text{ (Converge simple)} \right).$$

Théorème: 1.3.1 (Eberlein-Smulian)

Soit X Banach et $U \subset X$ faiblement compact. Alors de toute suite de U on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers un élément de U .

Définition 1.3.3 (Ensemble faiblement relativement compact)

On dit qu'une partie U de X est faiblement relativement compact si et seulement si $\overline{U}$ est faiblement compact.

1.4 Notions sur les opérateurs

1.4.1 Les opérateurs linéaires continus

Définition 1.4.1 (Opérateur linéaire)

Soit $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ un opérateur. On dit que T est linéaire si :

$$\forall u, v \in X \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \quad T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv.$$

Proposition 1.4.1 Soit $T \in L(X, Y)$. Alors T est continu si et seulement s'il existe une constante positive M telle que pour tout $u \in X$ on a $\|Tu\|_Y \leq M\|u\|_X$.

Proposition 1.4.2 ([6])

Si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors on a :

$$\sup_{u \in X - \{0_X\}} \frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X} = \sup_{u \in X, \|u\|_X \leq 1} \|Tu\|_Y = \sup_{u \in X, \|u\|_X = 1} \|Tu\|_Y.$$

Ces quantités sont finies si et seulement si T est continu et on note alors $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. De plus, l'application $\mathcal{L}(X, Y) \ni T \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(X, Y)$.

Proposition 1.4.3

Soient X et Y deux espaces normés, $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire et $x_0 \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) L'opérateur T est continu sur X .
- 2) L'opérateur T est continu au point x_0 .
- 3) $\exists M > 0, \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$.

1.4.2 Opérateur compact

Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y . On dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .

1.4.3 Opérateur contractant

Soient X un espace vectoriel normé et T un opérateur borné. L'opérateur T est dite contractant s'il existe une constante L telle que $0 \leq L < 1$ et

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X : \quad \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

1.4.4 Opérateur intégral

Définition 1.4.2 Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $k(., .)$ et $\varphi(.)$ deux fonctions mesurables définies respectivement sur $[a, b] \times [a, b]$, $[a, b]$. Tout opérateur T admet une formulation de la forme suivante (de façon formelle) :

$$(T\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

s'appelle opérateur intégral linéaire.

Noyau d'un opérateur

La fonction mesurable k est dite noyau de l'opérateur intégral T .

1.4.5 Opérateur produit

Soient T_1 et T_2 deux opérateurs intégraux sur $L^p(X)$ avec des noyaux k_1 et k_2 respectivement, l'opérateur produit noté T_1T_2 envoie aussi $L^p(X)$ dans $L^p(X)$, où

$$(T_1T_2)\varphi = T_1(T_2\varphi).$$

Si les noyaux k_1 et k_2 justifient l'inter changement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau k du produit T_1T_2 en fonction de k_1 et k_2 .

$$\begin{aligned} T_1T_2\varphi(x) &= \int_X k_1(x, z) \int_X T_2\varphi dz \\ &= \int_X k_1(x, z) dz \int_X k_2(z, y)\varphi(y)dy \\ &= \int_X \varphi(y)dy \int_X k_1(x, z)k_2(z, y)dz. \end{aligned}$$

D'où l'opérateur $T_1 T_2$ est un opérateur intégral d'un noyau,

$$k(x, y) = \int_X k_1(x, z) k_2(z, y) dz.$$

Notons que si, on prend $T_1 = T_2 = T$, d'un noyau $k_1 = k_2 = k$, alors l'opérateur $T_1 T_2 = T^2$ admet un noyau $k_2(x, y)$ donné par :

$$k_2(x, y) = \int_X k(x, z) k(z, y) dz,$$

par itération le noyau $k_n(x, y)$ de T_n est

$$k_n(x, y) = \int_X k(x, z) k_{n-1}(z, y) dz.$$

1.5 Quelques théorèmes du point fixe

Définition 1.5.1 (Point fixe)

Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur. On dit que $\varphi \in X$ est un point fixe d'opérateur T si :
 $T\varphi = \varphi$.

1.5.1 Principe de contraction de Banach

Théorème: 1.5.1 Soit X un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ un opérateur contractant, alors T admet une point fixe unique.

Preuve.

Considérons la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que φ_0 donné et $\varphi_n = T(\varphi_{n-1})$ pour $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \varphi_m\| &\leq \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| + \dots + \|\varphi_{m+1} - \varphi_m\| \\ &= \|T(\varphi_{n-1}) - T(\varphi_{n-2})\| + \dots + \|T(\varphi_m) - T(\varphi_{m-1})\|. \end{aligned}$$

D'après le fait que T est contractant, on obtient :

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq L\|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\| + \dots + L\|\varphi_m - \varphi_{m-1}\|,$$

et par récurrence on a :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi_m\| &\leq (L^{n-1} + L^{n-2} + \dots + L^{m-1})\|\varphi_1 - \varphi_0\| \\ &\leq \frac{L^{m-1}}{1-L}\|\varphi_1 - \varphi_0\|.\end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à $\|\varphi_n - \varphi_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et comme X est un espace de Banach, alors la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, i.e :

$$\exists \varphi_0 \in X, \text{ telle que } \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi_0.$$

On va montrer que φ_0 est un point fixe de l'opérateur T . En effet :

$$\begin{aligned}0 \leq \|T(\varphi_0) - \varphi_0\| &\leq \|T(\varphi_0) - T(\varphi_n)\| + \|\varphi_{n+1} - \varphi_0\| \\ &\leq L \|\varphi_0 - \varphi_n\| + \|\varphi_{n+1} - \varphi_0\|,\end{aligned}$$

d'où $\|T(\varphi_0) - \varphi_0\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} L \|\varphi_0 - \varphi_n\| + \|\varphi_{n+1} - \varphi_0\| = 0$. Donc $T(\varphi_0) = \varphi_0$.

Montrons l'unicité du point fixe :

On suppose que $\varphi_0 \neq \psi_0$ deux des points fixes de T on obtient :

$$\begin{aligned}\|\varphi_0 - \psi_0\| &= \|T(\varphi_0) - T(\psi_0)\| \\ &\leq L \|\varphi_0 - \psi_0\| \\ &< \|\varphi_0 - \psi_0\|.\end{aligned}$$

C'est une contradiction. Alors $\varphi_0 = \psi_0$. ■

1.5.2 Théorème du point fixe de Schauder ([12])

Théorème: 1.5.2 (Théorème du point fixe de Schauder généralisé)

Soit Ω un ensemble convexe et fermé dans un espace de Banach X et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application continue tel que $T(\Omega)$ est relativement compact. Alors T admet un point fixe.

Théorème: 1.5.3 (Théorème du point fixe de Schauder)

Suppose que Ω un ensemble convexe et compact dans un espace de Banach X et $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application continue . Alors T admet un point fixe.

Chapitre 2

Équations intégrales de Volterra : Classification et quelques théorèmes d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre, nous allons présenter une classification selon la linéarité des équations intégrales de Volterra ainsi que quelques théorèmes d'existence et d'unicité.

2.1 Classification par linéarité des équations intégrales de Volterra

2.1.1 Équations intégrales linéaires de Volterra

Définition 2.1.1 Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction d'une variable définie sur $[a, b]$, k une fonction de deux variables définie sur $[a, b] \times [a, b]$ et λ un paramètre réel. Toute équation à une inconnue $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

s'appelle équation intégrale linéaire de Volterra non homogène de seconde espèce d'un noyau k .

Remarque 2.1.1

- Si $f \equiv 0$ l'équation intégrale (2.1) doit prendre la forme :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

et s'appelle équation intégrale linéaire de Volterra homogène de seconde espèce.

- Si le noyau $k(x, t)$ prend la forme de $L(x - t)$, où L est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, l'équation (2.1) s'appelle aussi équation intégrale de Renwal.

Définition 2.1.2 Toute équation à une inconnue $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

est dite équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Exemples 2.1.1

- $\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt.$
- $\varphi(x) = \ln(x) + 2 \int_0^x \frac{2 + \cos x}{2 + \sin t} \varphi(t) dt.$
- $\varphi(x) = 2 \int_0^x (x^2 + 6) \varphi(t) dt.$
- $e^x \sin(x) = \int_0^x \frac{\cosh x}{\cosh t} \varphi(t) dt.$
- $\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 \varphi(t) dt.$

2.1.2 Équations intégrales non linéaires de Volterra

Définition 2.1.3 Soit $F : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non linéaire par rapport à troisième variable. Toute équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x F(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.2)$$

s'appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce non homogène.

Remarque 2.1.2

- Si $f \equiv 0$ l'équation (2.2) peut alors s'écrire comme suit :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x F(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [a, b]$$

et dite équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce homogène.

- Si $F(x, t, \varphi(t)) = k(x, t)g(t, \varphi(t))$ où $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire par rapport à deuxième variable, l'équation (2.2) s'appelle aussi équation intégrale de Hammerstein .

Définition 2.1.4 Toute équation à une inconnue $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = \int_a^x F(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [a, b]$$

s'appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce.

Exemples 2.1.2

- $\varphi(x) = x(1 - e^x) + \int_0^x e^{(x-t)} e^{\varphi(t)} dt.$
- $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} x \cos x = \int_0^x \sin(x-t) \sin(\varphi(t)) dt.$
- $\varphi(t) = x^2 e^{-x} + \int_0^x (a(x) + t) \sin(xt) e^{-x} \cdot \left[\frac{1}{t^2 + 1} + \frac{t}{2t + 1} \varphi(t) \sin(\varphi(t)) \right] dt.$

2.2 Quelques théorèmes d'existence et d'unicité d'un solution des équations intégrales de Volterra

2.2.1 Équation intégrale linéaire de Volterra

Considérons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (2.3)$$

où k et f sont des fonctions continues respectivement sur $[0, a] \times [0, a]$ et $[0, a]$.

Définition 2.2.1 (Résolvante d'une équation intégrale)

On appelle résolvante d'une équation intégrale, toute fonction $R(x, t, \lambda)$ que l'on définit formellement comme suit :

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, t),$$

où $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante :

$$k_1(x, t) = k(x, t) \quad \text{et} \quad k_n(x, t) = \int_t^x k(x, s) k_{n-1}(s, t) ds, \quad n \geq 2.$$

Remarque 2.2.1

La résolvante $R(x, t, \lambda)$ vérifie formellement l'équation suivante :

$$R(x, t, \lambda) = k(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) R(s, t, \lambda) ds.$$

En effet, on a $k_n(x, t) = \int_t^x k(x, s) K_{n-1}(s, t) ds$, et

$$\begin{aligned} R(x, t, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, t) \\ &= k_1(x, t) + \lambda k_2(x, t) + \lambda^2 k_3(x, t) + \dots \\ &= k_1(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) k_1(s, t) ds + \lambda^2 \int_t^x k(x, s) k_2(s, t) ds + \dots \\ &= k_1(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) \left[k_1(s, t) + \lambda k_2(s, t) + \lambda^2 k_3(s, t) + \dots \right] ds \\ &= k_1(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(s, t) ds \\ &= k_1(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) R(s, t, \lambda) ds \\ &= k(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) R(s, t, \lambda) ds. \end{aligned}$$

Théorème: 2.2.1

Soit k une fonction continue sur $[0, a] \times [0, a]$ et f une fonction continue sur $[0, a]$. L'équation (2.3) admet une solution unique et continue dans $[0, a]$, donnée par la formule :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

Remarque 2.2.2

Si $\lambda = 0$, $\varphi(x) = f(x)$ est une solution triviale, par la suite on suppose $\lambda \neq 0$.

Avant de démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1 (Gronwall)

Soient $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty[$ deux fonctions continues et c un nombre positif.

On suppose que

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)ds \quad 0 \leq t \leq \alpha. \quad (2.4)$$

Alors on a :

$$f(t) \leq c \exp \int_0^t g(s)ds \quad 0 \leq t \leq \alpha. \quad (2.5)$$

Preuve.

On suppose que $c > 0$. En divisant (2.4) par :

$$[c + \int_0^t g(s)f(s)ds],$$

et en multipliant par $g(t)$, il vient :

$$f(t)g(t)/[c + \int_0^t g(s)f(s)ds] \leq g(t). \quad (2.6)$$

En intégrant (2.6) sur $[0, t]$, on obtient :

$$\ln([c + \int_0^t g(s)f(s)ds]/c) \leq \int_0^t g(s)ds,$$

alors

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)ds \leq c \exp \int_0^t g(s)ds.$$

D'où (2.5).

Montrons (2.5) pour $c = 0$:

Comme g est une fonction continue sur un compact $[0, \alpha]$, alors

$$\int_0^t g(s)ds < \infty,$$

donc

$$\lim_{c \rightarrow 0} c \exp \int_0^t g(s) ds = 0.$$

Ce implique que $f(t) \leq 0$, comme $f(t) \geq 0$, on déduit que l'on a $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. ■

Preuve du Théorème 2.2.1.

1) Existence de la solution :

On cherche la solution de l'équation (2.3) sous la forme d'une série entière suivant les puissances de λ comme :

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \varphi_n(x).$$

On remplace formellement φ dans l'équation (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \cdots + \lambda^n \varphi_n(x) + \cdots \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n \geq 0} \lambda^n \varphi_n(t) \right) dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) (\varphi_0(t) + \lambda \varphi_1(t) + \lambda^2 \varphi_2(t) + \cdots + \lambda^n \varphi_n(t) + \cdots) dt. \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme les coefficients on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x k(x, t) \varphi_0(t) dt = \int_0^x k(x, t) f(t) dt \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x k(x, t) \varphi_1(t) dt = \int_0^x k(x, t) \left[\int_0^t k(t, z) f(z) dz \right] dt \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= \int_0^x k(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Maintenant, on prouve que la série des fonctions $\sum_{n=0} \lambda^n \varphi_n(x)$ est une solution de l'équation (2.3). Il suffit de montrer qu'elle est uniformément convergente.

On a :

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)| &= |f(x)| \leq F \\ |\varphi_1(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t)\varphi_0(t)|dt \leq MFx \\ |\varphi_2(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t)\varphi_1(t)|dt \leq \frac{1}{2}M^2Fx^2, \end{aligned}$$

et par récurrence, on peut montrer que l'on a :

$$|\varphi_n(x)| \leq \int_0^x |k(x,t)\varphi_{n-1}(t)|dt \leq FM^n \frac{x^n}{n!}, \quad \forall n \geq 1$$

où

$$\begin{aligned} M &= \max_{(x,t) \in [0,a]^2} |k(x,t)|. \\ F &= \max_{x \in [0,a]} |f(x)|. \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $\lambda^n \varphi_n(x)$ converge normalement, ce implique qu'elle est converge uniforme pour toute valeur de λ sur l'intervalle $[0, a]$. En effet :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,a]} |\lambda^n \varphi_n(x)| &\leq \frac{F\lambda^n M^n}{n!} \sup_{x \in [0,a]} |x^n| \\ &\leq \frac{F\lambda^n M^n}{n!} |a^n|. \end{aligned}$$

On pose :

$$U_n = \frac{F\lambda^n M^n}{n!} |a^n|.$$

Utilisant la règle d'Alembert, il vient

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\frac{F\lambda^{n+1}M^{n+1}a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{F\lambda^n M^n a^n}{n!}} \\ &= \frac{\lambda M a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1. \end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation intégrale (2.3) existe.

2) Unicité de la solution :

On suppose qu'il existe deux solution φ_1 et φ_2 de l'équation (2.3). Si on pose :

$$\Psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad \forall x \in [0, a]$$

on obtient :

$$\Psi(x) = \lambda \int_0^x k(x, t) \Psi(t) dt, \quad \forall x \in [0, a]$$

ce qui implique que l'on a :

$$|\Psi(x)| \leq |\lambda| M \int_0^x |\Psi(t)| dt.$$

D'après le Lemme 2.2.1 (de Gronwall) :

$$|\Psi(x)| = 0, \quad \forall x \in [0, a].$$

D'où

$$\Psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0, \quad \forall x \in [0, a]$$

ou bien

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad \forall x \in [0, a].$$

On conclut que l'équation intégrale (2.3) admet une solution unique. ■

Théorème: 2.2.2 *Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce :*

$$f(x) = \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt, \tag{2.7}$$

où f est une fonction de classe $C^1([0, a])$ et $f(0) = 0$, k est une fonction continue et dérivable sur $[0, a]$ et k_x est continue sur $[0, a]$ et

$$k(x, x) \neq 0, \quad \forall x \in [0, a].$$

Alors l'équation (2.7) admet une solution unique et continue sur $[0, a]$.

Pour prouver ce théorème on rappelons d'abord tout règle de Leibniz.

Proposition 2.2.1 (Règle de Leibniz) [23]

Considérons

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt,$$

où $f(., .)$, $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ sont supposées être différentiables. Alors

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x, t) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + f(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} - f(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}.$$

Preuve du Théorème 2.2.2.

L'équation (2.7) peut être transformée en une équation de Volterra de deuxième espèce.

Premièrement, on dérive l'équation (2.7) on trouve que :

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt. \quad (2.8)$$

On applique la règle de Leibniz, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt &= \int_0^x k_x(x, t) \varphi(t) dt + k(x, x) \varphi(x) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} - k(x, 0) \varphi(0) \underbrace{\frac{\partial 0}{\partial x}}_{=0} \\ &= k(x, x) \varphi(x) + \int_0^x k_x(x, t) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donc

$$f'(x) = k(x, x) \varphi(x) + \int_0^x k_x(x, t) \varphi(t) dt,$$

comme $k(x, x) \neq 0$, alors

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x, x)} - \int_0^x \frac{k_x(x, t)}{k(x, x)} \varphi(t) dt. \quad (2.10)$$

Inversement, soit φ une solution de l'équation (2.8). En utilisant le fait que $f(0) = 0$ et en intégrant (2.8) sur $[0, x]$, on voit que φ est une solution de (2.7).

L'équation (2.10) est une équation de Volterra de deuxième espèce, et par le Théorème 2.2.1 on obtient l'existence et l'unicité de la solution de (2.7). ■

2.2.2 Équation intégrale de Volterra non linéaire

Théorème: 2.2.3 Soient $[0, a]$ un intervalle borné et fermé de $\mathbb{R}$, $k : [0, a] \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et satisfait la condition de Lipschitz suivante avec la constante $c \geq 0$:

$$|k(x, t, z_1) - k(x, t, z_2)| \leq c |z_1 - z_2| \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, a] \text{ et } z_1, z_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Donc pour toute $f \in C([0, a], \mathbb{R})$ l'équation :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [0, a] \quad (2.12)$$

admet une solution unique $\varphi \in C([0, a], \mathbb{R})$.

Preuve.

Soit $X = C([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|g\|_X = \max_{x \in [0, a]} \left\{ |g(x)| \exp(-cx) \right\}.$$

Soit l'opérateur $T : X \longrightarrow X$, $\varphi \longmapsto T\varphi$ où

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad x \in [0, a].$$

D'abord on va montrer que T est bien définie : Comme f, k sont continues, alors $T\varphi$ est continu sur $[0, a]$.

Maintenant montrons que T est contractant. Pour $\varphi, \psi \in X$, On a :

$$\begin{aligned} \|T\varphi - T\psi\|_X &= \max_{x \in [0, a]} \left\{ |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| \exp(-cx) \right\} \\ &\leq \max_{x \in [0, a]} \exp(-cx) \int_0^x |(k(x, t, \varphi(t)) - k(x, t, \psi(t)))| dt. \end{aligned}$$

Utilisons (2.11), on obtient :

$$\|T\varphi - T\psi\|_X \leq c \max_{0 \leq x \leq a} \exp(-cx) \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt.$$

Ce qui implique que l'on a :

$$\begin{aligned} \|T\varphi - T\psi\|_X &\leq c \max_{0 \leq x \leq a} \exp(-cx) \int_0^x \exp(ct) \exp(-ct) |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq c \|\varphi - \psi\|_X \max_{0 \leq x \leq a} \exp(-cx) \int_0^x \exp(ct) dt \\ &= c \|\varphi - \psi\|_X \max_{0 \leq x \leq a} \exp(-cx) \frac{\exp(cx) - 1}{c} \\ &= \|\varphi - \psi\|_X \max_{0 \leq x \leq a} (1 - \exp(-cx)) \\ &\leq (1 - \exp(-ca)) \|\varphi - \psi\|_X. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq 1 - \exp(-cx) < 1$ pour tout $x \in [0, a]$, l'opérateur T est contractant. Donc d'après le principe de Banach l'opérateur T admet un point fixe unique $\varphi \in C([0, a])$, qui est l'unique solution de (2.12). ■

Dans la suite on considéré $X = C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)|$.

Maintenant, soit l'équation intégrale du forme Hammerstein suivante :

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x k(x, t) g(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{2.13}$$

où on suppose que f, k , et g sont fonctions continues.

Théorème: 2.2.4

On suppose que :

- g est une fonction satisfait les deux propriétés suivantes :

$$g(x, 0) = 0, \quad (2.14)$$

et g est Lipschitzienne par rapport à deuxième variable i.e :

$$\exists c > 0 \text{ telle que } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |g(x, y) - g(x, z)| \leq c |y - z|. \quad (2.15)$$

- f est une fonction bornée i.e :

$$\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| < M, \quad (2.16)$$

et

$$\exists \alpha \geq 0 : \sup_{x \geq 0} c \int_0^x |k(x, t)| dt \leq \alpha < 1. \quad (2.17)$$

Alors l'équation (2.13) admet une solution unique.

Preuve.

Pour toute $\varphi \in X$, on définit $T : X \longrightarrow X$, $\varphi \longmapsto T\varphi$ où :

$$(T\varphi)(x) = f(x) - \int_0^x K(x, t)g(t, \varphi(t))dt, \quad x \geq 0.$$

Tout d'abord, montrons que T est bien définie. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x)| &= |f(x) - \int_0^x k(x, t)g(t, \varphi(t))dt| \\ &\leq |f(x)| + \int_0^x |K(x, t)||g(t, \varphi(t))|dt. \end{aligned}$$

Utilisant (2.14), on obtient :

$$|(T\varphi)(x)| \leq |f(x)| + \int_0^x |k(x, t)||g(t, \varphi(t)) - g(t, 0)|dt.$$

D'après (2.15), il vient :

$$|(T\varphi)(x)| \leq |f(x)| + c \int_0^x |k(x, t)| |\varphi(t)| dt.$$

Enfin, utilisant (2.16) et (2.17), on trouve :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ : |(T\varphi)(x)| &\leq M + \alpha \|\varphi\|_\infty \\ &< \infty. \end{aligned}$$

En outre, comme f, g et k sont des fonctions continues, alors $T\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. on conclut que $T\varphi \in X$.

Montrons que T est contractant. Pour toutes $\varphi, \psi \in X$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ : |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &= \left| \int_0^x k(x, t) (g(t, \varphi(t)) - g(t, \psi(t))) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |k(x, t)| |g(t, \varphi(t)) - g(t, \psi(t))| dt. \end{aligned}$$

Utilisons (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ : |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq c \int_0^x |k(x, t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_\infty c \int_0^x |k(x, t)| dt. \end{aligned}$$

D'après (2.17), on obtient :

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \alpha \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Comme $\alpha < 1$, alors d'après le principe de Banach l'opérateur T est contractant, donc l'équation (2.13) admet une solution unique $\varphi \in X$. ■

Maintenant, soit g une fonction s'écrit sous la forme $g(x, y) = y + h(x, y)$, où h est une fonction satisfait le deux conditions suivants :

$$h(x, 0) = 0, \tag{2.18}$$

et

$$\exists c > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |h(x, y) - h(x, z)| \leq c |y - z|. \tag{2.19}$$

Donc l'équation (2.13) devient :

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x K(x, t)[\varphi(t) + h(t, \varphi(t))]dt, \quad x \geq 0. \quad (2.20)$$

Supposons que la résolvante $R(x, t)$ satisfait (Remarque 2.2.1) :

$$R(x, t) = k(x, t) - \int_t^x R(x, z)k(z, t)dz$$

Théorème: 2.2.5 *On suppose que h est une fonction continue satisfait (2.18) et (2.19), f satisfait (2.16), R est continue et*

$$\sup_{x \geq 0} c \int_0^x R(x, t)dt \leq \alpha < 1. \quad (2.21)$$

Alors l'équation (2.20) admet une solution unique $\varphi \in X$, donnée par :

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x R(x, t)[f(t) + h(t, \varphi(t))]dt, \quad x \geq 0.$$

Preuve.

On définit l'opérateur $T : X \longrightarrow X$, $\varphi \longmapsto T\varphi$ où :

$$(T\varphi)(x) = f(x) - \int_0^x R(x, t)[f(t) + h(t, \varphi(t))]dt, \quad x \geq 0.$$

D'abord, montrons que l'opérateur T bien définie.

Comme les fonctions f, R et h sont continues sur $\mathbb{R}_+$ alors $T\varphi$ est continu. On outre, $T\varphi$ est borné. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x)| &= |f(x) - \int_0^x R(x, t)[f(t) + h(t, \varphi(t))]dt| \\ &\leq |f(x)| + \int_0^x |R(x, t)||f(t)|dt + \int_0^x |R(x, t)||h(t, \varphi(t))|dt. \end{aligned}$$

Utilisant (2.18), on obtient :

$$|(T\varphi)(x)| \leq |f(x)| + \int_0^x |R(x, t)||f(t)|dt + \int_0^x |R(x, t)||h(t, \varphi(t) - h(t, 0))|dt,$$

et d'après (2.19), il vient :

$$|(T\varphi)(x)| \leq |f(x)| + \int_0^x |R(x, t)||f(t)|dt + c \int_0^x |R(x, t)||\varphi(t)|dt.$$

En utilisant (2.21) et (2.16), trouve :

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x)| &\leq M + \alpha M + \alpha \|\varphi\|_\infty \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur T est bien définie.

Montrons que T est contractant. Pour toutes $\varphi, \psi \in X$, on a :

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &= \left| \int_0^x R(x, t)[f(t) + h(t, \varphi(t))]dt - \int_0^x R(x, t)[f(t) + h(t, \psi(t))]dt \right| \\ &= \left| \int_0^x R(x, t)[h(t, \varphi(t)) - h(t, \psi(t))]dt \right| \\ &\leq \int_0^x |R(x, t)| |h(t, \varphi(t)) - h(t, \psi(t))| dt. \end{aligned}$$

En utilisant (2.19), on obtient :

$$\begin{aligned} |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq c \int_0^x |R(x, t)| |\varphi(t) - \psi(t)| dt \\ &\leq c \int_0^x |R(x, t)| dt \|\varphi - \psi\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où d'après (2.21), il vient :

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \alpha \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Alors T est contractant. Donc l'équation (2.20) admet une solution unique bornée et continue, d'après le principe de Banach. ■

Maintenant, soit l'équation (2.20). On suppose que $f'(x)$ et k_x sont existents et continues.

On dérive l'équation (2.20) par rapport à x , on obtient :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \left(k(x, t)[\varphi(t) + h(t, \varphi(t))] \right) dt.$$

On applique la règle de Leibniz sur $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \left(k(x, t)[\varphi(t) + h(t, \varphi(t))] \right) dt$ on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \left(k(x, t)[\varphi(t) + h(t, \varphi(t))] \right) dt &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t)[\varphi(t) + h(t, \varphi(t))] \right) dt \\ &\quad + k(x, x)\varphi(x) + k(x, x)h(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi'(x) = f'(x) - \left(\int_0^x k_x(x, t)[\varphi(t) + h(t, \varphi(t))]dt + k(x, x)\varphi(x) + k(x, x)h(x, \varphi(x)) \right).$$

Considérons l'équation suivant :

$$\begin{cases} \varphi'(x) = & -k(x, x)\varphi(x) - \int_0^x k_x(x, t)\varphi(t)dt \\ & + \left[f'(x) - k(x, x)h(x, \varphi(x)) - \int_a^x k_x(x, t)h(t, \varphi(t)) \right] dt \\ \varphi(0) = & f(0) = f_0. \end{cases} \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) est une équation différentielle de première ordre de la forme :

$$\begin{cases} \varphi'(x) + p(x)\varphi(x) = q(x), \\ \varphi(0) = f(0) = f_0 \end{cases}$$

telle que :

$$\begin{cases} p(x) = & k(x, x). \\ q(x) = & - \int_0^x k_x(x, t)\varphi(t)dt + [f'(x) - k(x, x)h(x, \varphi(x)) - \int_0^x k_x(x, t)h(t, \varphi(t))dt. \end{cases}$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\varphi(x) = u(x)v(x),$$

où

$$\begin{cases} u(x) = & e^{-\int_0^x k(t, t)dt}, \\ v(x) = & \int_0^x q(z)e^{\int_0^z k(t, t)dt}dz + c, \end{cases}$$

avec c une constante de $\mathbb{R}$.

D'où

$$\varphi(x) = c e^{-\int_0^x k(t, t)dt} + \int_0^x q(z)e^{-\int_z^x k(t, t)dt}dz,$$

ce qui implique l'on a :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \varphi(0) e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} f'(z)dz \\
 &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z k_z(z,t) \varphi(t) dt dz \\
 &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} k(z,z) h(z, \varphi(z)) dz \\
 &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dy} \int_0^z k_z(z,t) h(t, \varphi(t)) dt dz \\
 &= f(0) e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} f'(z)dz \\
 &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z k_z(z,t) \left(\varphi(t) + h(t, \varphi(t)) \right) dt dz \\
 &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} k(z,z) h(z, \varphi(z)) dz.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

où f, k, k_x et h sont des fonctions continues.

Théorème: 2.2.6 *Soient les hypothèses suivantes :*

- h est une fonction satisfait (2.18) et (2.19),
- $f'(x)$ est une fonction bornée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x k(t,t)dt = +\infty, \tag{2.24}$$

$$\int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} dz < \infty, \tag{2.25}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\sup(c+1) \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)| dt dz \\
 &+ c \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| dz \leq \alpha < 1.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc l'équation (2.23) admet une solution unique bornée et continue.

Preuve.

Soit l'opérateur T défini sur X comme :

$$\begin{aligned}(T\varphi)(x) &= f_0 e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} f'(z) dz \\ &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z k_z(z,t) \left(\varphi(t) + h(t, \varphi(t)) \right) dt dz \\ &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} k(z,z) h(z, \varphi(z)) dz, \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

Premièrement, on va montrer que $T\varphi$ borné et continu.

Comme f, h, k et k_x sont des fonctions continues alors $T\varphi$ est continu, et pour toute φ dans X , on a :

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(x)| &= |f_0| e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |f'(z)| dz \\ &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)| \left(|\varphi(t)| + |h(t, \varphi(t))| \right) dt dz \\ &- \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| |h(z, \varphi(z))| dz \\ &\leq |f_0| e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |f'(z)| dz \\ &+ \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)| \left(|\varphi(t)| + |h(t, \varphi(t))| \right) dt dz \\ &+ \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| |h(z, \varphi(z))| dz.\end{aligned}$$

En utilisant (2.18), on obtient :

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(x)| &\leq |f_0| e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |f'(z)| dz \\ &+ \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)| \left(|\varphi(t)| + |h(t, \varphi(t)) - h(t, 0)| \right) dt dz \\ &+ \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| |h(z, \varphi(z)) - h(z, 0)| dz.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.19), il vient :

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(x)| &\leq |f_0| e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |f'(z)| dz \\ &+ \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)| \left(|\varphi(t)| + c|\varphi(t)| \right) dt dz \\ &+ c \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| |\varphi(z)| dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(T\varphi)(x)| &\leq |f_0|e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |f'(z)|dz \\
&+ \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)|(c+1)|\varphi(t)|dtdz \\
&+ c \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| |\varphi(z)| \\
&\leq |f_0|e^{-\int_0^x k(t,t)dt} + \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |f'(z)|dz \\
&+ \left[(c+1) \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z |k_z(z,t)|dtdz \right. \\
&+ \left. c \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)|dz \right] \|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 Le terme $|f_0|e^{-\int_0^x k(t,t)dt}$ est borné d'après la condition (2.24), en effet :

$$\forall A > 0, \exists R > 0 : \forall x \geq R \Rightarrow \int_0^x k(t,t)dt > A.$$

Pour A fixé :

$$\begin{aligned}
\exists R > 0 \text{ tel que } : \forall x \geq R \quad \int_0^x k(t,t)dt > A \\
\forall x \geq R : \quad e^{-\int_0^x k(t,t)dt} < e^{-A}.
\end{aligned}$$

En outre,

$$\exists M > 0, \forall x \in [0, R] : e^{-\int_0^x k(t,t)dt} \leq M.$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_+ : e^{-\int_0^x k(t,t)dt} \leq \max(M, e^{-A})$, et f_0 est une constante.

Par conséquent, on déduit de (2.24), (2.25), (2.26) et le fait que $f'(x)$ bornée que l'on a :

$$|(T\varphi)(x)| < \infty.$$

Alors l'opérateur T bien définit de X dans X .

Montrons que T contractant. Pour toutes φ, ψ de X , on a :

$$\begin{aligned}
|(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq \left| \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z k_z(z,t) [\varphi(t) - \psi(t) + h(t, \varphi(t)) - h(t, \psi(t))] dt \right| \\
&+ \left| \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} K(z,z) [h(t, \varphi(t)) - h(t, \psi(t))] dz \right|
\end{aligned}$$

et d'après (2.19), il vient :

$$\begin{aligned}
 |(T\varphi)(x) - (T\psi)(x)| &\leq \left| \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_0^z k_z(z,z) \left[|\varphi(t) - \psi(t)| + c|\varphi(t) - \psi(t)| \right] dt \right. \\
 &\quad + \left. \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} K(z,z) \left[c|\varphi(t) - \psi(t)| \right] dz \right| \\
 &\leq \left[(c+1) \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} \int_a^z k_z(z,t) dt dz \right. \\
 &\quad + \left. c \int_0^x e^{-\int_z^x k(t,t)dt} |k(z,z)| dz \right] \|\varphi - \psi\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq \alpha \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Comme $\alpha < 1$, l'opérateur T est contractant, donc l'équation (2.23) admet une solution unique bornée.

Comme (2.23) est équivalent à (2.20) (car $\varphi(0) = f(0)$), (2.20) admet une solution unique bornée et continue. ■

Chapitre 3

Existence d'une solution d'une classe d'équation fonctionnelle-intégrale

Dans ce chapitre, nous énonçons et prouvons un théorème d'existence d'une solution d'une classe d'équation fonctionnelle-intégrale. On introduit tout d'abord quelques notations concernant l'espace de Lebesgue L^1 et la mesure de non compacité faible.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Quelques notions relatives à l'espace L^1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *On dit que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction de Carathéodory si $f(., x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(t, .)$ est continue pour presque tout $t \in I$.*

Remarque 3.1.1 ([8])

- Soit f une fonction de Carathéodory. Pour toute fonction x mesurable sur I , la fonction $(Fx)(t) = f(t, x(t))$ $t \in I$ est aussi mesurable sur I .
- L'opérateur F défini ci-dessus est appelé opérateur de superposition ou opérateur de Nemytsky généré par la fonction f .

Théorème: 3.1.1 *Soit F un opérateur de superposition généré par une fonction f . Alors, $F(L^1(I)) \subset L^1(I)$ et $F : L^1(I) \rightarrow L^1(I)$ est continu si et seulement si il existe $a \in L^1(I)$ et une constante $b > 0$ telles que $|f(t, x)| \leq a(t) + b|x|$ pour tous $t \in I$ et $x \in \mathbb{R}$.*

Ce théorème a été prouvé par Krasnosel'skii ([16]) dans le cas où I est borné. Une généralisation au cas d'un intervalle non borné a été obtenue par Appell et Zabrejko ([1]).

Le théorème suivant donne une caractérisation des fonctions de Carathéodory dans le cas où I est borné.

Théorème: 3.1.2 *Soient I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-ensemble fermé $D_\varepsilon \subset I$ tel que $m(I \setminus D_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et f est continue sur $D_\varepsilon \times \mathbb{R}$.*

Enfin nous présentons quelques résultats concernant l'opérateur intégral de Volterra linéaire dans l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}_+)$.

On dénote par $\triangle$ le triangle :

$$\triangle = \{(t, s) / 0 \leq s \leq t\}$$

et supposons donnée une fonction mesurable $k : \triangle \rightarrow \mathbb{R}$. Ensuite, pour toute fonction $x \in L^1(\mathbb{R}_+)$, on pose :

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

L'opérateur K s'appelle opérateur intégral linéaire de Volterra.

Le lemme suivant donne une propriété fondamentale de l'opérateur intégral linéaire de Volterra ([17], [21]).

Lemme 3.1.1 *Si l'opérateur intégral de Volterra K transforme l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$ en lui-même, alors il est continu.*

Finalement, nous avons le théorème suivant :

Théorème: 3.1.3 ([3])

Soit k une fonction mesurable sur Δ telle que :

$$\sup_{s \geq 0} \text{ess} \int_s^\infty |k(t, s)| dt < \infty.$$

Alors, l'opérateur intégral de Volterra K généré par la fonction k satisfait $K(L^1(\mathbb{R}_+)) \subset L^1(\mathbb{R}_+)$ et $K : L^1(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^1(\mathbb{R}_+)$ est continu. De plus,

$$\|K\| \leq \sup_{s \geq 0} \text{ess} \int_s^\infty |k(t, s)| dt,$$

où $\|K\|$ dénote la norme de l'opérateur K .

Remarque 3.1.2

Nous observons que si D un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$, on peut considérer l'opérateur intégral linéaire de Volterra associé à l'espace $L^1(D)$. En effet, si $x \in L^1(D)$, on la prolonge hors de D par 0, c-à-d, $x(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}_+ \setminus D$, ce qui nous permet de traiter l'opérateur K d'une façon équivalente.

3.1.2 Mesure de non compacité faible

Soit E un espace de Banach de dimension infini, muni d'une norme $\|\cdot\|$. On dénote par $\mathfrak{m}_E$ la famille de tous les sous-ensembles non vides bornés de E et par $\mathfrak{R}_E^W$ l'ensemble des parties faiblement relativement compacts dans E .

Définition 3.1.2 ([5])

On dit qu'une fonction $\mu : \mathfrak{m}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure de non compacité faible si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'ensemble $\text{Ker} \mu = \{X \in \mathfrak{m}_E / \mu(X) = 0\}$ est non vide et $\text{Ker} \mu \subset \mathfrak{R}_E^W$.
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
3. $\mu(\text{co}X) = \mu(X)$.
4. $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.
5. Si $X_n \in \mathfrak{m}_E$, $X_n = \overline{X_n}^W$ et $X_{n+1} \subset X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$, alors $X_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty X_n \neq \emptyset$.

Remarque 3.1.3

1. L'ensemble $\text{Ker}\mu$, décrit ci-dessous, est dit le noyau de la mesure de non compacité faible μ .

2. On voit que l'intersection X_∞ dans la condition 5 de Définition 3.1.2 appartient $\text{Ker}\mu$. En effet, comme $0 \leq \mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ pour tout n , on obtient $\mu(X_\infty) = 0$. Cette observation sera importante à nos considérations ultérieures.

On peut construire une mesure de non compacité faible dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$ ([4]). La construction de cette mesure est basée sur le critère suivant pour la non compacité faible ([9]).

Théorème: 3.1.4 ([10])

Soit X un sous ensemble $L^1(\mathbb{R}_+)$. Alors, X est faiblement relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que : si $m(D) \leq \delta$ on a $\int_D |x(t)|dt \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$, x est application

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T > 0$ tel que $\int_T^\infty |x(t)|dt \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Maintenant, pour tout sous-ensemble X non vide et borné de $L^1(\mathbb{R}_+)$, on définit

$$c(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup \left\{ \int_D |x(t)|dt / D \subset \mathbb{R}_+, m(D) \leq \varepsilon \right\} \right\} \right\}. \quad (3.1)$$

$$d(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty |x(t)|dt / x \in X \right\} \right\}. \quad (3.2)$$

Si on pose :

$$\mu(X) = c(X) + d(X), \quad (3.3)$$

la fonction μ est une mesure de non compacité faible dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$ ([4]).

3.2 Théorème d'existence de solution d'une classe d'équation fonctionnelle-intégrale

Dans cette section, nous allons intéressé à un type d'équation fonctionnelle-intégrale de la forme

$$x(t) = f_1\left(t, \int_0^t k(t, s)f_2(s, x(s))ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.4)$$

où $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions satisfaisant les conditions de Carathéodory qu'il existe deux fonctions $a_1, a_2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et deux constantes $b_1, b_2 > 0$ telles que

$$|f_i(t, x)| \leq a_i(t) + b_i|x|, \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \quad (3.5)$$

la fonction $k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie aussi les conditions de Carathéodory où il existe une fonction $a_3 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et une constante $b_3 > 0$ telles que

$$|k(t, x)| \leq a_3(t) + b_3x, \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}_+ \quad (3.6)$$

et l'opérateur intégral linéaire de Volterra

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t, s)x(s)ds, \quad (3.7)$$

transforme l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$ en lui-même.

Finalement,

$$b_1b_2\|K\| < 1, \quad (3.8)$$

où $\|K\|$ dénote la norme de l'opérateur K .

Remarque 3.2.1

Nous observons que l'équation (3.4) contient plusieurs types d'équations intégrales de Volterra. Par exemple, l'équation intégrale non linéaire de type Volterra-Hammerstein :

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s)g(s, x(s))ds,$$

et l'équation intégrale linéaire classique de Volterra :

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s)x(s)ds.$$

Théorème: 3.2.1 *Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation fonctionnelle-intégrale (3.4) admet une solution $x \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Preuve.

La preuve se fait en trois étapes.

Étape1 : On pose

$$(Gx)(t) = f_1\left(t, \int_0^t k(t, s)f_2(s, x(s))ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.9)$$

L'opérateur G s'écrit sous la forme $G = F_1KF_2$ où K est l'opérateur intégral linéaire de Volterra défini dans (3.7) et F_i est l'opérateur de superposition généré par la fonction $f_i, i = 1, 2$. En outre, utilisant (3.5)-(3.7) et Théorème 3.1.1, on voit que si $x \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a $Gx \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Maintenant, utilisant (3.5), (3.7), (3.9) et la définition F_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \|Gx\|_1 &= \int_0^\infty |(Gx)(t)|dt = \int_0^\infty \left| f_1\left(t, \int_0^t k(t, s)f_2(s, x(s))ds\right) \right| dt \\ &\leq \int_0^\infty \left\{ a_1(t) + b_1 \left| \int_0^t k(t, s)f_2(s, x(s))ds \right| \right\} dt \\ &\leq \|a_1\|_1 + b_1 \|KF_2x\|_1 \leq \|a_1\|_1 + b_1 \|K\| \|F_2x\|_1 \\ &= \|a_1\|_1 + b_1 \|K\| \int_0^\infty |f_2(t, x(t))| dt \\ &\leq \|a_1\|_1 + b_1 \|K\| \int_0^\infty (a_2(t) + b_2 |x(t)|) dt \\ &\leq \|a_1\|_1 + b_1 \|K\| \|a_2\|_1 + b_1 b_2 \|K\| \|x\|_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En tenant compte de (3.8) et (3.10), on peut trouver une constante $r = \frac{\|a_1\|_1 + b_1 \|a_2\|_1 \|K\|}{1 - b_1 b_2 \|K\|}$ tel que l'opérateur G transforme la boule ouverte $B(0, r)$ en lui-même. En effet,

$$\|Gx\|_1 < \|a_1\|_1 + b_1 \|K\| \|a_2\|_1 + b_1 b_2 \|K\| \|x\|_1.$$

Comme $x \in B_r$ alors

$$\|x\|_1 < \frac{\left[\|a_1\|_1 + b_1 \|K\| \|a_2\|_1 \right]}{\left(1 - b_1 b_2 \|K\| \right)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \|Gx\|_1 &< \|a_1\|_1 + b_1\|K\|\|a_2\|_1 + b_1b_2\|K\| \frac{\left[\|a_1\|_1 + b_1\|K\|\|a_2\|_1\right]}{\left(1 - b_1b_2\|K\|\right)} \\
 &< \frac{\left[\|a_1\|_1 + b_1\|K\|\|a_2\|_1\right]}{\left(1 - b_1b_2\|K\|\right)} \\
 &< r.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce aux Théorème 3.1.1 et Lemme 3.1.1, l'opérateur G est continu (composée d'opérateurs continus) car F_1, F_2 et K sont continus.

Maintenant, soient X un sous-ensemble non vide de $B(0, r)$, un nombre réel $\varepsilon > 0$ et $D \subset \mathbb{R}_+$ un sous-ensemble non vide tels que $m(D) \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in X$, on obtient en utilisant (3.5), (3.7), (3.9), la définition de F_2 et le fait que $a_i(t) \geq 0$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 \int_D |(Gx)(t)|dt &\leq \int_D a_1(t)dt + b_1 \int_D \left| \int_0^t k(t, s) f_2(s, x(s)) ds \right| dt \\
 &= \int_D a_1(t)dt + b_1 \int_D |(KF_2x)(t)|dt \\
 &= \int_D a_1(t)dt + b_1\|K(F_2x)\|_{1,D} \\
 &\leq \int_D a_1(t)dt + b_1\|K\|_D\|F_2x\|_{1,D} \\
 &\leq \int_D a_1(t)dt + b_1\|K\|_D \int_D |(F_2x)(t)|dt \\
 &= \int_D a_1(t)dt + b_1\|K\|_D \int_D |f_2(t, x(t))|dt \\
 &\leq \int_D a_1(t)dt + b_1\|K\|_D \int_D (a_2(t) + b_2|x(t)|)dt \\
 &= \int_D a_1(t)dt + b_1\|K\|_D \int_D a_2(t)dt + b_1b_2\|K\|_D \int_D |x(t)|dt \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

où $\|K\|_D$ (resp. $\|F_2x\|_{1,D}$) dénote la norme de l'opérateur $K : L^1(D) \rightarrow L^1(D)$ (resp. la fonction F_2x) associée à l'espace $L^1(D)$.

Maintenant, en utilisant le Théorème 3.1.4 et le fait que l'ensemble contenant un seul élément est faiblement compact, il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \int_D a_i(t)dt / D \subset \mathbb{R}_+, m(D) \leq \varepsilon \right\} \right\} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

En tenant compte de (3.1), (3.11) et (3.12), on a :

$$\begin{aligned}
 c(GX) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup \left\{ \int_D |Gx(t)dt| \right\} \right\} \right\} \\
 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup \left\{ \int_D a_1(t)dt + b_1 \|K\| \int_D a_2(t)dt + b_1 b_2 \|K\| \int_D |x(t)|dx \right\} \right\} \right\} \\
 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup \int_D a_1(t)dt + b_1 \|K\| \sup \int_D a_2(t)dt + b_1 b_2 \|K\| \int_D \sup |x(t)| dt \right\} \right\} \\
 &\leq b_1 b_2 \|K\| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \int_D |x(t)|dx \right\} \right\} \\
 &\leq b_1 b_2 \|K\| c(X).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Maintenant, soit $T > 0$ un nombre réel. Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}
 \int_T^\infty |(Gx)(t)|dt &\leq \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \int_T^\infty \left| \int_0^t k(t,s)f_2(s,x(s))ds \right|dt \\
 &\leq \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \int_T^\infty |(KF_2x)(t)|dt \\
 &\leq \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \|KF_2x\|_{1,T} \\
 &\leq \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \|K\|_T \|F_2x\|_{1,T} \\
 &\leq \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \|K\|_T \int_T^\infty |(F_2x)(t)|dt \\
 &\leq \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \|K\|_T \int_T^\infty a_2(t)dt + b_1 b_2 \|K\|_T \int_T^\infty |x(t)|dt
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

où $\|K\|_T$ (resp. $\|F_2x\|_{1,T}$) dénote la norme de l'opérateur $K : L^1([T, \infty)) \rightarrow L^1([T, \infty))$ (resp. la fonction F_2x) associée à l'espace $L^1([T, \infty))$.

En tenant compte encore du fait que l'ensemble contenant un seul élément est faiblement compact, on obtient en utilisant le Théorème 3.1.4 :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_T^\infty a_i(t)dt = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.15}$$

Par conséquent, on déduit de (3.2), (3.15) et (3.14) que l'on a :

$$\begin{aligned}
 d(GX) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty |Gx(t)| \right\} \right\} \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty a_1(t)dt + b_1 \|K\| \int_T^\infty a_2(t)dt + b_1 b_2 \|K\| \int_T^\infty |x(t)|dt \right\} \right\} \\
 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \left\{ \int_T^\infty a_1(t)dt \right\} + b_1 \|K\| \lim_{T \rightarrow \infty} \sup \left\{ \int_T^\infty a_2(t)dt \right\} \\
 &+ b_1 b_2 \|K\| \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sup \left\{ \int_T^\infty |x(t)|dt \right\} \right\} \\
 &\leq b_1 b_2 \|K\| d(X).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

En combinant (3.3), (3.13) et (3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mu(GX) &\leq b_1 b_2 \|K\| d(X) + b_1 b_2 \|K\| c(X) \\
 &\leq b_1 b_2 \|K\| (d(X) + c(X)) \\
 &\leq b_1 b_2 \|K\| \mu(X).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Par la suite, on pose $q = b_1 b_2 \|K\|$. D'après (3.8), on voit que $q < 1$. Considérons la suite d'ensembles $\{B_r^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $B_r^1 = co(GB_r)$, $B_r^2 = co(GB_r^1)$, etc. Remarquons que $\{B_r^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, c-à-d, $B_r^{n+1} \subset B_r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $B_r^1 \subset B_r$ (car $B_r^1 \subset GB_r \subset B_r$) et tout ensemble B_r^n est convexe et fermé (donc il est faiblement fermé). D'ailleurs, en utilisant (3.17) et la condition 3 de la Définition 3.1.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mu(B_r^n) &= \mu(co(GB_r^{n-1})) = \mu(GB_r^{n-1}) \\
 &\leq q \mu(B_r^{n-1}) = q \mu(co(GB_r^{n-2})) \\
 &\leq q^2 \mu(B_r^{n-2}),
 \end{aligned}$$

et par récurrence, on peut montrer que l'on a :

$$\mu(B_r^n) \leq q^n \mu(B_r).$$

ce qui implique que l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_r^n) = 0$ car $0 \leq q < 1$. Par conséquent, grâce à 5 (voir Définition 3.1.2), l'ensemble $Y = \bigcap_{n=1}^\infty B_r^n$ est non vide et d'après 2 de la Remarque 3.1.3, $\mu(Y) = 0$. De plus, il est convexe, fermé, faiblement compact (d'après 1 de la Définition

3.1.2 et Y est faiblement fermé) et $GY \subset Y$ (si $z \in GY$, il existe $y \in B_r^n \subset B_r \forall n \in \mathbb{N}^*$, donc $z \in GB_r \subset co(GB_r) = B_r^1$, et $z \in GB_r^n \subset co(GB_r^n) = B_r^{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$, d'où $z \in GB_r^n \forall n \in \mathbb{N}^*$, c-à-d : $z \in Y$)

Étape 2 : Montrons que GY est relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. Soient $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ une suite et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Comme Y est faiblement compact et $GY \subset Y$, on déduit du Théorème 3.1.4 qu'il existe $T > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_T^\infty |Gy_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.18)$$

En outre, considérons la fonction $f_i(., x)$ sur $[0, T]$, $i = 1, 2$ et la fonction $k(., .)$ sur $[0, T] \times [0, T]$. D'après le Théorème 3.1.2, il existe un ensemble fermé $D_\varepsilon \subset [0, T]$ tel que $m(D'_\varepsilon) \leq \varepsilon$ où $D'_\varepsilon = [0, T] \setminus D_\varepsilon$ et les fonctions f_i ($i=1,2$) et k sont continues respectivement sur $D_\varepsilon \times \mathbb{R}$ et $D_\varepsilon \times [0, T]$. Par conséquent, k est uniformément continue $D_\varepsilon \times [0, T]$ (car $D_\varepsilon \times [0, T]$ est compact de $\mathbb{R}^2$).

Soit $t_1, t_2 \in D_\varepsilon$. Sans perte de généralité, on suppose que $t_1 < t_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |(KF_2y_n)(t_2) - (KF_2y_n)(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} k(t_2, s)f_2(s, y_n(s))ds - \int_0^{t_1} k(t_1, s)f_2(s, y_n(s))ds \right| \\ &= \left| \int_0^{t_2} k(t_2, s)f_2(s, y_n(s))ds - \int_0^{t_1} k(t_2, s)f_2(s, y_n(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_1} k(t_2, s)f_2(s, y_n(s))ds - \int_0^{t_1} k(t_1, s)f_2(s, y_n(s))ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_1} k(t_2, s)f_2(s, y_n(s))ds - \int_0^{t_1} k(t_1, s)f_2(s, y_n(s))ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t_2, s)f_2(s, y_n(s))ds \right| \\ &\leq \int_0^{t_1} |k(t_2, s) - k(t_1, s)|(a_2(s) + b_2|y_n(s)|)ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} |k(t_2, s)|(a_2(s) + b_2|y_n(s)|)ds \\ &\leq \omega^T(k, |t_2 - t_1|) \int_0^{t_1} (a_2(s) + b_2|y_n(s)|)ds \\ &\quad + \bar{k} \int_{t_1}^{t_2} (a_2(s) + b_2|y_n(s)|)ds, \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\omega^T(k, .)$ est le module de continuité de la fonction k sur $D_\varepsilon \times [0, T]$ et

$$\bar{k} = \max\{|k(t, s)| / (t, s) \in D_\varepsilon \times [0, T]\}.$$

Comme $Y \subset B_r$, d'après (3.19) on a :

$$\begin{aligned}
 |(KF_2y_n)(t_2) - (KF_2y_n)(t_1)| &\leq \omega^T(k, t_2 - t_1) \left\{ \int_0^\infty a_2(s)ds + b_2 \int_0^\infty |y_n(s)|ds \right\} \\
 &+ \bar{k} \int_{t_1}^{t_2} a_2(s)ds + b_2 \bar{k} \int_{t_1}^{t_2} |y_n(s)|ds \\
 &\leq \omega^T(k, t_2 - t_1) \{ \|a_2\|_1 + b_2 r \} \\
 &+ \bar{k} \int_{t_1}^{t_2} a_2(s)ds + b_2 \bar{k} \int_{t_1}^{t_2} |y_n(s)|ds. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement compact, on déduit du Théorème 3.1.4 que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_{t_1}^{t_2} |y_n(s)|ds \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t_2 - t_1 \rightarrow 0.$$

De la même manière, en tenant compte du fait que l'ensemble contenant un seul élément est faiblement compact, on obtient en utilisant le Théorème 3.1.4 :

$$\int_{t_1}^{t_2} a_2(s)ds \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad t_2 - t_1 \rightarrow 0.$$

On pose $\varphi_n(t) = (KF_2y_n)(t)$ pour tous $t \in D_\varepsilon$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in D_\varepsilon : |\varphi_n(t)| &= \left| \int_0^t k(t, s) f_2(s, y_n(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^t |k(t, s)| (a_2(s) + b_2 |y_n(s)|) ds \\
 &\leq \bar{k} \left\{ \int_0^t a_2(s)ds + b_2 \int_0^t |y_n(s)|ds \right\} \\
 &\leq \bar{k} (\|a_2\|_1 + b_2 \|y_n(s)\|_1) \\
 &\leq \bar{k} (\|a_2\|_1 + b_2 r), \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur D_ε . Par conséquent, il résulte de (3.19) que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue sur $C(D_\varepsilon)$.

Maintenant, on pose :

$$Q = \sup\{|\varphi_n(t)| / t \in D_\varepsilon, n \in \mathbb{N}\}.$$

D'après (3.21), la quantité Q est finie. En outre, la fonction f_1 est uniformément continue sur $D_\varepsilon \times [-Q, Q]$. D'après la définition de la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$(Gy_n)_{n \in \mathbb{N}} = (F_1 KF_2 y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (F_1 \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

qui est une suite équibornée et équicontinue dans $C(D_\varepsilon)$. Par conséquent, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli,

$$\text{l'ensemble } (Gy_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est relativement compact dans } C(D_\varepsilon). \quad (3.22)$$

On voit que (3.22) ne dépend pas de ε . Donc, on peut choisir une suite d'ensembles fermés $\{D'_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset [0, T]$ telle que $m(D'_p) \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow \infty$ et l'ensemble $(Gy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compact dans $C(D_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'où, pour une sous-suite notée encore n , $(Gy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $C(D_p)$. Donc, elle est une suite de Cauchy dans $C(D_p)$, $p \in \mathbb{N}$.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que GY est relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}_+)$. En tenant compte du fait GY est faiblement compact, il existe un nombre $\delta > 0$ vérifie que pour tout ensemble fermé $D_\delta \subset [0, T]$ tel que $m(D'_\delta) \leq \delta$ on a :

$$\int_{D'_\delta} |(Gy)(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall y \in Y. \quad (3.23)$$

Comme $(Gy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $C(D_p)$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(D_{p_0}) > 0$, $m(D'_{p_0}) \leq \delta$ et pour tous $i, j \geq p_0$ on a :

$$|(Gy_i)(t) - (Gy_j)(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4m(D_{p_0})}, \quad \forall t \in D_{p_0}. \quad (3.24)$$

En utilisant (3.23)-(3.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T |(Gy_i)(t) - (Gy_j)(t)| dt &= \int_{D_{p_0}} |(Gy_i)(t) - (Gy_j)(t)| dt + \int_{D'_{p_0}} |(Gy_i)(t) - (Gy_j)(t)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon m(D_{p_0})}{4m(D_{p_0})} + \int_{D'_{p_0}} |(Gy_i)(t)| dt + \int_{D'_{p_0}} |(Gy_j)(t)| dt \\ &\leq \frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En combinant (3.18) et (3.25), il vient :

$$\|(Gy_i)(t) - (Gy_j)(t)\|_1 = \int_0^\infty |(Gy_i)(t) - (Gy_j)(t)| dt \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que $(Gy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ qui est un espace complet. On conclut que $(Gy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et GY est relativement compact dans

$L^1(\mathbb{R}_+)$, d'où le résultat désiré.

Étape 3 : On pose $Y_0 = \text{co}(GY)$. D'après le théorème de Mazur, l'ensemble Y_0 est compact dans $L^1(\mathbb{R}_+)$ car $(GY \subset Y \Rightarrow \text{co}(GY) \subset \text{co}(Y) = Y \text{ (car } Y \text{ convexe)} \Rightarrow \overline{\text{co}(GY)} \subset \overline{Y} \Rightarrow \text{co}(GY) \subset \overline{Y}$, et $\overline{Y}$ est compact donc $Y_0 = \text{co}(GY)$ est compact). En outre, comme $GY \subset Y$ on obtient $Y_0 = \text{co}(GY) \subset \text{co}(Y) = Y$ (car Y est convexe). Cela implique que l'on a $GY_0 \subset GY$. En passant à l'enveloppe convexe, il vient $\text{co}(GY_0) \subset \text{co}(GY) = Y_0$, d'où $GY_0 \subset \text{co}(GY_0) \subset Y_0$. Finalement, comme G est continu, on déduit du théorème du point fixe de Schauder que G qu'il existe $x \in Y_0$ tel que $Gx = x$ qui est une solution de l'équation fonctionnelle-intégrale (3.4). ■

Exemple 3.2.1

Considérer l'équation intégrale Volterra suivante :

$$x(t) = t^2 e^{-t} + \int_0^t (a(t) + s)(\sin(ts))e^{-t} \left[\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{t}{2s + 1} x(s) \sin(x(s)) \right] dt \quad (3.26)$$

Où $t \in \mathbb{R}_+$ et la fonction $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par la formule suivante :

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \text{ rationnelle} \\ t & \text{pour } t \text{ irrationnelle.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que l'équation. (3.26) est un cas particulier d'équation. (3.4), où

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= t^2 e^{-t} + x \\ K(t, s) &= (a(t) + s)(\sin(ts))e^{-t} \\ f_2(t, x) &= \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{t}{2t + 1} x \sin(x) \end{aligned}$$

Observer que la fonction $k(t, s)$ est continue en s pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et mesurables en t pour chaque $s \in \mathbb{R}_+$. En outre, la fixer un élément $s \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_s^\infty |k(t, s)| dt &= \int_s^\infty (a(t) + s)e^{-t} |\sin ts| dt \\ &\leq \int_s^\infty (t + s)e^{-t} dt \\ &= (2s + 1)e^{-s}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\sup_{s \geq 0} \operatorname{ess} \int_s^\infty |k(t, s)| dt = 2/\sqrt{e}.$$

L'estimation ci-dessus et Théorème 3.1.3 impliquent que $\|K\| \leq 2/\sqrt{e}$.

De plus, remarquons que les fonctions $f_1(t, x)$ et $f_2(t, x)$ satisfaisant l'hypothèse (3.5) du Théorème 3.2.1 avec $a_1(t) = t^2 e^{-t}$, $a_2(t) = 1/(t^2 + 1)$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1/2$, de toute évidence, $a_1, a_2 \in L^1$.

En outre, on a que $b_1 b_2 \|K\| \leq 1/\sqrt{e} < 1$ Enfin, d'après le Théorème 3.1.3 on déduit que l'équation (3.26) admet au moins une solution dans l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Exemple 3.2.2

Considérons l'équation fonctionnelle-intégrale suivante :

$$x(t) = \frac{t}{t^3 + 1} + \arctan \left(\int_0^t (t + s) e^{-t} \left\{ e^{-s^2} + \frac{s}{s^2 + 8} [x(s) + \ln(1 + x^2(s))] \right\} ds \right)^2 \quad (3.27)$$

Où $t \in \mathbb{R}_+$. L'équation (3.27) est un cas particulier d'équation (3.4) avec

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= \frac{t}{t^3 + 1} + \arctan x^2 \\ K(t, s) &= (t + s) e^{-t} \\ f_2(t, x) &= e^{-t^2} + \frac{t}{t^2 + 8} (x + \ln(1 + x^2)). \end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu de l'inégalité des $\arctan x^2 \leq 2x$ pour $x \geq 0$ on obtient que la fonction $f_1(t, x)$ satisfait à l'hypothèse (3.5) du Théorème 3.2.1 avec $b_1 = 2$ et $a_1(t) = \frac{t}{t^3 + 1}$.

De plus, en tenant compte de l'inégalité des $\ln(1 + x^2) \leq x$ et en tenant compte du fait que le maximum de la fonction $z(t) = \frac{t}{t^2 + 8}$ est égal à $\sqrt{2}/8$ on a que la fonction $f_2(t, \varphi)$ satisfait l'hypothèse (3.5) avec $b_2 = \sqrt{2}/4$ et $a_2(t) = e^{-t^2}$.

De plus, on a le estimation suivant :

$$\int_s^\infty |k(t, s)| dt = \int_s^\infty (t + s) e^{-t} dt = (2s + 1) e^{-s}$$

Par conséquent, (de même que dans l'exemple 3.2.1) nous avons que $\|K\| \leq 2/\sqrt{e}$ ce que implique $b_1 b_2 \|K\| \leq \sqrt{2}/e < 1$ maintenant, d'après Théorème 3.2.1, nous concluons que l'équation (3.27) a au moins une solution dans l'espace des $L^1(\mathbb{R}^+)$.

CONCLUSION

Ce travail a mis en évidence l'étude d'une classe d'équation fonctionnelle-intégrale non linéaire dans l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}_+)$:

$$x(t) = f_1\left(t, \int_0^t k(t,s)f_2(s,x(s))ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1)$$

où les fonctions $f_1; f_2$ et k satisfont aux conditions de Carathéodory. L'équation (3.1) contient plusieurs types d'équations intégrales de Volterra. Par exemple, l'équation intégrale non linéaire de type Volterra-Hammerstein et l'équation intégrale linéaire classique de Volterra. Cette étude a donc consisté à chercher une solution faible de (3.1) en utilisant la notion de la mesure de non compacité faible et le théorème du point de Schauder. Nous observons que les solutions des équations intégrales de Volterra obtenues au Chapitre 2 sont plus régulières (elles sont continues) que la solution faible de (3.1) obtenue au Chapitre 3.

Bibliographie

- [1] J. APPEL, P.P. ZABREJKO, *Nonlinear Superposition Operators*, in : Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 95, Cambridge University Press, 1990.
- [2] J.BANAŚ, A. CHLEBOWICZ, *On existence of integrable solutions of a functional integral equation under Carathéodory conditions*.J. Math. Anal. Appl.70 (2009) 3172–3179
- [3] J. BANAŚ, W.G. EL-SAYED, *Measures of noncompactness and solvability of an integral equation in the class of functions of locally bounded variaton*, J.Math. Anal. Appl. 167 (1992) 133–151.
- [4] J.BANAŚ, Z. KNAP, *Measures of weak noncompactness and nonlinear integral equations of convolution type*.J. Math. Anal. Appl. 146 (1990) 353–362.
- [5] J. BANAŚ, J. RIVERO, *On measures of weak noncompactness*, Ann. Mat. Pure Appl. 151 (1988) 213–224.
- [6] H. BREZIS, *Functional analysis,sobolev spaces and partial differential equations*,Springer, New York, 2011.
- [7] T.A.BURTON, *Integral equations, Volterra equations, and the remarkable resolvent : contractions*. EJTDE.2006. No. 2. 1-15.
- [8] K. CARATHÉODORY, *Vorlesungen Über Reele Funktionen*, De Gruyter. Leipzig. Berlin. 1918.
- [9] J.DIEUDONNÉ, *Sur les espaces de Köthe*.J. Math. Anal. 1 (1951) 81–115.
- [10] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, *Linear operators*, Wiley, 1971.

Bibliographie

- [11] R. E. EDWARDS, *Functional analysis : theory and applications*. Holt-Rinehart and Winston, 1965.
- [12] H.HOCHSTADT,*Integral Equation*, New York, 1973.
- [13] M. N.ISLAM , T. N.JEFFREY , *Qualitative Properties of Nonlinear Volterra Integral Equations*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2008
- [14] A. KAROUI, *On the Existence of Continuous Solutions of Nonlinear Integral Equations*, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia. Appl.18(2005) 299-305.
- [15] A. KHIRANI, *Étude des équations intégrales non linéaires de Volterra dans les espaces fonctionnels*.Thèse doctora université Mohamed Boudiaf - M'sila.2016.
- [16] M.A. KRASNOSEL'SKII, *On the continuity of the operator $Fu(x) = f(x, u(x))$* , Dokl. Akad. Nauk SSSR 77 (1951) 185–188.
- [17] M.A. KRASNOSEL'SKII, P.P. ZABREJKO, J.I. PUSTYL'NIK, P.J. SOBOLEVSKII, *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Noordhoff, Leyden, 1976.
- [18] M.KRASNOV , A.KISSÉLEV ,G. MAKARENKO , *Equations intégrales, problèmes et exercices*.Mir. Moscou. 1977.
- [19] H. REINHARD, *Equations différentielles fondements et applications*. gauthier-villars Paris, 1982.
- [20] A. M. WAZWAZ, *Linear and Nonlinear Integral Equations :Methods and Applications*, Springer, 2011.
- [21] P.P. ZABREJKO, A.I. KOSHELEV, M.A. KRASNOSEL'SKII, S.G. MIKHLIN, L.S. RAKOVSHCHIK, V.J. STECENKO, *Integral Equations*, Noordhoff, Leyden, 1975.
- [22] E.ZEIDLER *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Vol. I : Fixed point Theorems. Springer Verlag. New York. 1985.
- [23] ZIZI, KHELIFA, *Fonction d'une Variable Réelle*, Livre 07, O.P.U. 2015

ملخص

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة وجود الحل في فضاء لوبيغ $L^1(\mathbb{R}_+)$ للمعادلة التكاملية الدالية من الشكل :

$$x(t) = f_1 \left(t, \int_0^t k(t,s) f_2(s, x(s)) ds \right) \quad t \in \mathbb{R}_+$$

من خلال النقطة الثابتة وباستخدام مفهوم القياس الضعيف لعدم التراص حيث الدوال f_1, f_2 و k تحقق شروط كراتدوري.

هذه المعادلة تحتوي على عدة أنواع من المعادلات التكاملية لفولتيرا على سبيل المثال المعادلة التكاملية فولتيرا هامرستين الغير خطية و المعادلة التكاملية الكلاسيكية لفولتيرا الخطية.

الكلمات المفتاحية : المعادلة التكاملية الدالية ، المعادلة التكاملية لفولتيرا ، القياس الضعيف لعدم التراص ، الوجود ، الحل ، نظريات النقطة الثابتة.

Abstract

This memory aims to study the existence of a solution in the Lebesgue space $L^1(\mathbb{R}_+)$ of a type of functional-integral equation of the form :

$$x(t) = f_1 \left(t, \int_0^t k(t,s) f_2(s, x(s)) ds \right) \quad t \in \mathbb{R}_+$$

by the fixed-point method using the notion of the measure weak non-compactness where the functions f_1, f_2 and k satisfy the Carathéodory conditions.

This equation contains a lot of special types Volterra integral equations. For example, the non-linear integral equation Volterra-Hammerstein and the classical linear Volterra integral equation.

Keywords: functional-integral equation, Volterra integral equation, the measure weak non-compactness, fixed-point theorems, existence, solution.

Résumé

Ce mémoire a pour objectif d'étudier l'existence d'une solution dans l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}_+)$ d'un type d'équation fonctionnelle-intégrale de la forme :

$$x(t) = f_1 \left(t, \int_0^t k(t,s) f_2(s, x(s)) ds \right) \quad t \in \mathbb{R}_+$$

par la méthode du point fixe en utilisant la notion de la mesure de non compacité faible où les fonctions f_1, f_2 et k satisfont aux conditions de Carathéodory.

Cette équation contient plusieurs types d'équations intégrales de Volterra. Par exemple, l'équation intégrale non linéaire de type Volterra-Hammerstein et l'équation intégrale linéaire classique de Volterra.

Mots-clés : équation fonctionnelle-intégrale, équation intégrale de Volterra, mesure de non compacité faible, théorèmes du point fixe, existence, solution.