

Remerciements

*Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce modeste travail. Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de l'enseignant "**LETOUFA Yassine**", à notre l'université "**EL CHAID HAMMA LAKHDAR D'ELOUED**", a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail. Ainsi qu'à tous les professeurs de notre l'université spécialement : SAYAH, MEDAKHEL. Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutien moral. Nous tenons a remercier : Khaoula, Sara, Fatiha, et tous les étudiants de La promotion 2014/2015 de Math de l'université "**EL CHAID HAMMA LAKHDAR D'ELOUED**".*

Notations générales

$\Delta :$	Laplacien.
$\Delta u(x) :$	Laplacien de u .
$V :$	la volume.
$f(V) :$	la fonction de la volume.
$\lambda_n :$	les valeurs propres.
$R :$	le rayon.
$t :$	le temps.
$\rho :$	la masse volumique du matériau.
$\Omega :$	intervalle.
$C^1 :$	l'ensemble des fonctions est continue et la différentielle d'ordre 1 est continue
$\ \cdot\ :$	la norme.
$ \cdot :$	la valeur absolue.
$\int :$	l'intégral
$\partial f(x) :$	la dérivée partielle de f .
$\inf f(x) :$	la borne inférieure de fonction f .
$\sup f(x) :$	la borne supérieure de fonction f .
$\max :$	le maximum.
$\lim :$	la limite.

Table des matières

Notations générales	ii
Introduction générale	1
1 Équation de la chaleur	2
1.1 Modélisation	2
1.2 Calcule de la solution	4
1.3 Propriétés de la résolution	8
1.3.1 Le principe du maximum	8
1.4 Approximation numérique	12
2 Équation de Laplace	18
2.1 Modélisation : membrane élastique	18
2.2 Calcule de la solution	20
2.2.1 Le problème uni-dimensionnel	20
2.2.2 Le cas bidimensionnel. Séparation des variables	21
2.3 Propriétés de la résolution	25
2.3.1 Conditions aux limites naturelles. Existence et unicité	25
2.3.2 Principes de Maximum	27
2.4 Approximation numérique	30
3 Équation des ondes	36
3.1 Modélisation	36
3.2 Calcule de la solution	37

3.3 Propriétés de la résolution	39
Conclusion Générale	45
Bibliographie	46

Introduction générale

Dans le cadre de résolution des équations dérivés partielles linaires physiques on se rencontre avec l'étape de transformation d'une phénomène physique a une équation mathématique.

Dans notre travail on se base sur la recherche des méthodes de résolution, pour ce type des équations parabolique elliptique hyperbolique afin de trouver une solution avec deux aspects analyse et numérique et on decrit les spécifites de chaque équation (existence , unicité).

On a commencé avec **le premier chapitre** qui touche les équations de la chaleur dans le type parabolique en utilisant la méthode de séparation des variables .

Dans **le deuxièm chapitre** on a choisit l'équation de Laplace dans le type elliptique avec la méthode de séparation des variables. Au **dernier chapitre** on a appliqué la méthode des caractéristiques sur les équation des ondes dans le type hyperbolique.

A la fin du chapitre 1 et 2 on a appliqué la résolution numérique par la méthode de déffinition finis. Une conclusion générale est mit a la fin de ce travail.

Chapitre 1

Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux

$$u_t(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t); \quad \Delta u(x, t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) \quad (1.0.1)$$

Pour u défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$ et $k > 0$.

C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution : diffusion de chaleur, répartition de substances chimiques, mélange d'espèces,...

1.1 Modélisation

Il existe plusieurs approches, par exemple le bilan pour un volume de contrôle. On suit ici un raisonnement s'appuyant sur la thermodynamique et la loi de Fourier.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à un volume τ de conducteur contenu à l'intérieur d'une surface Σ entre t et

$$t + dt : U(t + dt) - U(t) = \delta W + \delta Q \quad (1.1.1)$$

on considère ici un système isochore par conséquent $\delta W = 0$. De plus

$$U(t) = \iiint_{\tau} \rho c \mu(t) d\tau + f(v) \quad (1.1.2)$$

où ρ est la masse volumique du matériau (en $kg.m^{-3}$), c la chaleur spécifique massique du matériau (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et $f(V)$ est une fonction du volume. Alors :

$$U(t + dt) - U(t) = \iiint_{\tau} \rho c (\mu(t + dt) - \mu(t)) d\tau = \iiint_{\tau} \rho c \frac{\partial \mu}{\partial t} dt d\tau \quad (1.1.3)$$

On a aussi, par définition de $\vec{j} \cdot Q$ (vecteur densité de flux de chaleur) et de la densité volumique de source de chaleur par unité de temps P (en W/m^3) : (note pour le signe :

$\vec{j} \cdot Q \cdot d\vec{S}$ est positif quand le flux est vers l'extérieur, donc la variation de chaleur est alors négative dans le volume)

$$\delta Q = - \left(\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot Q \cdot d\vec{S} \right) dt + \left(\iiint_{\tau} P d\tau \right) dt \quad (1.1.4)$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradsky on obtient :

$$\delta Q = - \left(\iiint_{\tau} \text{div } \vec{j} \cdot Q \cdot d\tau \right) dt + \left(\iiint_{\tau} P d\tau \right) dt \quad (1.1.5)$$

donc :

$$\iiint_{\tau} \rho c \frac{\partial \mu}{\partial t} dt d\tau = - \iiint_{\tau} \text{div } \vec{j} \cdot Q d\tau dt + \iiint_{\tau} P d\tau dt \quad (1.1.6)$$

or ceci est valable pour tout volume τ , donc :

$$\text{div } \vec{j} \cdot Q = -\rho c \frac{\partial \mu}{\partial t} + P \quad (1.1.7)$$

En utilisant la loi de Fourier :

$$\vec{j} \cdot Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} \mu \quad (1.1.8)$$

et le fait que :

$$\text{div } (\overrightarrow{\text{grad}}) = \nabla^2 = \Delta \quad (\text{laplacien}) \quad (1.1.9)$$

on obtient, si la conductivité thermique ne dépend pas des propriétés spatiales :

$$-\lambda \Delta \mu = -\rho c \frac{\partial \mu}{\partial t} + P \Rightarrow \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial t} - \Delta \mu = \frac{P}{\lambda} \quad (1.1.10)$$

ce qui est bien l'équation de la chaleur.

Enfin, en posant $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ (coefficient de diffusion).

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = D \Delta \mu + \frac{P}{\rho c} \quad (1.1.11)$$

.

1.2 Calcule de la solution

On cherche à la solution l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(x, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

avec les relations de compatibilité entre la condition initiale et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = 0. \quad (1.2.2)$$

1^{ère} étape :

La méthode de séparation des variables consiste à poser

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x) \quad (1.2.3)$$

dans l'équation et de "séparer les variables". L'équation devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = k\psi(t)\varphi''(x). \quad (1.2.4)$$

On divise alors formellement par $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{k} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad (1.2.5)$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constants, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\psi(t) = \lambda k \psi(t) \quad (1.2.6)$$

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x). \quad (1.2.7)$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.

2^{ème} étape :

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Les solutions dependent de la constante λ

- Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation differentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (1.2.9)$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \quad (1.2.10)$$

$$\varphi(L) = 0 \Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \quad (1.2.11)$$

$$\Rightarrow 2A \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \quad (1.2.12)$$

$$\Rightarrow A = B = 0. \quad (1.2.13)$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

-Si $\lambda = 0$ alors :

$$\varphi(x) = Ax + B \quad (1.2.14)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (1.2.15)$$

$$\varphi(L) = 0 \Rightarrow AL = 0 \Rightarrow A = 0. \quad (1.2.16)$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

- Si $\lambda < 0$ alors :

$$\varphi(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x) \quad (1.2.17)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (1.2.18)$$

$$\varphi(L) = 0 \implies A \sin(\sqrt{-\lambda L}) = 0 \quad (1.2.19)$$

$$\implies \text{ou bien } A = 0 \text{ ou bien } \sqrt{-\lambda L} = n\pi, n > 0 \text{ entier.} \quad (1.2.20)$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n > 0 \quad (1.2.21)$$

associées aux valeurs de λ suivantes :

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L}. \quad (1.2.22)$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de λ . On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propre en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif près.

3^{ème} étape :

On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x) g(x) dx \quad (1.2.23)$$

orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$, dans le sens où

$$\langle \varphi_n(x), \varphi_m(x) \rangle = 0 \quad \text{pour } n \neq m. \quad (1.2.24)$$

Ceci indique que la suite des $\varphi_n(x)$ est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire.

4^{ème} étape :

On résout l'équation en $\psi(x)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi'_n(t) = \lambda_n k \psi_n(t) \quad (1.2.25)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = c_n e^{k\lambda_n t} = c_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad (1.2.26)$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solutions. c_n est une constante arbitraire pour le moment.

A ce stade, les fonctions

$$\psi_n(t) \varphi_n(x) \quad (1.2.27)$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.

5^{ème} étape :

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(t, x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (1.2.28)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n pour que la solution $u(t, x)$ vérifie la condition initiale. Cette condition initiale s'écrit

$$u(0, x) = u_0(x)$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) = u_0. \quad (1.2.29)$$

Ici, les c_n peuvent s'interpréter directement comme étant les coordonnées de

la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$. Comme les $\varphi_n(x)$ sont orthogonales pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini précédemment, on a :

$$c_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (1.2.30)$$

On obtient donc la solution sous la forme d'une série. Ici il s'agit d'une série de Fourier où seules les composantes en $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ sont présentes, puisqu'on a imposé :

$$u(0) = u(L) = 0. \quad (1.2.31)$$

1.3 Propriétés de la résolution

1.3.1 Le principe du maximum

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et prouver le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 1.3.1 *Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , solution de l'équation de la chaleur*

$$\partial_t u(t, x) = k \Delta u(t, x) \quad (1.3.1)$$

dans le rectangle $[0; T] \times [0; L]$. Alors u atteint son maximum sur l'un des bords $t = 0$, $x = 0$ ou $x = L$ du rectangle.

Preuve. On pose, pour $\epsilon > 0$, $v_\epsilon(t, x) = u(t, x) + \epsilon x^2$. Supposons que v atteigne son maximum en un point (t_0, x_0) situé à l'intérieur du rectangle, donc dans $]0, T[\times]0, L[$.

On a $\partial_t v_\epsilon(t_0, x_0) = 0$ et $\Delta v_\epsilon(t_0, x_0) \leq 0$. Puisque u est solution de l'équation de la chaleur, on obtient

$$\partial_t v_\epsilon(t, x) - k \Delta v_\epsilon(t, x) = \partial_t u(t, x) - k \partial^2 u(t, x) - 2k\epsilon = -2k\epsilon \quad (1.3.2)$$

En particulier, puisque $\partial_t v_\epsilon(t_0, x_0) = \partial_t u(t_0, x_0) = 0$, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\Delta v_\epsilon(t_0, x_0) > 0$$

ce qui est absurde.

Supposons maintenant que v_ϵ atteigne son maximum en un point (t_0, x_0) situé sur le bord droit du rectangle, i. e. pour $t_0 = T$. On a $\partial_x v_\epsilon(t_0, x_0) = 0$ et $\Delta v_\epsilon(t_0, x_0) \leq 0$. On ne peut plus dire que $\partial_t v_\epsilon(t_0, x_0) = 0$, mais on a quand même $\partial_t v_\epsilon(t_0, x_0) \geq 0$ puisque

$$\partial_t v_\epsilon(t_0; x_0) = \lim_{\delta} \frac{v_\epsilon(t_0, x_0) - v_\epsilon(t_0 - \delta, x_0)}{\delta} \geq 0 \quad (1.3.3)$$

On aboutit donc à la même contradiction. La fonction v_ϵ atteint donc son maximum dans $[0, T] \times [0, L]$ en un point de γ , où γ est la réunion des trois côtés du rectangle mentionnés dans le théorème. Or sur γ on a :

$$v_\epsilon(t, x) \leq M + \epsilon L^2 \quad (1.3.4)$$

où M désigne le maximum de u sur γ . Finalement pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$,

on a :

$$u(t, x) = v_\epsilon(t, x) - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon(L^2 - x^2). \quad (1.3.5)$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient enfin, pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$

$$u(t, x) \leq M. \quad (1.3.6)$$

■

Remarque 1.3.1 Dans ce théorème, la fonction u est continue dans le rectangle

$[0, T] \times [0, L]$, donc est bornée et atteint sa borne supérieure dans $[0, T] \times [0, L]$.

Le théorème affirme qu'il existe un point de l'un des côtés $t = 0$, $x = 0$ ou $x = L$ du rectangle, où ce maximum est atteint. En fait on peut démontrer, mais c'est beaucoup plus difficile un principe du maximum fort : le maximum n'est pas atteint ailleurs que sur l'un de ces côtés.

Remarque 1.3.2 Notons que dans le théorème, on n'utilise que l'inégalité

$$\partial_t u(t, x) \leq k \Delta u(t, x), \quad (1.3.7)$$

dans la démonstration du théorème.

Exercice 1.3.1 Montrer que la fonction $u(t, x) = -2xt - x^2$ est solution de l'équation $\partial_t u - x \Delta u = 0$. Où se trouvent les maxima de u dans le rectangle $[0, 1] \times [-2, 2]$? Pourquoi le Principe du Maximum ne marche-t-il pas pour cette équation?

Du Principe du Maximum découle l'unicité de l'éventuelle solution du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k \Delta u(t, x) = f(t, x) \\ u(0, x) = \phi(x) \\ u(t, 0) = g(t), u(t, L) = h(t). \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Proposition 1.3.1 Soit ϕ , g et h sont trois fonctions régulières. Il existe au plus une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$ qui vérifie (1.3.8)

Preuve. Supposons que u_1 et u_2 soient deux fonctions régulières vérifiant (1.3.8), et notons $w = u_1 - u_2$. La fonction w est régulière et vérifie

$$\begin{cases} \partial_t w(t, x) - k \Delta w(t, x) = 0 \\ w(0, x) = 0 \\ w(t, 0) = 0, w(t, L) = 0 \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Soit $T > 0$. On sait que le maximum de w sur $[0, T] \times [0, L]$ est atteint sur l'un des côtés $t = 0$, $x = 0$ ou $x = L$. Mais w y est nulle, donc $w(t, x) \leq 0$ pour tout

$(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$. Le même raisonnement vaut pour $-w$: on a donc aussi

$w(t, x) \geq 0$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$, et nalement $w = 0$ sur $[0, T] \times [0, L]$. Ceci étant vrai pour tout T , on a bien $u_1 = u_2$. ■

Remarque 1.3.3 .

On a juste besoin de u solution dans $C^2([0, +\infty[\times]0, L]) \cap C^0([0, T] \times [0, L])$ pour la démonstration, l'équation aux dérivées partielles étant satisfaite dans le rectangle ouvert. La rédaction est trop floue un peu partout sur ce point. Cette remarque sera utile en fin de chapitre.

Revenons à l'équation de la chaleur sur toute la droite réelle. Dans ce cas, le résultat d'unicité que nous venons d'obtenir peut s'étendre modulo certaines conditions

supplémentaires à l'infini. Par exemple on peut s'intéresser aux solutions qui tendent vers 0, quand $|x| \rightarrow \infty$ uniformément par rapport à t .

Proposition 1.3.2 *Soit ϕ une fonction régulière. Il existe au plus une fonction u de classe C^2 sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$, telle que*

$$\sup_{t \in]0, +\infty[} |u(t, x)| \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty \quad (1.3.10)$$

et

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k\Delta u(t, x) = f(t, x) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \phi(x) \end{cases} \quad (1.3.11)$$

soient vérifiées.

Preuve. Supposons que u_1 et u_2 soient deux fonctions régulières, qui tendent vers 0 à l'infini, et qui vérifient (1.4). On note $w = u_1 - u_2$. La fonction w est régulière, pour (1.3) et (1.4) pour $\phi \equiv 0$ et $f \equiv 0$. Appliquons le Principe du Maximum à w et à $-w$ sur le domaine $[0, T] \times [-L, L]$. On a

$$\begin{aligned} \min \left(0, \min_{t \in [0, T]} w(t, L), \min_{t \in [0, T]} w(t, -L) \right) &\leq w(t, x) \\ &\leq \max \left(\max_{t \in [0, T]} w(t, L), \max_{t \in [0, T]} w(t, -L), 0 \right) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Puisque $w(t, \pm L)$ tend vers 0 quand $L \rightarrow +\infty$ uniformément par rapport à t , on obtient en passant à la limite,

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, w(t, x) = 0. \quad (1.3.13)$$

■

Remarque 1.3.4 *En fait, on a démontré le résultat sous la condition plus faible et plus facile à vérifier que, pour tout $T > 0$*

$$\sup_{t \in]0, T]} |u(t, x)| \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty. \quad (1.3.14)$$

A titre d'illustration supplémentaire de l'importance du Principe du Maximum, on montre maintenant que le problème de Dirichlet (1.3.8) est "stable", au sens où des données proches vont donner des solutions proches.

Proposition 1.3.3 Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions régulières, et u_1 et u_2 les solutions respectives des problèmes

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - k \Delta u(t, x) = f(t, x) \\ u(0, x) = \phi_j(x) \\ u(t, 0) = 0, u(t, L) = 0. \end{cases} \quad (1.3.15)$$

pour tout $t > 0$ on a :

$$\max_{0 \leq x \leq L} |u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \max_{0 \leq x \leq L} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|. \quad (1.3.16)$$

Preuve. On considère encore $w = u_1 - u_2$. La fonction w est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t w(t, x) - k \Delta w(t, x) = 0 \\ w(0, x) = \phi_1(x) - \phi_2(x) \\ w(t, 0) = 0 \\ w(t, L) = 0. \end{cases} \quad (1.3.17)$$

Le Principe du Maximum dit que dans tout le rectangle $[0, T] \times [0, L]$ on a :

$$w(t, x) \leq \max_{x \in [0, L]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|. \quad (1.3.18)$$

Le même principe appliqué à $-w$ donne

$$w(t, x) \geq - \max_{x \in [0, L]} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \quad (1.3.19)$$

ce qui prouve la proposition. ■

1.4 Approximation numérique

On se propose de résoudre numériquement l'équation de la chaleur dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = d \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) \text{ pour } (x, y, t) \in]0, a[^2 \times]0, T[\\ u(x, y, 0) = \Phi(x, y) \text{ pour } (x, y) \in]0, a[^2 \\ u(x, y, t) = 0 \text{ pour } (x, y, t) \in \partial([0, a]^2) \times]0, T[\end{cases} \quad (1.4.1)$$

où $d \in \mathbb{R}_+^*$, $T > 0$ et la condition initiale Φ est donnée.

Comme dans le cas des fonctions à une dimension spatiale, on utilise la formule de TAYLOR pour approximer les dérivées partielles de u . Les valeurs de v sur la grille discrète sont notées $v_{m,p}^n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $m, p \in \mathbb{Z}$.

Pour simplifier on suppose que $(x_m, y_p) = (mh, ph)$, c'est-à-dire que l'on a une grille spatiale carrée.

Le schéma de Crank-Nicolson s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{v_{m,p}^{n+1} - v_{m,p}^n}{k} = & \frac{d}{2} \left(\frac{v_{m+1,p}^n - 2v_{m,p}^n + v_{m-1,p}^n}{h^2} + \frac{v_{m,p+1}^n - 2v_{m,p}^n + v_{m,p-1}^n}{h^2} \right. \\ & \left. + \frac{v_{m+1,p}^{n+1} - 2v_{m,p}^{n+1} + v_{m-1,p}^{n+1}}{h^2} + \frac{v_{m,p+1}^{n+1} - 2v_{m,p}^{n+1} + v_{m,p-1}^{n+1}}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

et, en posant $\mu = k/h^2$, on a :

$$\begin{aligned} & 2(1 + 2d\mu)v_{m,p}^{n+1} - d\mu(v_{m+1,p}^{n+1} + v_{m-1,p}^{n+1} + v_{m,p+1}^{n+1} + v_{m,p-1}^{n+1}) \\ = & 2(1 - 2d\mu)v_{m,p}^n + d\mu(v_{m+1,p}^n + v_{m-1,p}^n + v_{m,p+1}^n + v_{m,p-1}^n). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Souvent on utilise les masques pour exprimer la relation entre v^n et v^{n+1} :

$$\begin{bmatrix} 0 & -d\mu & 0 \\ -d\mu & 2(1 + 2d\mu) & -d\mu \\ 0 & -d\mu & 0 \end{bmatrix} v^{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & d\mu & 0 \\ d\mu & 2(1 - 2d\mu) & d\mu \\ 0 & d\mu & 0 \end{bmatrix} v^n. \quad (1.4.4)$$

Cette relation est valable pour tous les points intérieurs au domaine spatial,

i.e. les points $(x_m, y_p) \in]0, a[^2$. Les valeurs sur le bord étant imposées par le problème, il faut déterminer

$v_{m,p}^{n+1}$ en tout point intérieur, grâce à la relation ci-dessus. Pour cela il faut résoudre un système linéaire que l'on va construire maintenant.

Supposons que $[0, a]$ est discrétisé en $M + 2$ points, les points intérieurs sont alors dans l'ensemble $\{(x_m, y_p) / 1 \leq m, p \leq M\}$, car $x_0 = y_0 = 0$ et $x_{M+1} = y_{M+1} = a$.

En utilisant l'ordre lexicographique, $i = m + (p-1)M$, pour ordonner les points intérieurs, on peut écrire la relation (1.4.4) sous forme matricielle :

$$A \cdot V^{n+1} = B^n \quad (1.4.5)$$

où $B^n \in \mathbb{R}^{M^2}$ et, pour $i = 1, \dots, M^2$:

$$B_i^n = 2(1 - 2d\mu)v_{m,p}^n + d\mu(v_{m+1,p}^n + v_{m-1,p}^n + v_{m,p+1}^n + v_{m,p-1}^n).$$

On a $v_{m,p}^{n+1} = V_i^{n+1}$ et, pour les quatre voisins,

$$v_{m-1, p}^{n+1} = V_{i-1}^{n+1}, \quad v_{m+1, p}^{n+1} = V_{i+1}^{n+1}, \quad v_{m, p-1}^{n+1} = V_{i-M}^{n+1}, \quad v_{m, p+1}^{n+1} = V_{i+M}^{n+1}.$$

Tous les éléments de la i^e ligne, $1 \leq i \leq M^2$, de la matrice A sont nuls, sauf $A_{i,i} = \alpha$ et,

$$\text{si } i \notin MN + 1 : A_{i, i-1} = \beta; \quad \text{si } i > M : A_{i, i-M} = \beta;$$
$$\text{si } i \notin M\mathbb{N} - 1 : A_{i, i+1} = \beta; \quad \text{si } i < M^2 - M : A_{i, i+M} = \beta;$$

où $\alpha = 2(1 + 2d\mu)$ et $\beta = -d\mu$.

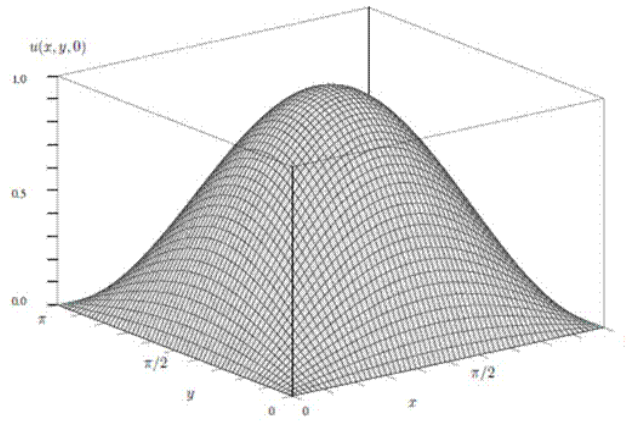
Pour $M = 4$, la matrice A s'écrit :

[illegible]

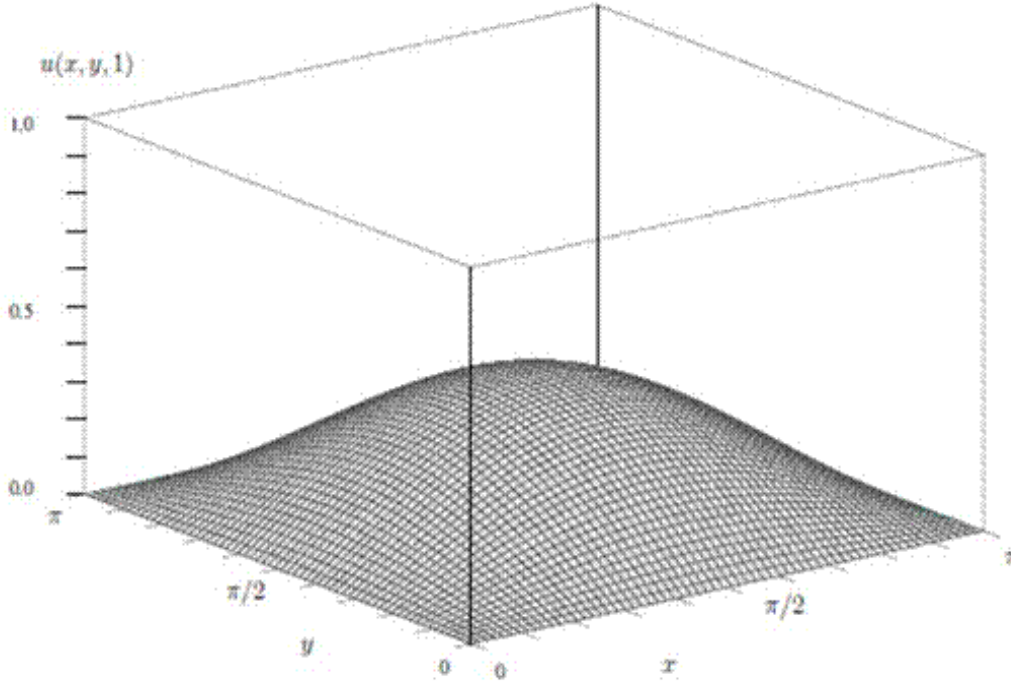
La matrice A est tridiagonale par blocs, chacun des M^2 blocs est carré d'ordre M et A est une matrice $(M^2 \times M^2)$.

Pour chaque pas de temps t_n il faut résoudre (2.2.8), c'est-à-dire un système d'ordre M^2 . On montre que la matrice A est définie positive et admet une décomposition de **CHOLESKY** : $A = LL^t$, où L est une matrice triangulaire inférieure. Cette décomposition simplifie la résolution du système (2.2.8). Afin d'économiser de la place mémoire, on utilise de plus une représentation adaptée à la matrice A qui est une matrice creuse.

On obtient les graphes suivants :



Condition initiale $\Phi(x; y) = \sin(x)\sin(y)$



Solution à l'instant $t = 1$

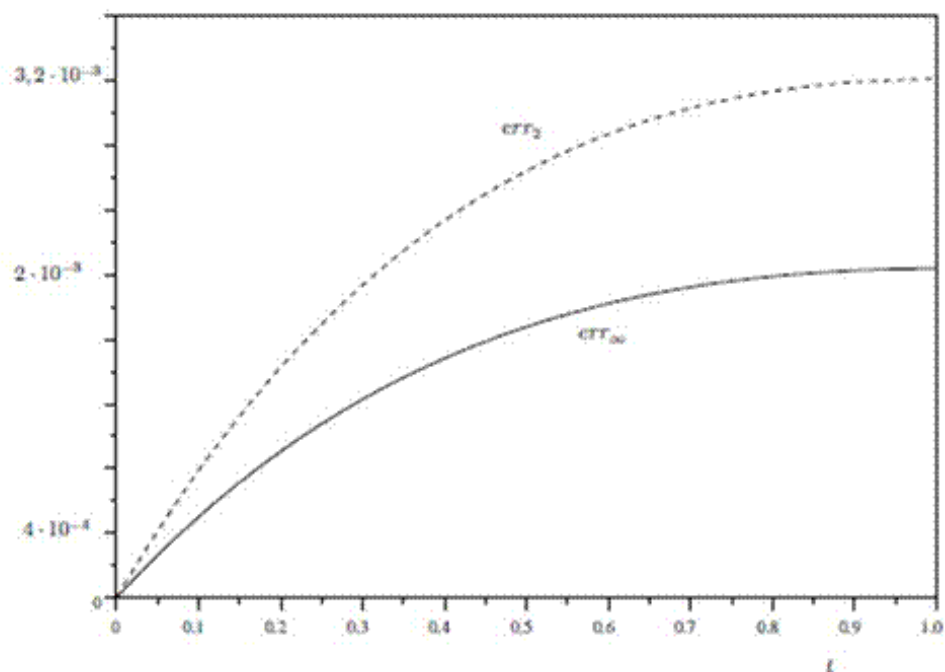
On peut de nouveau facilement calculer la solution u de l'équation aux dérivées partielles et comparer à chaque étape la solution discrète v à u . On utilise pour cela

$$\text{err}_\infty(t_n) = \sup_{(x_m, y_p)} |u(x_m, y_p, t_n) - v(x_m, y_p, t_n)| \quad (1.4.6)$$

et

$$\text{err}_2(t_n) = h \left(\sum_{(x_m, y_p)} |u(x_m, y_p, t_n) - v(x_m, y_p, t_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4.7)$$

où $h = 0,05$. La figure suivante représente l'évolution de ces erreurs au cours du temps



Pour voir l'effet de la diffusion sur une donnée initiale irrégulière, on se propose d'étudier sur $]0, 1[^2$ l'évolution de la fonction $\Phi(x, y) = I_{[1/3, 2/3]}(x, y)$. On obtient des résultats numériques satisfaisants pour $\lambda = k/h$ petit.

Chapitre 2

Équation de Laplace

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}(x) = f(x). \quad (2.0.1)$$

C'est l'équation de POISSON qui modélise des phénomènes d'équilibre :

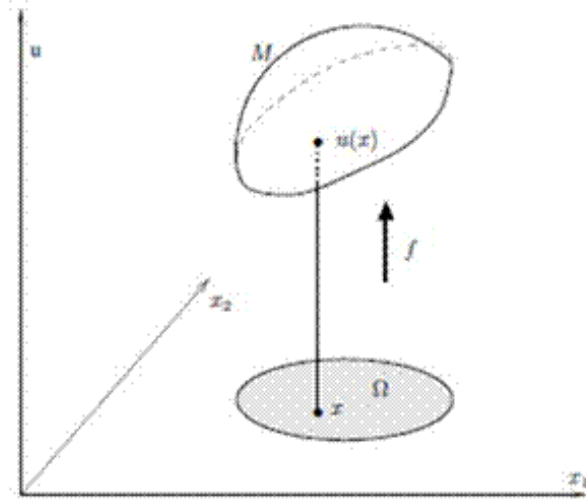
potentiel électrostatique, membrane en équilibre, champ gravitationnel, . . .

Si $f = 0$ on a l'équation de Laplace et on dit que u est une fonction harmonique .

2.1 Modélisation : membrane élastique

On considère une membrane élastique qui s'identifie à une région plane $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si on n'applique aucune force. Si on applique une force f , normale à $\mathbb{R}^2$, la membrane se déforme et prend une position d'équilibre M .

En supposant des *petites déformations* on note $u(x) \in M$ la position d'équilibre du point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, donc $M = u(\Omega)$.



Le travail de la tension est proportionnel à la variation d'aire de la membrane :

$$\tau (\text{aire}(M) - \text{aire}(\Omega)) = \int_{\Omega} \tau \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1 \right) dx, \text{ avec } \tau \in \mathbb{R}_+^*. \quad (2.1.1)$$

Comme $|u_{x_1}|$ et $|u_{x_2}|$ sont petits, on a $\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \approx 1 + |\nabla u|^2 / 2$.

Le travail de la force f est donné par le déplacement des points $x \in \Omega$, on en déduit l'expression de l'énergie potentielle de la membrane à l'équilibre :

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \tau |\nabla u|^2 + f u \right) dx. \quad (2.1.2)$$

Posons $\phi(\varepsilon) = E(u + \varepsilon \tilde{u})$, où $\tilde{u}$ est une déformation *admissible* de M , i.e. compatible avec les contraintes imposées sur u . Comme la membrane est à l'équilibre, $E(u)$ est minimal, donc

$$0 = \phi'(0) = \int_{\Omega} (-\tau \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} + f \tilde{u}) dx. \quad (2.1.3)$$

En appliquant la formule de GREEN on a pour tout déplacement admissible $\tilde{u}$:

$$\int_{\Omega} (\tau \Delta u + f) \tilde{u} dx - \int_{\partial \Omega} \tau \frac{du}{dn} \tilde{u} d\sigma = 0. \quad (*)$$

En supposant u , f et $\tilde{u}$ régulières, on en déduit l'équation de *Poisson* :

$$\tau \Delta u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.1.4)$$

Des contraintes sur le bord de la membrane M donnent, à travers l'intégrale curviligne dans (*), des contraintes sur $\tilde{u}$:

- si le bord de la membrane est fixé, $u(x) = b(x)$ pour $x \in \partial\Omega$, on a $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$ et (*) est vérifié; on obtient *le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\tau}f & \text{sur } \Omega \\ u = b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1.5)$$

- si le bord de la membrane n'est pas fixé, $\tilde{u}$ est non nul sur $\partial\Omega$ et (*) est vérifié si u est solution du *problème de Neumann* avec conditions au bord homogènes

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\tau}f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1.6)$$

- si une force f_1 , normale à $\mathbb{R}^2$, agit sur le bord de la membrane, l'intégrale curviligne dans (*) devient $\int_{\partial\Omega} (-\tau \frac{du}{dn} + f_1) \tilde{u} d\sigma$, et on a le problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\tau}f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn} = \frac{1}{\tau}f_1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1.7)$$

2.2 Calcule de la solution

Nous proposons dans cette partie de calculer quelques solutions analytiques de l'équation de Laplace et de Poisson sur des domaines simples.

2.2.1 Le problème uni-dimensionnel

Considérons le problème unidimensionnel suivant :

$$\Delta u(x) = u''(x) = 0, x \in]a, b[\quad (2.2.1)$$

qui a pour solution générale :

$$u(x) = \alpha x + \beta \quad (2.2.2)$$

Considérons différents cas de conditions aux limites :

- Dirichlet

$$u(a) = u_a, u(b) = u_b \implies u(x) = u_a + \frac{x-a}{b-a} (u_b - u_a) \quad (2.2.3)$$

On peut noter que le problème est bien posé car il conduit à une solution unique.

- Dirichlet-Neumann

$$u(a) = u_a, u'(b) = v_b \implies u(x) = u_a + \frac{x-a}{b-a}(v_b) \quad (2.2.4)$$

On peut noter une nouvelle fois que le problème est bien posé car il conduit à une solution unique.

- Neumann

$$u'(a) = v_a, u'(b) = v_b \implies \begin{cases} \text{Si } v_a = v_b, \text{ alors } u(x) = v_a x + C & \text{infinité de solutions} \\ \text{Si } v_a \neq v_b, \text{ alors pas de solution} \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Le problème de Neumann pur n'est pas bien posé par défaut.

On peut remarquer que les principes de maximum sont bien vérifiés.

2.2.2 Le cas bidimensionnel. Séparation des variables

Les résolutions analytiques en deux dimensions s'effectuent généralement par séparation des variables, c'est à dire que l'on cherche des solutions sous la forme :

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.2.6)$$

Le cas du carré unité

Dans ce paragraphe, on considérera le carré unité défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \quad (2.2.7)$$

Equation de Laplace

Commençons par le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(0, y) = 0, u(1, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, 1) = f(x) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

L'équation de séparation des variables nous donne :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (2.2.9)$$

Partout où u est non nulle, on peut diviser et obtenir :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \quad (2.2.10)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ Y''(y) = -\lambda Y(y) \end{cases} \quad (2.2.11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(x) = A_1 \left[e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x} \right] \\ Y(y) = A_2 \left[e^{\sqrt{-\lambda}y} + C e^{-\sqrt{-\lambda}y} \right] \end{cases} \quad (2.2.12)$$

On obtient donc comme famille de solution générale :

$$u(x, y) = A \left[e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x} \right] \left[e^{\sqrt{-\lambda}y} + C e^{-\sqrt{-\lambda}y} \right] \quad (2.2.13)$$

Il reste maintenant à respecter les conditions aux limites et à justifier le type de solution choisie. Les conditions aux limites que l'on a choisi sont assez simples et les trois premières conduisent à réduire la forme générale à :

$$u(x, y) = A \sin n\pi x \operatorname{sh} n\pi y \quad (2.2.14)$$

La dernière condition est plus délicate à traiter. Supposons que la fonction f se met sous la forme d'une combinaison linéaire finie de sinus:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin n\pi x \quad (2.2.15)$$

on peut alors simplement choisir :

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\operatorname{sh} n\pi} \quad (2.2.16)$$

On obtient alors la solution :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \sin n\pi x \operatorname{sh} n\pi y \quad (2.2.17)$$

En effet, comme il s'agit d'une somme finie, on peut différencier sous le signe somme et donc u répond trivialement à l'équation de Laplace.

Il reste maintenant le cas d'une fonction générale $f(x)$. Dans ce cas, on voit naturellement apparaître la décomposition en série de Fourier de sinus de f .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin n\pi x \quad (2.2.18)$$

Il est reste à déterminer les coefficients de la décomposition. Le point clé est l'orthogonalité des fonctions sinus sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi x) dx = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad (2.2.19)$$

qui nous conduit à

$$\int_0^1 f(x) \sin(j\pi x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(j\pi x) dx = \frac{\alpha_j}{2} \quad (2.2.20)$$

On obtient alors une solution générale du problème (2.2.8) sous la forme :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x \sinh n\pi y \quad (2.2.21)$$

avec

$$A_n = \frac{2}{\sin(n\pi)} \int_0^1 f(x) \sin(j\pi x) dx \quad (2.2.22)$$

Le cas du disque de rayon R

Nous allons considérer l'équation de Laplace et de Poisson posée sur le disque unité du plan

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \forall x \in \Omega \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R\} \quad (2.2.23)$$

Equation da Laplace

Considérons le problème suivant, en coordonnées polaires (r, θ)

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(\theta) = g(\theta) \text{ pour } r = R \end{cases} \quad (2.2.24)$$

Par séparation des variables $u(r, \theta) = a(r)b(\theta)$, on obtient :

$$\frac{r^2 a'' + r a'}{a} = -\frac{b''}{b} = k \in \mathbb{R} \quad (2.2.25)$$

soit

$$r^2 a''(r) + r a'(r) - k a(r) = 0 \quad (2.2.26)$$

$$b''(\theta) + k b(\theta) = 0 \quad (2.2.27)$$

L'équation (2.2.27) donne :

- si $k = 0$, $b(\theta) = \alpha\theta + \beta$. La fonction b doit être de plus 2π -périodique, donc $\alpha = 0$
- si $k < 0$, $b(\theta) = \alpha e^{-\mu\theta} + \beta e^{\mu\theta}$: impossible (Solution finie)
- si $k > 0$, $k = \mu^2$, $b(\theta) = \alpha \cos \mu\theta + \beta \sin \mu\theta$ avec $\mu = n \in \mathbb{N}$

Finalement, on conclut que :

$$b(\theta) = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2.28)$$

L'équation (2.2.26) pour $k = n^2$ donne :

$$r^2 a''(r) + r a'(r) - n^2 a(r) = 0 \quad (2.2.29)$$

On cherche des solutions sous la forme r^p et donc $(p(p-1) + p - n^2)r^p = 0$,

d'où $p = \pm n$:

- Si $n > 0$, $a_n(r) = c_n r^n + c_{-n} r^{-n}$ avec des solutions bornées soit $c_{-n} = 0$
- Si $n = 0$, $r^2 a''(r) + r a'(r) = 0 = (r a')' = 0$ soit $a(r) = k_1 + k_2 \ln r$ avec des solutions bornées : $k_2 = 0$

Finalement et par superposition, les seules solutions acceptables sont de la forme :

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n \quad (2.2.30)$$

Il faut donc maintenant traiter la condition aux limites, c'est à dire :

$$\sum_{n \geq 0} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) R^n = g(\theta) \quad (2.2.31)$$

Là encore, la décomposition en série de Fourier de $g(\theta)$ apparaît naturellement :

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (2.2.32)$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \quad (2.2.33)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (2.2.34)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta$$

D'où, par identification,

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n \geq 0} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n \quad (2.2.35)$$

2.3 Propriétés de la résolution

2.3.1 Conditions aux limites naturelles. Existence et unicité

Les conditions aux limites naturelles sont les conditions de Dirichlet, Neumann ou mixte sur différentes parties du bord. Afin de justifier ces affirmations introduisons trois problèmes elliptiques académiques :

1. Le Problème de Dirichlet sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.1)$$

2. Le Problème de Neumann sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \nabla u(x) \cdot n_x = \frac{du(x)}{dn_x} = h(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.2)$$

3. Le Problème mixte de Dirichlet-Neumann sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi :
trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega_1 \\ \frac{du(x)}{dn_x} = h(x), & x \in \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

avec

$$\begin{cases} \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega \\ \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Questions d'unicité

Si l'on considère des questions d'unicité à ces problèmes, on introduit deux fonctions solutions à chacun de ces problèmes, u_1 et u_2 .

La fonction différence $v = u_2 - u_1$ est donc solution du problème homogène avec des conditions aux limites homogènes. On a donc :

$$\Delta v = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} v \frac{dv}{dn_x} ds = 0 \quad (2.3.5)$$

Grâce à la première formule de Green, nous pouvons écrire que :

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{dv}{dn_x} ds = \int_{\partial\Omega} (v \Delta v + \nabla v \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx \quad (2.3.6)$$

On a donc que l'intégrale de la norme du gradient est nul sur ω ,

$$\int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx = 0 \quad (2.3.7)$$

ce qui entraîne si la solution est suffisamment régulière que

$$\nabla v(x) = 0, \forall x \in \Omega \quad (2.3.8)$$

Si on considère les conditions aux limites de type Dirichlet ou de type mixte Dirichlet-Neumann, on obtient $v \equiv 0$ et donc l'unicité.

Par contre dans le cas de Neumann, on a pas unicité car n'importe quelle fonction constante peut être solution si $h(x) \equiv 0$. On a d'ailleurs pas non plus existence de solution dans ce cas, sauf si :

$$\int_{\partial\Omega} h(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{dn_x} dx = \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (2.3.9)$$

Problème de Cauchy pour les équations elliptiques

2.3.2 Principes de Maximum

Les principes de maximum sont caractéristiques des EDP elliptiques. On donnera ici un bref aperçu de ces principes et les conséquences sur les questions de signe des solutions ou encore d'unicité. On renvoie pour une présentation détaillée des principes de maximum pour les EDP du second ordre à (RENARDY & ROGERS, 1993) ou (COURANT & HILBERT, 1962, Vol II., chap IV).

Principaux énoncés

Considérons un opérateur différentiel du second ordre de la forme suivante :

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i}(x) + c(x) u(x) \quad (2.3.10)$$

Les hypothèses suivantes sont faites pour l'ensemble de cette partie et sont valables quelque soit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1. Les coefficients a_{ij} , b_i et c sont continues sur l'adhérence $\bar{\Omega}$
2. La solution est suffisamment régulière, i.e., $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
3. La matrice a_{ij} est symétrique et définie positive $\forall x \in \bar{\Omega}$, c'est à dire L est elliptique

Sous ces hypothèses, on peut formuler les principes de maximum suivants.

Théorème 2.3.1 (*Principe de maximum faible*) Supposons que $Lu \geq 0$

(ou respectivement $Lu \leq 0$) sur un domaine borné Ω et que $c(x) = 0$ dans Ω . Alors la solution u atteint son maximum (respectivement son minimum) sur $\partial\Omega$.

Si de plus $Lu > 0$ alors la fonction u ne peut atteindre nulle part son maximum sur Ω .

Preuve. Plaçons nous dans le cas où $Lu > 0$ et supposons au contraire que la fonction u atteigne son maximum au point x_0 . A ce point, toutes les dérivées premières de u doivent s'annuler et donc

$$Lu(x_0) = a_{ij}u_{x_i x_j}(x_0) \quad (2.3.11)$$

Comme la matrice $u_{x_i x_j}(x_0)$ est négative semi définie car x_0 est un point maximum, on conclut que $Lu(x_0) \leq 0$, une contradiction. ■

Remarque 2.3.1 *L'hypothèse $Lu \geq 0$ comprend le cas de l'EDP elliptique homogène,*

$Lu = 0$ (par exemple l'équation de Laplace). Dans le cas non homogène, cette hypothèse revient à imposer une contrainte de positivité sur le second membre de l'équation $Lu = f$.

Corollary 2.3.1 *Soit Ω un domaine borné. Supposons que $c(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$.*

Si $Lu \geq 0$ (ou respectivement $Lu \leq 0$) alors :

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\text{resp.} \quad \min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^- \right) \quad (2.3.12)$$

avec $u^+ = \max(u, 0), u^- = \min(u, 0)$.

En particulier, si $Lu = 0$ alors :

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad (2.3.13)$$

Preuve. Si $u \leq 0$ partout dans Ω , le corollaire est vérifié trivialement.

Posons $\Omega^+ = \Omega \cap \{u > 0\}$. Sur Ω^+ , nous avons $-cu \geq 0$ et donc :

$$a_{ij}u_{x_i x_j} + b_i u_{x_i} \geq 0 \quad (2.3.14)$$

Le théorème précédent implique que le maximum de u sur l'adhérence de Ω^+ est égal au maximum de u sur $\partial\Omega^+$. Puisque $u \equiv 0$ sur $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, (définition de Ω^+), on conclut que le maximum est atteint sur $\partial\Omega$. ■

Corollary 2.3.2 (Théorème de comparaison) *Soit Ω un domaine borné. Supposons que $c(x) \leq 0$. On a alors les résultats suivants :*

$$\begin{cases} Lu = Lv, \forall x \in \Omega \\ u = v, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \implies u = v, \forall x \in \Omega \quad (\text{Unicité}) \quad (2.3.15)$$

$$\begin{cases} Lu \leq Lv, \forall x \in \Omega \\ u \geq v, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \implies u \geq v, \forall x \in \Omega \quad (\text{Comparaison}) \quad (2.3.16)$$

Le théorème (2.3.1) du maximum faible affirme que u atteint son maximum sur la frontière du domaine. Cependant, la fonction u peut atteindre son maximum en plein d'autres points du domaine Ω .

Le théorème qui va suivre affirme que cela est en fait impossible à moins que u soit constante partout sur Ω .

Théorème 2.3.2 (*Principe de maximum fort*) *Supposons que $Lu \geq 0$*

(ou respectivement $Lu \leq 0$) sur un domaine Ω (pas nécessairement borné) et que u n'est pas constante sur ce domaine.

1. Si $c(x) = 0$ dans Ω , alors la solution u n'atteint pas son maximum (minimum) sur l'intérieur de Ω .
2. Si $c(x) \leq 0$, alors la solution u ne peut atteindre un maximum strictement positif (minimum strictement négatif) sur l'intérieur de Ω .

Principales applications

Les applications principales des principes de maximum sont de deux types :

- Résultats mathématiques et preuve d'existence et d'unicité.

Le théorème faible du maximum sert en particulier à donner une preuve existence au problème de Dirichlet :

Théorème 2.3.3 *Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné à bord $C^2(\Omega)$, pour toute fonction $g \in C(\partial\Omega)$, il existe une solution unique $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfaisant :*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.17)$$

- Résultats sur le signe de la solution. Les principes de maximum permettent de statuer sur le signe des solutions aux équations elliptiques. Ceci est particulièrement important pour les grandeurs physiques qui doivent par exemple rester positives

(densité de masse, concentration,...)

Exemple 2.3.1 *Considérons le problème de Dirichlet suivant sur un disque*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -1, \forall x \in \Omega \\ u(x, y) = u_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.18)$$

1. Vérifier que la solution est

$$u(x, y) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{4} + u_0. \quad (2.3.19)$$

2. Vérifier que les principes de maximum sont satisfaits.

2.4 Approximation numérique

Supposons le problème comme $\mathbb{Q} =]0, L[\times]0, L[:$

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \mathbb{Q} \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

Tel que $\Gamma = \partial\mathbb{Q}$ aux limites de $\mathbb{Q}$

soit le nombre naturel N , Nous obtenons l'ensemble

$$R_h = \left\{ M_{ij} = (ih, jh); i, j = 1, 2..N; h = \frac{L}{N} \right\} \quad (2.4.1)$$

Pour ne pas avoir une matrice très grande, nous prenons $N = 4$

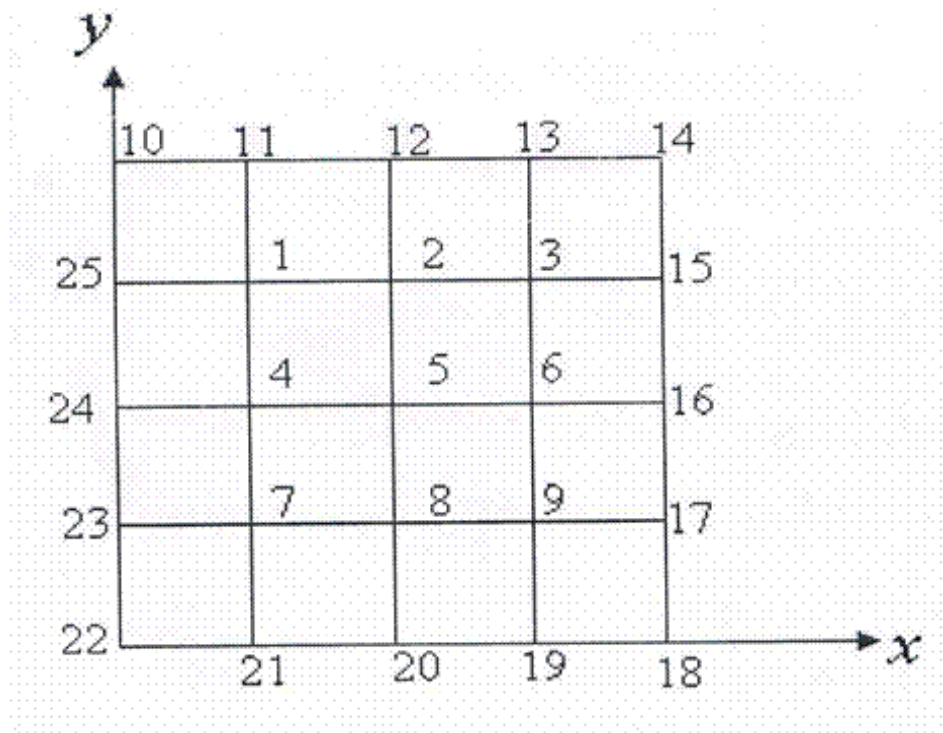
Numeritons les points comme indiqué sur la figure précédente.

mettons f_i : la valeur de f sur le point numéroté par i

et g_i la valeur de g au point numéroté par i , tel que $i = 10, 11, \dots, 25$

Exemple 2.4.1 $f_3 = f(3h, 3h)$ $f_4 = f(h, 2h)$

$$g_{12} = g(2h, 4h) \quad g_{16} = g(4h, 2h)$$



La valeur de u la limite foie

il reste trouver les approximations de la solution u aux point numiroter de i à g .

posons v_i la valeur approchée au point i

nous avons

$$\Delta u = \frac{u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h) - 4u(x, y)}{h^2} = f(x, y) \quad (2.4.2)$$

Nous obtenons donc l'expression pour les points $i = 1, 2, \dots, 9$.

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{25} + v_2 + v_4 + g_{11} - 4v_1 = h^2 f_1 \\ v_1 + v_3 + v_5 + g_{12} - 4v_2 = h^2 f_2 \\ v_2 + g_{15} + v_6 + g_{13} - 4v_3 = h^2 f_3 \\ g_{24} + v_5 + v_7 + v_1 - 4v_4 = h^2 f_4 \\ v_4 + v_6 + v_8 + v_2 - 4v_5 = h^2 f_5 \\ v_5 + g_{16} + v_9 + v_3 - 4v_6 = h^2 f_6 \\ g_{23} + v_8 + g_{21} + v_4 - 4v_7 = h^2 f_7 \\ v_7 + v_9 + g_{20} + v_5 - 4v_8 = h^2 f_8 \\ v_8 + g_{17} + g_{19} + v_6 - 4v_9 = h^2 f_9 \end{array} \right. \quad (2.4.3)$$

Si nous supposons le vecteur V ayant les composants (v_i) , $i = 1, 2, \dots, 9$ nous pouvons écrire l'expression (3) comme suit :

$$V, B \in \mathbb{R}^2 \text{ et } A \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R}) \text{ tels que } AV = B \quad (2.4.4)$$

La matrice A et le vecteur B l'écrivent comme suit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} h^2 f_1 - g_{11} - g_{25} \\ h^2 f_2 - g_{12} \\ h^2 f_3 - g_{13} - g_{15} \\ h^2 f_4 - g_{24} \\ h^2 f_5 \\ h^2 f_6 - g_{16} \\ h^2 f_7 - g_{21} - g_{23} \\ h^2 f_8 - g_{20} \\ h^2 f_9 - g_{17} - g_{19} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, y) = \exp(y) \\ u(x, 0) = \exp(x) \\ u(4, y) = \exp(4 + y) \\ u(4, y) = \exp(x + 4) \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

* Pour les conditions aux limites (2.4.3) du problème (2.4.5) tel que $f(x, y) = 2e^{x+y}$.

* Ainsi le problème remplit les conditions de DRICHET.

* Trouvons :

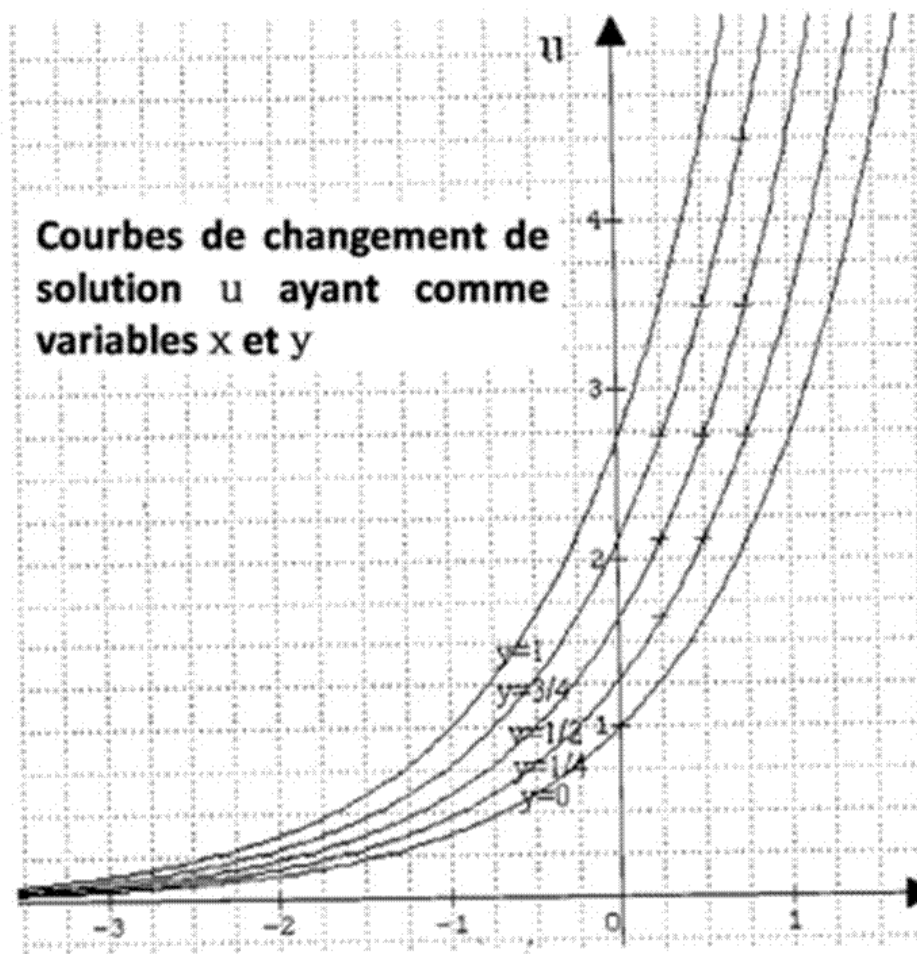
$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{16}f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) - g\left(\frac{1}{4}, 1\right) - g\left(0, \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) - g\left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) - g\left(\frac{3}{4}, 1\right) - g\left(1, \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - g\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) - g\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{4}, 0\right) - g\left(0, \frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \frac{1}{16}f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) - g\left(1, \frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{3}{4}, 0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\exp(1) - \exp\left(\frac{5}{4}\right) - \exp\left(\frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{8}\exp\left(\frac{5}{4}\right) - \exp\left(\frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{8}\exp\left(\frac{3}{2}\right) - 2\exp\left(\frac{7}{4}\right) \\ \frac{1}{8}\exp\left(\frac{3}{4}\right) - \exp\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{8}\exp(1) \\ \frac{1}{8}\exp\left(\frac{5}{4}\right) - \exp\left(\frac{3}{2}\right) \\ \frac{1}{8}\exp\left(\frac{1}{2}\right) - 2\exp\left(\frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{8}\exp\left(\frac{3}{4}\right) - \exp\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{8}\exp(1) - \exp\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{8}\exp\left(\frac{3}{4}\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5.267557 \\ -4.045396 \\ -10.948994 \\ -1.384096 \\ 0.339785 \\ -4.045346 \\ -2.361960 \\ -1.384096 \\ -5.267557 \end{pmatrix} \tag{2.4.6}
 \end{aligned}$$

En remplaçant B nous obtenons l'expression:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.267557 \\ -4.045396 \\ -10.948994 \\ -1.384096 \\ 0.339785 \\ -4.045346 \\ -2.361960 \\ -1.384096 \\ -5.267557 \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

Nous dissolvons ce système d'équations par méthode la suivante :

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)^T = \begin{pmatrix} 2.719527, 3.492141, 4.483315, 2.119411, 2.720326, \\ 3.492128, 1.6249695, 2.118410, 2.719527 \end{pmatrix}^T \quad (2.4.8)$$



Chapitre 3

Équation des ondes

Dans cette section on va étudier l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux

$$u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = 0 \quad (3.0.1)$$

pour u défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et $c > 0$.

C'est l'équation des ondes qui modélise des phénomènes d'évolution : corde ou membrane vibrante, ondes acoustiques, ondes électromagnétiques, ondes sismiques, . . . On note

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u$$

le d'**Alembertien** de u .

Une inversion et translation du temps, et $\tilde{t} = t_0 - t$, ne change pas l'équation aux dérivées partielles, on va restreindre l'étude à $t \geq 0$.

3.1 Modélisation

qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle. Une impulsion se propage à travers un fil à bouts fixes, comme modélisé par l'équation d'onde. Dans le cas vectoriel, en espace libre, dans un milieu homogène, linéaire et isotrope, l'équation d'onde s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.1.1)$$

L'opérateur

$$\nabla^2 = \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (3.1.2)$$

(où N est la dimension de l'espace) est appelé laplacien et on note parfois

$$\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (3.1.3)$$

l'opérateur d'onde, ou d'alembertien $\vec{E}$ décrit à la fois l'amplitude de l'onde, et sa polarisation (par son caractère vectoriel). c'est assimilable à la vitesse de propagation de l'onde. Par exemple, dans le cas d'une onde sonore, c est la vitesse du son qui est de $343m/s$ dans l'air à $20^\circ C$.

Dans le cas de phénomènes plus complexes tel la propagation de l'onde variant avec sa fréquence (soit la dispersion), on remplace c par la vitesse de phase:

$$u_p = \frac{w}{k}. \quad (3.1.4)$$

3.2 Calcule de la solution

On considère une corde élastique, de longueur L fixée à ses extrémités. On note $u(x, t)$ le déplacement vertical du point d'abscisse x à l'instant t .

Alors u est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \forall t \geq 0 \quad (3.2.1)$$

où c est une constante strictement positive. Les conditions aux limites sont ici :

$$u\left(-\frac{L}{2}, t\right) = u\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.2)$$

L'équation étant de degré 2 en t , il faut donner deux conditions initiales : la position initiale de la corde, $g(x)$, et la vitesse initiale de la corde $g'(x)$, i.e.

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]. \quad (3.2.3)$$

Bien entendu,

$$u\left(-\frac{L}{2}\right) = f\left(-\frac{L}{2}\right) = g\left(-\frac{L}{2}\right) = g'\left(-\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (3.2.4)$$

1^{ème} étape :

On commence par résoudre (EO) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, i.e on suppose que $L = \infty$. On fait alors le changement de variables

$$\xi = x + c_t, \quad \eta = x - c_t \quad (3.2.5)$$

et on introduit la nouvelle fonction

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) \quad (3.2.6)$$

Montrer qu'alors la fonction v vérifie l'edp :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0, \quad \forall (\xi, \eta) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{ (}\Omega \text{ à préciser)} \quad (3.2.7)$$

Déduire qu'il existe deux fonctions ϕ et ψ de classe C^2 telles que

$$v(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta). \quad (3.2.8)$$

2^{ème} étape :

En utilisant (CI) , montrer que

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + K \quad (3.2.9)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi - K \quad (3.2.10)$$

x_0 étant un réel quelconque et K une constante. En déduire l'expression de u .

3^{ème} étape :

Représenter succinctement la solution lorsque les conditions initiales sont

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

et

$$g(x) = 0. \quad (3.2.12)$$

4^{ème} étape :

On revient au cas $L < \infty$. On suppose que $f''(-\frac{L}{2}) = f'(\frac{L}{2}) = 0$ et on prolonge f sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : on fait une symétrie par rapport au point $(\frac{L}{2}, 0)$ pour obtenir une fonction définie sur $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ puis on prolonge sur $\mathbb{R}$ par $2L$ périodicité. On note F la fonction ainsi prolongée. De même, on note G le prolongement de g . Montrer qu'une solution de (EO) , (CL) et (CI) est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - c - t) + F(x - ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\xi) d\xi. \quad (3.2.13)$$

Expliquer pourquoi la constante c est homogène à une vitesse.

Enfin, remarquer que, contrairement à ce qui se passe pour l'équation de la chaleur, il n'y a pas d'effet régularisant.

La solution conserve pour tout temps la même régularité que les conditions initiales.

3.3 Propriétés de la résolution

Commençons par étudier le cas d'une équation hyperbolique linéaire :

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données.

Le problème 3.3.1 s'appelle "problème de Cauchy". On cherche $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, solution de ce problème. Nous commençons par une étude succincte du problème continu, pour lequel on peut trouver une solution exacte explicite.

Solution classique et solution faible

Définition 3.3.1 (Solution classique) On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est solution classique du problème (3.3.1) si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et u vérifie (3.3.1).

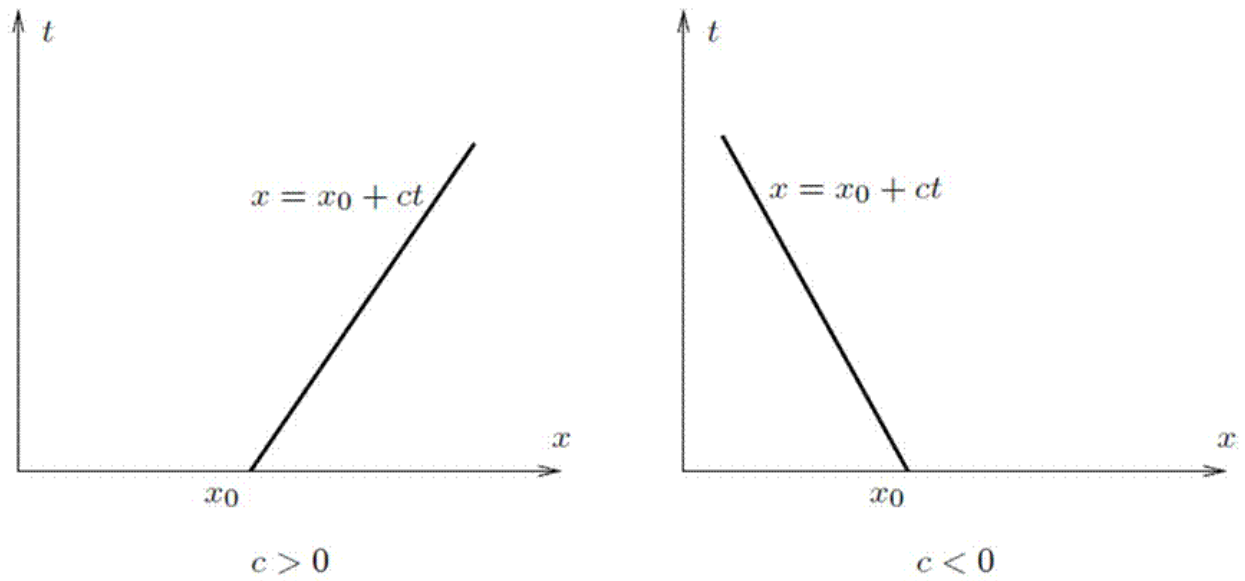
Une condition nécessaire pour avoir une solution classique est que $u_0 \in C_1(\mathbb{R})$.

Théorème 3.3.1 Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution classique du problème (3.3.1), qui s'écrit $u(x, t) = u_0(x - ct)$.

Démonstration Pour montrer l'existence de la solution, il suffit de remarquer que u , et que $u_t + cu_x = 0$ en tout point. Pour montrer l'unicité de la solution, on va introduire la notion de caractéristique, qui est d'ailleurs aussi fort utile dans le cadre de la résolution numérique. Soit u solution classique de (3.3.1). On appelle droite caractéristique de (3.3.1) issue de x_0 la droite d'équation $x(t) = ct + x_0$, qui est illustrée. Montrons que si u est solution de (3.4.1), alors u est constante sur la droite D_{x_0} , pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et φ_{x_0} la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t)$.

Dérivons φ_{x_0} par rapport au



Droites caractéristiques, cas linéaire

temps :

$$\begin{aligned} \varphi'_{x_0}(t) &= cu_x(x_0 + ct, t) + u_t(x_0 + ct, t) \\ &= (u_t + cu_x)(x_0 + ct, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

car u est solution de (3.3.1). On en déduit que

$$\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) = u_0(x_0), \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On a donc $u(x_0 + ct, t) = u_0(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, donc u est constante sur la droite caractéristique Dx_0 , et en posant $x = x_0 + ct$:
 $u(x, t) = u_0(x - ct)$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de 3.3.1.

Remarque 3.3.1 (*Terme source*) *Le modèle physique peut amener à une équation avec terme source au second*

membre $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

et $u_0 \in C(\mathbb{R})$. Ceci peut modéliser un dégazage sur un temps plus long, comme dans le cas du Prestige sur les côtes de Galice en 2003 par exemple. Pour montrer l'unicité de la solution de 3.3.3, on suppose que u est solution classique et on pose :

$\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t)$. Par un calcul identique au précédent, on a

$$\varphi'_{x_0}(t) = f(x_0 + ct, t). \quad (3.3.4)$$

Donc $\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s) ds$ On en déduit que :

$$u(x_0 + ct, t) = \varphi_{x_0}(0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s) ds. \quad (3.3.5)$$

on pose alors : $x = x_0 + ct$, et on obtient :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s) ds \quad (3.3.6)$$

ce qui prouve l'unicité. On obtient alors l'existence en remarquant que

la fonction $u(x, t)$ ainsi définie est celle qui prouve l'unicité.

On obtient alors l'existence en remarquant que la fonction

$u(x, t)$ ainsi définie est effectivement solution de (3.3.1), car elle est de classe C_1 et elle vérifie $u_t + cu_x = f$.

Dans ce qui précède, on a fortement utilisé le fait que u_0 est C_1 . Ce n'est largement pas toujours le cas dans la réalité. Que faire si, par exemple, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$?

Définition 3.3.2 (*Solution faible*) On dit que u est solution faible de (3.3.1) si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ u vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [u(x, t) \varphi_t(x, t) + cu(x, t) \varphi_x(x, t) dt dx] + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}). \quad (3.3.7)$$

Notons que dans la définition ci-dessus, on note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et $C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des restrictions à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ des fonctions $C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On insiste sur le fait qu'on peut donc avoir $\varphi(x, 0) \neq 0$. Voyons maintenant les liens entre solution classique et solution faible.

Proposition 3.3.1 Si u est solution classique de 3.3.1 alors u est solution faible.

Réciproquement, si $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \cap (C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[))$ est solution classique de (5.20) alors u est solution forte de 3.3.1.

La démonstration de cette proposition est effectuée dans le cadre plus général des équations hyperboliques non linéaires. Notons que si :

on prend $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$ au lieu de $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$ dans (3.4.7), on obtient :

$$u_t + cu_x = 0 \quad (3.3.8)$$

mais on ne récupère pas la condition initiale. Il est donc essentiel de prendre des fonctions test dans $C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Théorème 3.3.2 *Théorème 3.3.3* **Sommaire 3.3.1** *Théorème 3.3.4* "Existence et unicité de la solution faible"

Si $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$. Il existe une unique fonction u solution faible de (3.3.1).

Démonstration. On va montrer que $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible. Comme $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, on a $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on veut montrer que:

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (3.3.9)$$

■

Posons

$$A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t) \varphi_t(x, t) dt dx + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t) \varphi_x(x, t) dx dt. \quad (3.3.10)$$

Si $u(x, t) = u_0(x - ct)$, on a donc:

$$A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u_0(x - ct) \varphi_t(x, t) dt dx + cu_0(x - ct) \varphi_x(x, t)] dx dt. \quad (3.3.11)$$

En appliquant le changement de variable $y = x - ct$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \int_{\mathbb{R}_+} [\varphi_t(y - ct, t) + c\varphi_x(y + ct, t)] dt dy. \quad (3.3.12)$$

Posons alors

$$\psi_y(t) = \varphi(y + ct, t). \quad (3.3.13)$$

On a donc :

$$A = \int_{\mathbb{R}} \left(u_0(y) \int_0^{+\infty} \psi'_y(t) dt \right) dy \quad (3.3.14)$$

et comme ψ est à support compact sur $[0, +\infty[$

$$A = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \psi_y(0) dy \quad (3.3.15)$$

donc finalement :

$$A = - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \varphi(y, 0) dy. \quad (3.3.16)$$

On a ainsi démontré que la fonction u définie par $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible de l'équation (3.3.1). On a donc existence d'une solution faible. Montrons maintenant que celle-ci est unique.

Soient u et v deux solutions faibles de (3.3.1). On pose $w = u - v$ et on va montrer que $w = 0$. Par définition, w satisfait :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t) (\varphi_t(x, t) + c\varphi_x(x, t)) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad (3.3.17)$$

Par le lemme (3.3.1) donné ci-dessous, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ il existe $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $\varphi_t + c\varphi_x = f$, et on a donc par (5.7) :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t) f(x, t) dx dt = 0 \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad (3.3.18)$$

Ceci entraîne que $w = 0$ p.p..

Lemme 3.3.1 (Résultat d'existence) *Soit $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors il existe :*

$$\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad \varphi_t + c\varphi_x = f \quad (3.3.19)$$

Proposition 3.3.2 *Soit $f \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$, $T > 0$*

tel que $f(x, t) = 0$ si $t \geq T$. On considère le problème:

$$\begin{cases} \varphi_t + c\varphi_x = f \\ \varphi(x, T) = 0 \end{cases} \quad (3.3.20)$$

On vérifie facilement que le problème (5.8) admet une solution classique

$$\varphi(x, t) = - \int_t^T f(x - c(s - t), s) ds \quad (3.3.21)$$

En effet, avec ce choix de φ , on a effectivement

$$\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \varphi_t + c\varphi_x = f. \quad (3.3.22)$$

De plus, comme f est à support compact, φ est à support compact.

Conclusion Générale

Nous avons vu, dans ce travail quelques méthodes nécessaires pour la résolution des équations aux dérivées différentielles partielles linaires pour aboutir la transformation des phénomènes physiques a une équation mathématique.

On a choisi trois categories des équations différentielles partielles (la chaleur , Laplace , des ondes) dont les trois types sont (parabolique , elliptique , hyperbolique) successivement. Nous avons essayé de répondre aux besoins de résolution dans ce modeste travail en suivant les étapes ci-dessus.

On a reussi de trouver des solutions et resultats mais, il reste plusieurs méthodes de résolution différentes valables pour nous conduire aux même résultats.

Bibliographie

- [1] AUDE-RONDEPIERRE & ADELIN-ROUCHON *Introduction aux equations auxdrives Partielles etude thorique:Anne2012-2013.*
- [2] CLAUDE-PORTENIER, *Analyse foncctionnelle, 2003-2004.*
- [3] DANIEL-LI, *Analyse fonctionnelle (master 1 mathématiques-informatique), Université d'Artois.*
- [4] J.CHEVALIER, *Analyse fonctionnelle appliquée, Universite de Liege faculté des sciences Appliquées, 1998.*
- [5] JOHN-WILEY & SONS-INC, Walter A, Strauss, *Partial differential equations, New York, 1992.*
- [6] LAURENT-SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, enseignement des Sciences, Hermann, Paris, 1961.*
- [7] MICHAEL-E, *Taylor partial differential equations, springer-verlag, New York, 1996.*
- [8] NELLY-POINT & JEQUES-HERVE, *Equations aux dérivées partielles mathimatique et methodes numiriques, Saiac 13 mai 2008.*
- [9] ROBERT-S & STRICHARTZ-A, *guide to distribution theory and fourier transforms, Studies in advanced mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.*
- [10] VERSION-LONGUE, *Analyse fonctionnelle et Théorie Spectrale MT 404, 2001-2002.*