



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et Appliquées

Thème

Sur les bifurcations de Hopf

Présenté par : Ben Ali Nacira

Lejdel Ali Tefaha

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Nisse Lamine
Meftah Safia
Letoufa Yassine

Prof
MCB
MAA

Président
Rapporteur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

*Nous remercions « **Allah** » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

*Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique docteur "**Meftah Safia**".*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

*Nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2017/2018 à l'université de **Echahid Hama Lakhdar El-Oued**.*

En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Notations générales

$\phi(t, x)$	un flot.
$f(X)$	un champ de vecteurs.
$\dot{X}$	la dérivée de X par rapport à t .
$w(\Gamma)$	l'ensemble w -limite de Γ .
$\alpha(\Gamma)$	l'ensemble α -limite de Γ .
Γ_{x_0}	trajectoire passant par x_0 .
J_f	la matrice Jacobienne de la fonction f .
$\lambda_j, \bar{\lambda}_j$	les valeurs propres de la matrice J_f .
$V(x)$	la fonction de Lyapunov.
$P_J(\lambda)$	polynôme caractéristique.
$\text{sgn}(w)$	signe de w .
$H(x, y)$	le système hamiltonien.
$P(x)$	la carte de Poincaré.
$N_\delta(x_0)$	un voisinage de x_0 .
$S(\Gamma)$	la variété locale stable.
$U(\Gamma)$	la variété locale instable.
$W^s(\Gamma)$	la variété globale stable.
$W^u(\Gamma)$	la variété globale instable.

Table des figures

1.1	Trajectoire de l'ensemble invariant.	8
1.2	Valeurs propres réelles, non nulles et distinctes.	10
1.3	Valeurs propres complexes.	11
1.4	Valeurs propres égales avec $\omega = 0$	11
1.5	Valeurs propres égales avec $\omega \neq 0$	12
2.1	Portrait de phase pour l'exemple 2.2.1.	20
2.2	Diagramme de bifurcation pour l'exemple 2.2.1.	21
2.3	Diagramme de la bifurcation pour l'exemple 2.3.1.	23
2.4	Portrait de phase pour l'exemple 2.4.1.	25
2.5	Diagramme de bifurcation pour l'exemple 2.4.1.	25
2.6	Portrait de phase pour l'équation de Van Der Pol avec $\mu < 0$. L'origine est un foyer stable.	29
2.7	Portrait de phase pour l'équation de Van Der Pol avec $\mu > 0$. L'origine est un foyer instable et il y a une orbite périodique stable.	29
2.8	Les portraits de phase et une famille des orbites périodiques à un paramètre pour la bifurcation de Hopf.	31
2.9	Diagrammes de bifurcation pour (a) le cas super critiques et (b) le cas sous- critiques.	32
3.1	La carte de Poincaré.	38
3.2	Le portrait de phase du système (3.2) sous les hypothèses (A.1) et (A.2). . .	41
3.3	Le point fixe hyperbolique x_ε de la carte de Poincaré P_ε dans la section Σ_0 à $t = 0$ qui est identifié à la section à $t = T$	42

3.4	Le portrait de phase de l'équation de Duffing avec $\varepsilon = 0$	44
3.5	La fonction $\mu/\delta \sin \omega t_0 - K_0(\omega)$	48
3.6	Cartes de Poincaré pour l'équation perturbée de Duffing, montrant des variétés stables et instables du point de selle près de $(0, 0)$, avec $\varepsilon = 0.1, \delta = 2.5$ et (a) $\varepsilon\mu = 0.11$, (b) $\varepsilon\mu = 0.19$, et (c) $\varepsilon\mu = 0.3$	50
3.7	Le portrait de phase de l'équation du pendule non amorti.	51
3.8	La fonction $\cos t_0 - \frac{K_0}{a}$	53

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	3
1.1 Définitions générales du système dynamique	3
1.1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques	4
1.1.2 Linéarisation de système dynamique	4
1.1.3 Portrait de phase	6
1.1.4 Point d'équilibre	6
1.1.5 Trajectoire et orbite périodique	7
1.1.6 Ensemble invariant	7
1.1.7 Ensembles de limite et le cycle limite	8
1.2 Stabilité	9
1.2.1 Définitions	9
1.2.2 Classification des points d'équilibres	9
1.2.3 Stabilité au sens de Lyapunov	12
1.3 Théorie des perturbations	14
1.3.1 Introduction à la théorie des perturbations	14
1.3.2 Quelques exemples	14
1.3.3 Matériel de base	15
1.3.4 Développement simple	16
2 Théorie de la bifurcation	18
2.1 Introduction	18

2.2	Bifurcation de noeud de selle	19
2.3	Bifurcation transcritique	21
2.4	Bifurcation de fourche ou "pitchfork"	23
2.5	Bifurcation de Hopf	26
2.5.1	Bifurcation de Hopf dégénérée	32
2.5.2	Bifurcation de Hopf super critique	33
2.5.3	Bifurcation de Hopf sous-critique	34
3	Méthode de Melnikov	36
3.1	Introduction	36
3.2	Quelques définitions de base	37
3.3	Méthode de Melnikov	40
3.4	Applications de la théorie de Melnikov	43
3.4.1	Équation de Duffing	43
3.4.2	Équation du pendule	51
3.5	Quelques résultats simples de la théorie de Melnikov	54
	Bibliographie	57

Introduction générale

L'une des théories qui peut être considérée bien ancienne que nouvelle et qui gagne actuellement une popularité considérable parmi les chercheurs et les mathématiciens dans la science comme la mécanique est la théorie de la perturbation.

En mécanique quantique, la théorie de la perturbation, ou théorie des perturbations, est un ensemble de schémas d'approximations liée à une perturbation mathématique utilisée pour décrire un système quantique complexe de façon simplifiée. L'idée est de partir d'un système simple et d'appliquer graduellement un hamiltonien « perturbant » qui représente un écart léger par rapport à l'équilibre du système (perturbation). Si la perturbation n'est pas trop importante, les différentes quantités physiques associées avec le système perturbé (comme ses niveaux d'énergie et états propres) seront générés de manière continue à partir de ceux du système simple. Cette perturbation peut nous conduire aux notions de bifurcation.

La théorie des bifurcations, en mathématiques et en physique est l'étude de certains aspects des systèmes dynamiques. Une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système. Dans la théorie des bifurcations, une bifurcation de Hopf ou de Poincaré–Andronov–Hopf, des noms de Henri Poincaré, Eberhard Hopf, et Aleksandr Andronov, est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour du point fixe, franchissent l'axe imaginaire du plan complexe.

L'un des principaux outils pour déterminer l'existence (ou la non-existence) du chaos dans un système hamiltonien perturbé est la théorie de Melnikov. Dans cette théorie, la distance entre les variétés stables et instables du système perturbé est calculée jusqu'au terme du premier ordre.

Ce travail est divisé en trois chapitres.

- Le premier chapitre est consacré aux notions de base et outils fonctionnels concernant les systèmes dynamiques et la théorie de la perturbation utilisés dans ce travail.
- Dans le deuxième chapitre, nous donnons les notions et les propriétés préliminaires de bifurcation et leurs types avec des exemples de base.
- Dans le dernier chapitre, nous donnons les notions et les propriétés préliminaires utilisées pour définir et étudier la méthode de Melnikov, leurs applications et quelques résultats de la théorie de Melnikov.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions fondamentales sur les systèmes dynamiques, la théorie de la stabilité et la théorie de perturbation que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Définitions générales du système dynamique

On considère un espace topologique M (c'est-à-dire un ensemble de points muni d'une topologie) [15].

Définition 1.1.1. [3] Une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) formé de

- un ouvert $U \subset M$,
- un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ (un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue).

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$: φ est ce que l'on appelle une fonction coordonnées.

Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondants à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Définition 1.1.2. Un système dynamique sur E est une carte C^1

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (t, x) &\longmapsto \phi(t, x),\end{aligned}$$

où E est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, alors ϕ_t satisfait :

1. $\phi_0(x) = x$ pour tout $x \in E$.
2. $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

Remarque 1.1.1. On dit que ϕ_t est une flot s'il satisfait les propriétés 1 et 2 de la définition 1.1.2.

1.1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques

Le système dynamique défini par le système non linéaire d'équations différentielles ordinaires est donné par

$$\dot{X} = f(X), \quad (1.1)$$

tels que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (E est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$) est une fonction vectorielle et

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix},$$

où $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ et

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

1.1.2 Linéarisation de système dynamique

Considérons le système dynamique non linéaire défini par (1.1) et soit X_0 un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $y(t)$ soit appliquée au voisinage du point d'équilibre.

La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage du point X_0 comme suit :

$$\dot{y}(t) + \dot{X}_0 = f(X_0 + y(t)) \simeq f(X_0) + J_f(X_0).y(t), \quad (1.2)$$

avec $J_f(X_0)$ est la matrice Jacobienne de la fonction f définit par :

$$J_f(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X=X_0} . \quad (1.3)$$

Comme $f(X_0) = \dot{X}_0$, alors l'équation (1.2) devient :

$$\dot{y}(t) = J_f(X_0).y(t). \quad (1.4)$$

L'écriture (1.4) veut dire que le système (1.1) est linéarisé. Ce système peut être écrit sous la forme matricielle

$$\dot{X} = AX, \quad (1.5)$$

où A est une matrice $n \times n$.

La solution du système linéaire (1.5) avec la condition initiale $X(0) = X_0$ est donnée par

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad (1.6)$$

où e^{At} est une fonction matricielle $n \times n$.

Géométriquement, le système dynamique décrit le mouvement des points dans l'espace des phases le long des courbes de la solution définies par le système des équations différentielles.

Remarque 1.1.2. Pour le système (1.1), la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ spécifie la vitesse à chaque point de l'espace de phase E ; on l'appelle un champ de vecteurs.

Exemple 1.1.1. Considérons maintenant le système linéaire découplé

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ce système peut être écrit sous la forme matricielle

$$\dot{X} = AX, \quad (1.8)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La solution générale du système linéaire ci-dessus est donnée par

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t}, \\ x_2(t) = c_2 e^{2t}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Ou d'une manière équivalente par

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} C, \quad (1.10)$$

où $C = X(0)$.

Le système dynamique défini par le système linéaire (1.8) dans cet exemple est simplement la carte $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par la solution $X(t, C)$ donnée par (1.10); c'est-à-dire que le système dynamique pour cet exemple est donné par

$$\phi(t, C) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} C. \quad (1.11)$$

1.1.3 Portrait de phase

Définition 1.1.3. Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace de phase. Étant donné un système dynamique $\dot{X} = f(X, t)$, sans résoudre les équations on peut toujours à un instant t donné représenter graphiquement (à l'aide des flèches) le champ des $\dot{X}$ (le champ des vitesses si X sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour se faire une idée du comportement du système.

1.1.4 Point d'équilibre

Définition 1.1.4. Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé point d'équilibre ou point critique de (1.1) si $f(x_0) = 0$.

Exemple 1.1.2. Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - 4y - x^2. \end{cases} \quad (1.12)$$

Déterminons les points d'équilibres :

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$y = 0 \Leftrightarrow -x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -1\},$$

donc les points d'équilibres sont : $(x_0, y_0) = \{(0, 0); (-1, 0)\}$.

1.1.5 Trajectoire et orbite périodique

Définition 1.1.5. On appelle trajectoire de (1.1) passant par $x_0 \in E$ (E est un ensemble de $\mathbb{R}^n$) défini par

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E \setminus x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\} = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-, \quad (1.14)$$

avec

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E \setminus x = \phi(t, x_0), t \geq 0\} \text{ et } \Gamma_{x_0}^- = \{x \in E \setminus x = \phi(t, x_0), t < 0\},$$

où $\phi(t, x_0)$ solution de (1.1).

Définition 1.1.6. Cycle ou orbite périodique de (1.1) est une courbe de solution fermée de (1.1) qui n'est pas un point d'équilibre de (1.1).

1.1.6 Ensemble invariant

Définition 1.1.7. Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f \in C^1(E)$, et soit $\phi_t : E \rightarrow E$ le flot de l'équation différentielle (1.1) définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors un ensemble $S \subset E$ est appelé invariant par rapport au flot ϕ_t si $\phi_t(S) \subset S$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

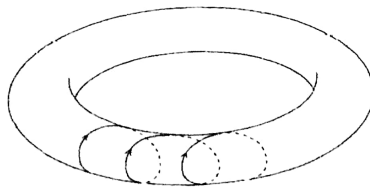


FIGURE 1.1 – Trajectoire de l'ensemble invariant.

Remarque 1.1.3. *Tout orbite est un ensemble invariant.*

1.1.7 Ensembles de limite et le cycle limite

Définition 1.1.8. *le point $p \in E$ où E est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. est un point w -limite de la trajectoire $\phi(., x)$ du système (1.1) s'il y a une suite $t_n \rightarrow +\infty$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x) = p.$$

De même, s'il y a une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x) = q,$$

et le point $q \in E$, alors le point q est appelé point α -limite de la trajectoire $\phi(., x)$ de (1.1). L'ensemble de tous les points w -limites d'une trajectoire Γ est appelé l'ensemble w -limite de Γ et il est noté $w(\Gamma)$. L'ensemble de tous les points α -limites d'une trajectoire Γ est appelé l'ensemble α -limite de Γ et il est noté $\alpha(\Gamma)$. L'ensemble de tous les points limites de Γ , $\alpha(\Gamma) \cup w(\Gamma)$ est appelé l'ensemble de limites de Γ .

Propriétés des ensembles $w(x_0)$ et $\alpha(x_0)$

Les limites $w(x_0)$ et $\alpha(x_0)$ sont :

- invariants.
- fermés.
- $\forall z \in \Gamma_{x_0}, w(z) = w(x_0)$.

Définition 1.1.9. *Le cycle limite Γ d'un système planaire est un cycle de (1.1) qui est l'ensemble α ou w -limite d'une trajectoire de (1.1) autre que Γ .*

1.2 Stabilité

1.2.1 Définitions

considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Nous désignons par x_0 un point d'équilibre de (1.15)

- L'origine est un point d'équilibre stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.16)$$

- L'origine est instable dans le cas contraire.
- L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable si :

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0. \quad (1.17)$$

- L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ tel que}$$

$$\|x(t_0) - x\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \alpha \|x(t_0) - x\| \exp(-\beta t), \forall t > t_0.$$

1.2.2 Classification des points d'équilibres

Il s'agit de distinguer ces points d'équilibres par la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (1.3) du système linéarisé (1.4) associé au système différentiel initial (1.1) en ce point.

Pour cette raison on va supposer que les valeurs propres de la matrice (1.3) sont définies par :

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \text{ et } \overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Où les valeurs propres sont complexes distinctes et elles apparaissent dans des paires conjuguées complexes.

Remarque 1.2.1. Lorsque $\alpha_j \neq 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ le point d'équilibre est dit **hyperbolique**.

Cas de la dimension 2

L'étude de la dimension 2 va nous permettre de définir les différents cas d'équilibres et la généraliser pour les systèmes d'équations différentielles non linéaire de dimension quelconque. Le point $(0,0)$ est une solution et un point d'équilibre du système. On va voir comment se comportent les trajectoires autour de ce point dans le portrait de phase selon les deux valeurs propres de la matrice du système.

λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et distinctes :

1. Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ alors le point d'équilibre est **instable**.
On dit que le point est un "**noeud instable**".
2. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors on dit que le point est un col "**point selle**".
3. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre est **asymptotiquement stable**.
On dit que le point est un "**noeud stable**".

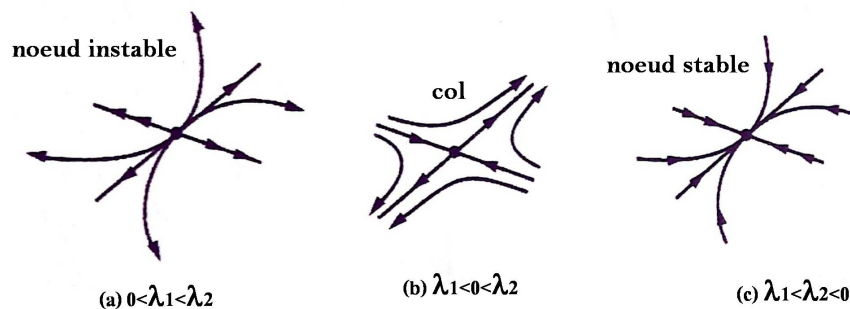


FIGURE 1.2 – Valeurs propres réelles, non nulles et distinctes.

λ_1 et λ_2 sont complexes :

1. Si $\alpha < 0$ alors le point d'équilibre est **asymptotiquement stable**.
On dit que le point est un **puits en spirale** "**foyer stable**".
2. Si $\alpha = 0$ alors on dit que le point est un "**centre**".
3. Si $\alpha > 0$ alors le point est **instable**.
On dit que le point est une **source en spirale** "**foyer instable**".

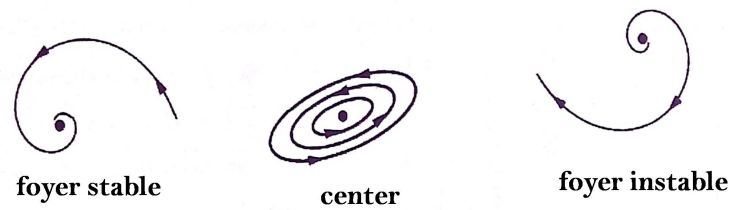


FIGURE 1.3 – Valeurs propres complexes.

λ_1 et λ_2 sont égaux :

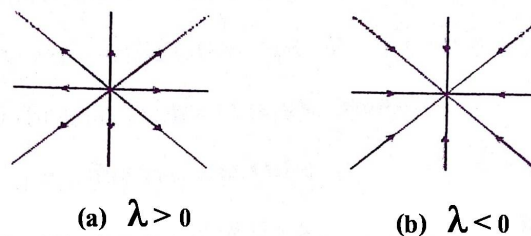
dans ce cas λ_1 et λ_2 sont réels. On a tel que $\omega \in \mathbb{R}$

$$J_f = \begin{bmatrix} \lambda & \omega \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

on a donc les cas suivants :

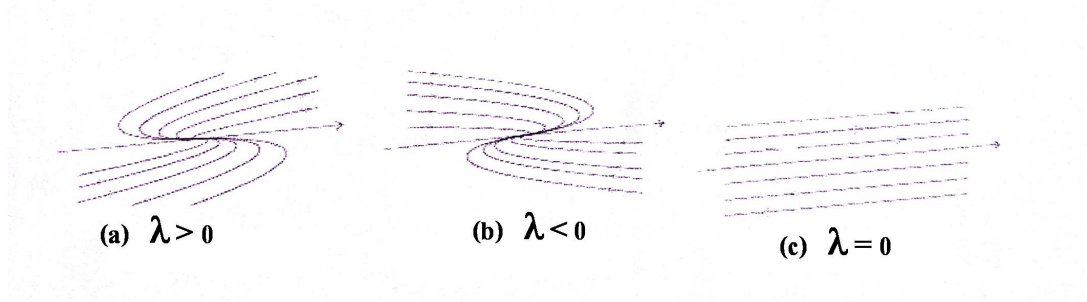
Le cas $\omega = 0$:

1. Si $\lambda > 0$ alors on dit que le point est une **"source en étoile"**.
2. Si $\lambda < 0$ alors on dit que le point est un **"puits en étoile"**.

FIGURE 1.4 – Valeurs propres égales avec $\omega = 0$.

Le cas $\omega \neq 0$:

1. Si $\lambda > 0$ alors on dit que le point est une **"source"**.
2. Si $\lambda < 0$ alors on dit que le point est un **"puits"**.
3. Si $\lambda = 0$ alors tous les points de la droite kv sont des points d'équilibre.

FIGURE 1.5 – Valeurs propres égales avec $\omega \neq 0$.

Cas de la dimension n

1. Si toutes les valeurs propres de $J_f(X_0)$ ont leur parties réelles strictement négatives, alors les solutions vérifient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ et l'origine est un puits.
2. Si toutes les valeurs propres de $J_f(X_0)$ ont leur parties réelles strictement positives, alors les solutions vérifient : $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ et l'origine est une source.
3. S'il n'y a pas de valeur propre nulle, on a un point selle.

1.2.3 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La méthode indirecte de Lyapunov utilise la linéarisation du système et peut dans certains cas, apporter une réponse au problème de stabilité locale.

Le système (1.15) est linéarisé autour de X_0 en utilisant un développement en série :

$$\dot{X} = J_F(X_0)X + R(X), \quad (1.18)$$

où $R(X)$ contient les termes en X_0 d'ordre supérieur à 2.

Le système linéarisé que l'on utilise est alors :

$$\dot{X} = J_F(X_0)X = AX. \quad (1.19)$$

Théorème 1.2.1. [17]

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative ($\forall i; \operatorname{Re}(\lambda_i(J_f(X_0))) < 0$), X_0 est exponentiellement stable.
- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à une partie réelle strictement positive ($\forall i; \operatorname{Re}(\lambda_i(J_f(X_0))) > 0$), X_0 est instable.

Remarque 1.2.2. Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative ($\forall i; \operatorname{Re}(\lambda_i(J_f(X_0))) \leq 0$), X_0 est stable.

Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. La seconde méthode est plus difficile à mettre en oeuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoire du système. Ce théorème va résumer cette méthode.

Théorème 1.2.2. [17] Le point de d'équilibre x_0 du système 1.15 est stable s'elle existe une fonction $V(x) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :

1. D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in D$.
 2. $V(x) > V(x_0) \forall x \neq x_0$ dans D .
 3. $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \neq x_0$ dans D .
- Si $\dot{V}(x) < 0 \forall x \neq x_0$ dans D , alors V est une fonction de Lyapunov stricte.

Remarque 1.2.3. Si le point d'équilibre x_0 admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable. Si le point d'équilibre x_0 admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Dans la section suivante on introduit et on définit quelques notions concernant la théorie des perturbations.

1.3 Théorie des perturbations

1.3.1 Introduction à la théorie des perturbations

Le développement de la théorie de l'influence des petites perturbations sur les solutions des équations différentielles a commencé au XVIIIe siècle. Étant donné que la théorie des perturbations de Poincaré (vers 1900) est de plus en plus florissante avec de nouvelles idées et des applications fondamentales importantes.

Tout d'abord, nous donnons quelques exemples de problèmes de perturbations.

1.3.2 Quelques exemples

Exemple 1.3.1. *Un exemple simple d'une perturbation naturelle. Considérons une oscillation harmonique, décrite par l'équation*

$$\ddot{x} + x = 0, \tag{1.20}$$

l'effet du frottement a été négligé (en pratique la friction sera toujours présente). Si l'oscillateur tel que le frottement est petit, un modèle amélioré pour les oscillations est donné par l'équation

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x} + x = 0. \tag{1.21}$$

Le terme $\epsilon \dot{x}$ s'appelle " terme de frottement" ou "terme d'amortissement" et cette forme simple particulière du terme de frottement a été basé sur certaines hypothèses concernant la mécanique du frottement. Le paramètre ϵ est assez petit i.e $0 \leq \epsilon \ll 1$. Si on met $\epsilon = 0$ dans l'équation (1.21), on récupère l'équation originale (1.20); nous appelons l'équation (1.20) " problème non perturbé ".

L'introduction de petites perturbations déclenche qualitativement et comportement quantitatif des solutions qui divergent énormément du comportement des solutions du problème non perturbé. On peut l'observer déjà dans l'exemple simple de l'oscillateur amorti décrit par l'équation (1.21).

Exemple 1.3.2. *Considérez le problème de la valeur initiale :*

$$\dot{x} = -x + \epsilon, \quad x(0) = 1. \quad (1.22)$$

La solution est $x(t) = \epsilon + (1 - \epsilon)e^t$. Le problème impassible (imperturbable) est

$$\dot{y} = -y, \quad y(0) = 1. \quad (1.23)$$

La solution est $y(t) = e^{-t}$. Il est clair que

$$|x(t) - y(t)| = \epsilon - \epsilon e^{-t} \leq \epsilon, \quad t \geq 0. \quad (1.24)$$

L'erreur apparaissant dans l'approximation de $x(t)$ par $y(t)$ n'est jamais plus grande que ϵ .

Exemple 1.3.3. *La situation est très différente pour ce problème :*

$$\dot{x} = x + \epsilon, \quad x(0) = 1. \quad (1.25)$$

La solution est $x(t) = -\epsilon + (1 + \epsilon)e^t$. Le problème impassible (imperturbable) est

$$\dot{y} = +y, \quad y(0) = 1. \quad (1.26)$$

La solution est $y(t) = e^t$. On trouve

$$|x(t) - y(t)| = \epsilon |1 - e^t|. \quad (1.27)$$

Sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, l'erreur provoquée par l'approximation de $x(t)$ par $y(t)$ est de l'ordre de grandeur ϵ . Ce n'est plus vrai pour $t \geq 0$, où la différence augmente sans limites (non bornée).

1.3.3 Matériel de base

Considérons la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la fonction $f(t, x, \epsilon)$ est continue dans les variables $t \in \mathbb{R}$ et $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, ϵ est un petit paramètre.

La fonction f a une développement de Taylor par rapport à ϵ , nous avons

$$f(t, x, \epsilon) = f(t, x, 0) + \epsilon f_1(t, x) + \epsilon^2 f_2(t, x) + \cdots + \epsilon^n f_n(t, x) + \dots, \quad (1.28)$$

avec les coefficients $f_1, f_2, \dots$ dépendent de t et x . Les expressions $\epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^n, \dots$ sont appelées les fonctions d'ordre.

Le plus souvent, nous ne connaissons pas explicitement la fonction vectorielle, par exemple car elle a été défini implicitement comme la solution d'une équation avec des conditions (initiales).

Remarque 1.3.1. *Très souvent, nous chercherons un développement de la forme*

$$f(t, x, \epsilon) = \sum_{n=0}^N \delta_n(\epsilon) f_n(t, x) + \dots, \quad (1.29)$$

dans lequel $\delta_n(\epsilon), n = 0, 1, 2, \dots$ sont des fonctions d'ordre (i.e la fonction $\delta(\epsilon)$ est continue et positive dans $(0, \epsilon_0]$ et elle a la propriété que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$ existe alors que $\delta(\epsilon)$ diminue de manière monotone tandis que ϵ tends vers zéro).

1.3.4 Développement simple

Considérez le problème de la valeur initiale

$$\dot{x} = f(t, x, \epsilon), \quad x(0) \text{ donné},$$

où $t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Si nous pouvons développer $f(t, x, \epsilon)$ dans une série de Taylor par rapport à ϵ

$$f(t, x, \epsilon) = f_0(t, x) + \epsilon f_1(t, x) + \epsilon^2 \dots,$$

alors on pourrait supposer qu'il existe une expansion similaire pour la solution

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 \dots$$

Il semble naturel de s'attendre à ce que l'expansion formelle représente une approximation asymptotique de la solution. Nous montrerons que c'est correct, mais seulement dans un sens très restreint. D'abord, on donne un exemple simple.

Exemple 1.3.4. *Considérons l'oscillation avec amortissement*

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = 0, \quad (1.30)$$

avec les valeurs initiales $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$.

La solution du problème de la valeur initiale est

$$x(t) = ae^{-\epsilon t} \cos(\sqrt{1-\epsilon^2}t) + \frac{a}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin(\sqrt{1-\epsilon^2}t). \quad (1.31)$$

La solution explicite et on la remplaçons par

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 \dots$$

Les coefficients équivalents des puissances égales de ϵ , on trouve

$$\ddot{x}_0(t) + \epsilon \ddot{x}_1(t) + \epsilon^2 \dots + 2\epsilon(\dot{x}_0(t) + \epsilon \dot{x}_1(t) + \epsilon^2 \dots) + x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 \dots = 0$$

$$\Rightarrow (\ddot{x}_0(t) + x_0(t)) + \epsilon(\ddot{x}_1(t) + 2\dot{x}_0(t) + x_1(t)) + \epsilon^2 \dots = 0,$$

donc

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0,$$

$$\ddot{x}_0 + x_n = -2\dot{x}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Les valeurs initiales ne dépendent pas de ϵ , donc il est naturel de mettre

$$x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0 = 0,$$

$$x_n(0) = a, \quad \dot{x}_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Résolvant les équations et appliquant les conditions initiales, nous obtenons

$$x_0(t) = a \cos t,$$

$$x_1(t) = a \sin t - a t \cos t, \dots$$

L'expansion formelle est

$$x(t) = a \cos t + a \epsilon (\sin t - t \cos t) + \epsilon^2 \dots$$

L'expansion que nous avons obtenue est une approximation asymptotique de la solution.

Chapitre 2

Théorie de la bifurcation

Dans ce chapitre, nous discuterons les changements de la nature des points critiques et de la bifurcation des solutions quand un paramètre passe par une certaine valeur, tout cela s'appelle la théorie de la bifurcation.

2.1 Introduction

Considérons l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.1)$$

où $f \in C^1(E \times J)$, E est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit qu'un système d'équations différentielles (2.1) a une bifurcation à la valeur $\mu = \mu_c$, s'il y a un changement de structure de trajectoire comme le paramètre μ passe par la valeur μ_c . Autrement dit, il y a un changement dans le nombre et / ou la stabilité des équilibres du système à la valeur de la bifurcation.

Définition 2.1.1. [19] Considérons l'équation (2.1) avec $f(0, \mu) = 0$ (solution $x = 0$). La valeur du paramètre $\mu = \mu_c$ est appelée la valeur de la bifurcation s'il existe une solution non triviale dans chaque voisinage de $(0, \mu_c)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.1. Considérons l'équation

$$\dot{x} = 1 - 2(1 + \mu)x + x^2. \quad (2.2)$$

L'équation $1 - 2(1 + \mu)x + x^2 = 0$ a des solutions uniques $x(\mu)$ si $-2(1 + \mu) + 2x \neq 0$ ou si $x \neq 1 + \mu$. L'équation (2.2) a les solutions d'équilibre $1 + \mu \pm (2\mu + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $\mu < -2$ et $\mu > 0$. La bifurcation peut avoir lieu si $1 + \mu = 1 + \mu \pm (2\mu + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire pour $\mu = 0$ et $\mu = -2$.

Définition 2.1.2. Un diagramme de bifurcation fait partie de l'espace des paramètres sur lequel sont représentés tous les points de la bifurcation.

Nous traiterons par la suite quelques types de bifurcations

2.2 Bifurcation de noeud de selle

Considérons l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, c), \quad (2.3)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction suffisamment régulière avec $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ (c-à-d que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique) et $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \neq 0$.

Par un développement limité au voisinage du point d'équilibre on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + c \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \dots \\ &= Ac + Bx^2, \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \text{ et } B = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0).$$

Posons :

$$U = \frac{B}{A}x, \mu = \frac{B}{A}c, T = At.$$

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{B}{A} \dot{x} \\ &\simeq \frac{B}{A} (Ac + Bx^2) \\ &= Bc + \frac{B^2}{A} x^2 \\ &= A \left(\frac{B}{A} c + \frac{B^2}{A^2} x^2 \right) \\ &= A(\mu + U^2). \end{aligned}$$

On a $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq A(\mu + U)$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial T} = \mu + U^2.$$

La dernière équation dite forme normale de la bifurcation selle-noeud.

Exemple 2.2.1. *Considérez l'équation*

$$\dot{x} = \mu - x^2. \quad (2.4)$$

- a. Si $\mu > 0$, il y a deux équilibres $x^* = \pm\sqrt{\mu}$. La dérivée du côté droit est $Df(x, \mu) = -2x$. En compensant les points d'équilibre, nous obtenons ce qui suit : $Df(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu} < 0$, ce qui implique que l'équilibre $x^* = \sqrt{\mu}$ est stable ; et $Df(-\sqrt{\mu}, \mu) = 2\sqrt{\mu} > 0$ ce qui signifie que l'équilibre $x^* = -\sqrt{\mu}$ est instable.
- b. Si $\mu < 0$, il n'y a pas d'équilibre.
- c. Quand $\mu = 0$, le système n'a qu'un seul point d'équilibre, $x^* = 0$. Dans ce cas, le point d'équilibre est non hyperbolique, puisque $Df(0, 0) = 0$, et nous ne pouvons pas utiliser la linéarisation pour analyser sa stabilité. Un portrait de phase, cependant, peut nous aider dans ce cas.

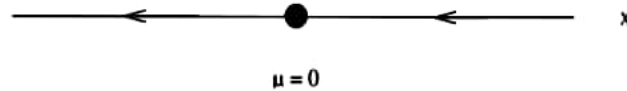


FIGURE 2.1 – Portrait de phase pour l'exemple 2.2.1.

Nous concluons que le point d'équilibre $x^* = 0$ est un noeud de selle instable. Ce système a une bifurcation de noeud de selle à $\mu = 0$.

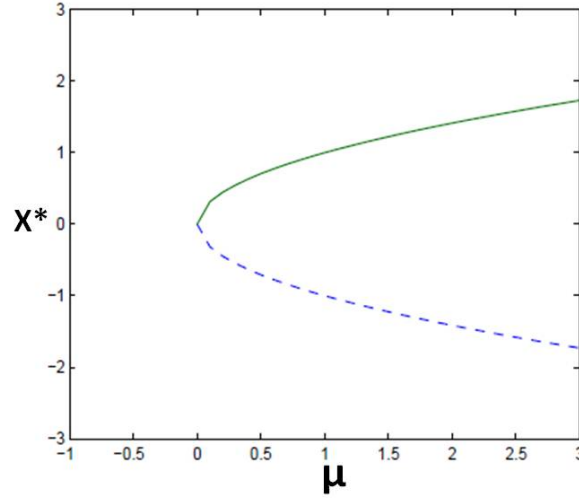


FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation pour l'exemple 2.2.1.

2.3 Bifurcation transcritique

Considérons toujours l'équation

$$\dot{x} = f(x, c),$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et on ajoute une troisième condition $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) = 0$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0$.

Par un développement limité au voisinage de $(0, 0)$ on obtient :

$$f(x, c) = f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + c \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + xc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) + \dots$$

Posons :

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0,$$

et

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0.$$

L'équation devient donc :

$$f(x, c) \simeq Ax^2 + Bxc \text{ d'où } \dot{x} \simeq Ax^2 + Bxc.$$

Effectuons les changements :

$$U = \frac{x}{A} \text{ et } T = A^2 t \text{ et } \mu = \frac{Bc}{A^2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{x}}{A} \\ &\simeq x^2 + \frac{Bc}{A}x \\ &= A^2 U^2 + BUc \\ \implies \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq A^2 U^2 + BUc \\ \implies \frac{\partial T}{\partial t} &= U^2 + \mu U. \end{aligned}$$

La dernière équation dite forme normale de la bifurcation transcritique .

Exemple 2.3.1. *Considérez l'équation*

$$\dot{x} = \mu x - x^2. \tag{2.5}$$

Cette équation a deux points d'équilibre $x^* = 0$ et $x^* = \mu$. La dérivée du côté droit est $Df(x, \mu) = \mu - 2x$.

Nous composons la valeur de $x^* = 0$ nous obtenons $Df(0, \mu) = \mu$, ce qui signifie que l'équilibre est stable si $\mu < 0$ et instable si $\mu > 0$.

Aussi $Df(\mu, \mu) = -\mu$ ce qui implique que $x^* = \mu$ est stable si $\mu > 0$ et instable si $\mu < 0$.

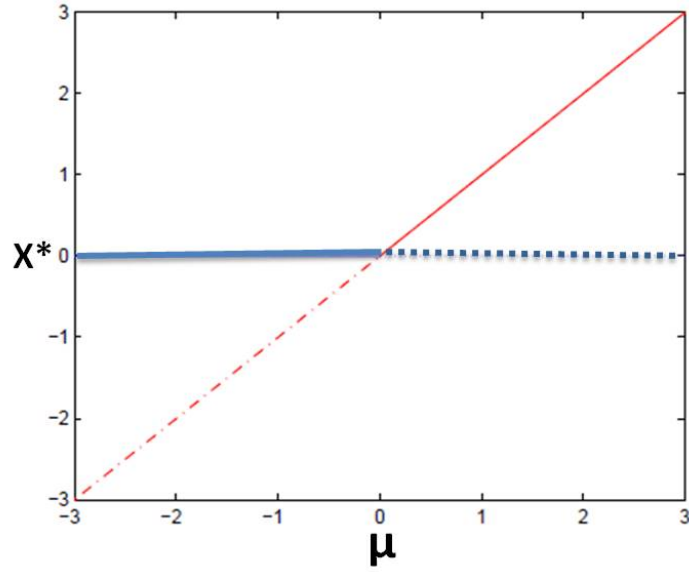


FIGURE 2.3 – Diagramme de la bifurcation pour l'exemple 2.3.1.

Maintenant, si $\mu = 0$, le système a un point d'équilibre $x^* = 0$. puisque $Df(0,0) = 0$, l'équilibre $x^* = 0$ est non hyperbolique. Comme précédemment, nous utilisons un portrait de phase pour l'analyse de stabilité. Il se trouve que le portrait de phase pour ce cas est le même que celui représenté sur la figure 2.1. Ainsi, l'équilibre $x^* = 0$ est une selle, donc instable, quand $\mu = 0$. Dans ce cas, on dit que le système a une bifurcation transcritique à la valeur du paramètre $\mu = 0$. Les équilibres du système échangent la stabilité lorsque le paramètre μ passe la valeur $\mu = 0$.

2.4 Bifurcation de fourche ou "pitchfork"

Reprenons l'équation $\dot{x} = f(x, c)$ avec $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, en prenant cette fois-ci : $f(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial c}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial c}(0,0) \neq 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$. Par un développement limité au voisinage de l'origine on trouve :

$$\begin{aligned} f(x, c) &= f(0,0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + c \frac{\partial f}{\partial c}(0,0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + xc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0,0) \\ &\quad + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(0,0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + \dots \\ &= xc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0,0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + \dots \end{aligned}$$

Posons :

$$A = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 1,$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0.$$

Notre équation devient :

$$\dot{x} \simeq Ax^3 + Bxc.$$

Effectuons les changements suivants :

$$U = \frac{x}{A} \text{ et } T = A^3 t \text{ et } \mu = \frac{Bc}{A^3}.$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{x}}{A} \\ &\simeq x^3 + \frac{Bc}{A}x \\ &= A^3 U^3 + BUc. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq A^3 U^3 + BUc \\ \implies \frac{\partial T}{\partial t} &= U^3 + \mu U. \end{aligned}$$

La dernière équation dite forme normale de la bifurcation fourche.

Exemple 2.4.1. *Considérez l'équation*

$$\dot{x} = \mu x - x^3. \quad (2.6)$$

- a. Si $\mu > 0$, cette équation a trois points d'équilibre : $x^* = 0$, $x^* = \pm\sqrt{\mu}$, $Df(x, \mu) = \mu - 3x^2$, alors $Df(0, \mu) = \mu > 0$, ce qui implique que le point fixe $x^* = 0$ est instable. $Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = -2\mu < 0$ donc les points d'équilibre $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ sont tous les deux stables.
- b. Si $\mu < 0$, le seul point d'équilibre est $x^* = 0$ et $Df(0, \mu) = \mu < 0$, donc l'équilibre est stable.
- c. Si $\mu = 0$, encore, le seul équilibre est $x^* = 0$. Puisque, $Df(0, 0) = 0$, l'équilibre est non hyperbolique. Comme précédemment, nous regardons le portrait de phase de la figure 2.4

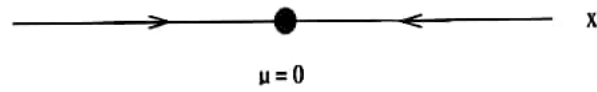


FIGURE 2.4 – Portrait de phase pour l'exemple 2.4.1.

Nous pouvons voir que l'équilibre dans ce cas est stable. Le système a ce que l'on appelle une bifurcation de fourche à la valeur du paramètre $\mu = 0$.

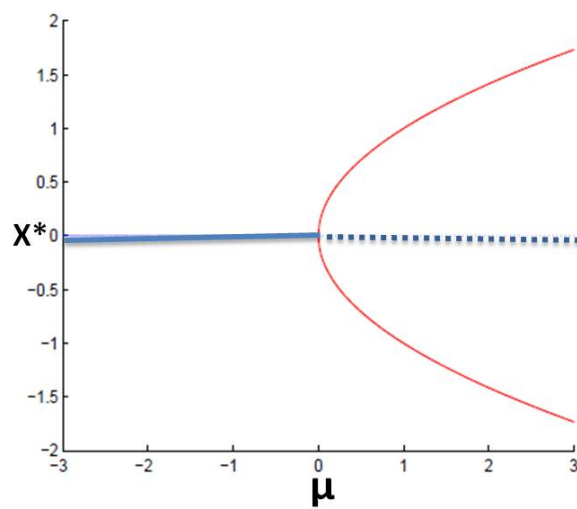


FIGURE 2.5 – Diagramme de bifurcation pour l'exemple 2.4.1.

2.5 Bifurcation de Hopf

Le bifurcation de Hopf est l'apparition où la disparition d'une solution périodique, d'un point d'équilibre quand le paramètre passe par une valeur critique μ^* . Ceci se produit quand la paire des valeurs propres conjuguées du système linéarisé au point d'équilibre deviennent imaginaires pures. Ceci implique que la bifurcation de Hopf est pour les systèmes de dimension $n \geq 2$.

Pour un tour d'horizon plus général sur les bifurcations de Hopf et leurs applications notamment en Physique et en électronique, voir [6, 7, 4, 9]

Théorème 2.5.1. [1, 8] *Considérons le système planaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y), \\ \dot{y} = g_\mu(x, y). \end{cases} \quad (2.7)$$

Où μ est un paramètre.

Supposons que (x_0, y_0) est un point d'équilibre de (2.7) qui peut dépendre de μ .

$\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, les valeurs propres du système linéarisé au point d'équilibre (x_0, y_0) .

Supposons que pour une certaine valeur de μ : $\mu = \mu_0$ les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = w \neq 0$ où $\text{sgn}(w) = \text{sgn}[(\frac{\partial g_\mu}{\partial x})|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)]$.
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$. (condition de transversalité)
3. $a \neq 0$ où $a = \frac{1}{16}[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16w}[(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$
avec $f_{xy} = (\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x \partial y})|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$, etc (condition de généricité).

Alors

- Il y a une seule orbite périodique qui bifurque de l'origine pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.
- Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (resp $\mu < \mu_0$) et instable point d'équilibre pour $\mu < \mu_0$ (resp $\mu > \mu_0$) si $d < 0$ (resp $d > 0$).

- La solution périodique est stable (resp instable) si le point d'équilibre est instable (resp stable), du côté $\mu = \mu_0$ où la solution périodique existe.
- L'amplitude de l'orbite périodique est $\sqrt{(\mu - \mu_0)}$.
- La période de l'orbite périodique est $T = \frac{2\pi}{|w|}$.

Exemple 2.5.1. Considérons l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

On peut décrire l'équation de Van Der Pol sous le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + (\mu - x^2)y. \end{cases}$$

Le point d'équilibre $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres :

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \mu) + 1 = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \mu^2 - 4 < 0, & \mu \in]-2, 2[, \\ \Rightarrow \Delta &= i^2(4 - \mu^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\mu + i\sqrt{4 - \mu^2}}{2}, \\ \bar{\lambda} &= \frac{\mu - i\sqrt{4 - \mu^2}}{2}. \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de la matrice $Jf(0,0)$ sont

$$\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2}).$$

$$1. \alpha(\mu_0) = 0 \implies \frac{1}{2}\mu = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0, \operatorname{sgn}(w) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=0}(0,0)\right) = \operatorname{sgn}(-1) = -1 \\ \implies \beta(\mu_0) = -1 = w.$$

$$2. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} = d \neq 0.$$

3.

$$a = \frac{1}{16} \left[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} \right] \\ - \frac{1}{16} \left[(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy} \right].$$

$$g_{xxy} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\mu=0}(0,0) = -2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -2x$$

$$\implies g_{xy} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -2y$$

$$\implies g_{xx} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0$$

On remplace dans a on obtenons :

$$a = \frac{1}{16} \left[0 + 0 - 2 + 0 \right] - \frac{1}{16} \left[(0(0+0) - 0(0+0)) - 0 \times 0 + 0 \times 0 \right] \\ = -\frac{1}{8}.$$

- Puis que $ad = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{16} < 0 \Rightarrow$ il y a une solution périodique pour $\mu > 0$.
- Puis que $a = \frac{1}{2} > 0$, le point d'équilibre $(0,0)$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$.
- La solution périodique pour $\mu > 0$ est stable et instable pour $\mu < 0$.
- L'amplitude $\sqrt{\mu}$.
- La périodicité $T = 2\pi$.

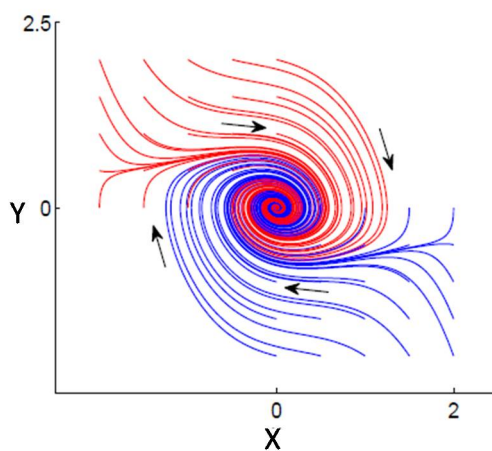


FIGURE 2.6 – Portrait de phase pour l'équation de Van Der Pol avec $\mu < 0$. L'origine est un foyer stable.

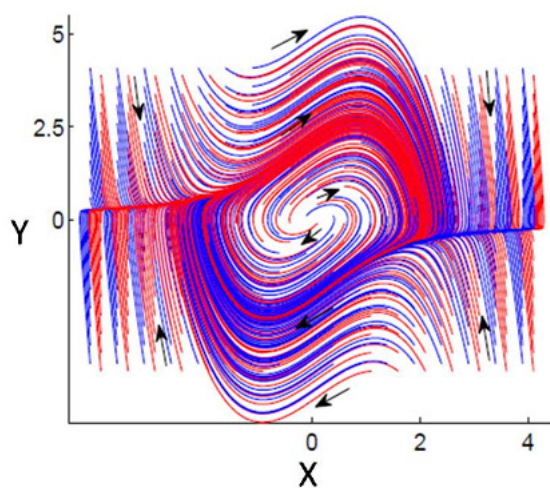


FIGURE 2.7 – Portrait de phase pour l'équation de Van Der Pol avec $\mu > 0$. L'origine est un foyer instable et il y a une orbite périodique stable.

Remarque 2.5.1. 1. Il existe trois cas de bifurcations de Hopf possibles :

(a) **Bifurcation de Hopf dégénérée** : Si une des conditions du théorème de la Bifurcation de Hopf n'est pas satisfaite, on peut avoir bifurcation de solution périodiques, on dit que la bifurcation est dégénérée.

(b) **Bifurcation de Hopf super critique** :

- La bifurcation est dite super critique (super critical) si l'orbite périodique est stable.
- Si $a < 0$ alors la bifurcation est super critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable.

(c) **Bifurcation de Hopf sous-critique** :

- Elle est sous critique (subcritical) si l'orbite périodique est instable.
- Si $a > 0$ alors la bifurcation est sous-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est instable.

2. Pour une bifurcation super critique au sous critique, le point d'équilibre $(x(\mu^*), y(\mu^*))$ est un foyer.

3. Quand μ^* est une valeur telle que $\alpha(\mu^*) = 0$ et $\beta(\mu^*) \neq 0$, le point d'équilibre $(x(\mu^*), y(\mu^*))$ correspond à un centre.

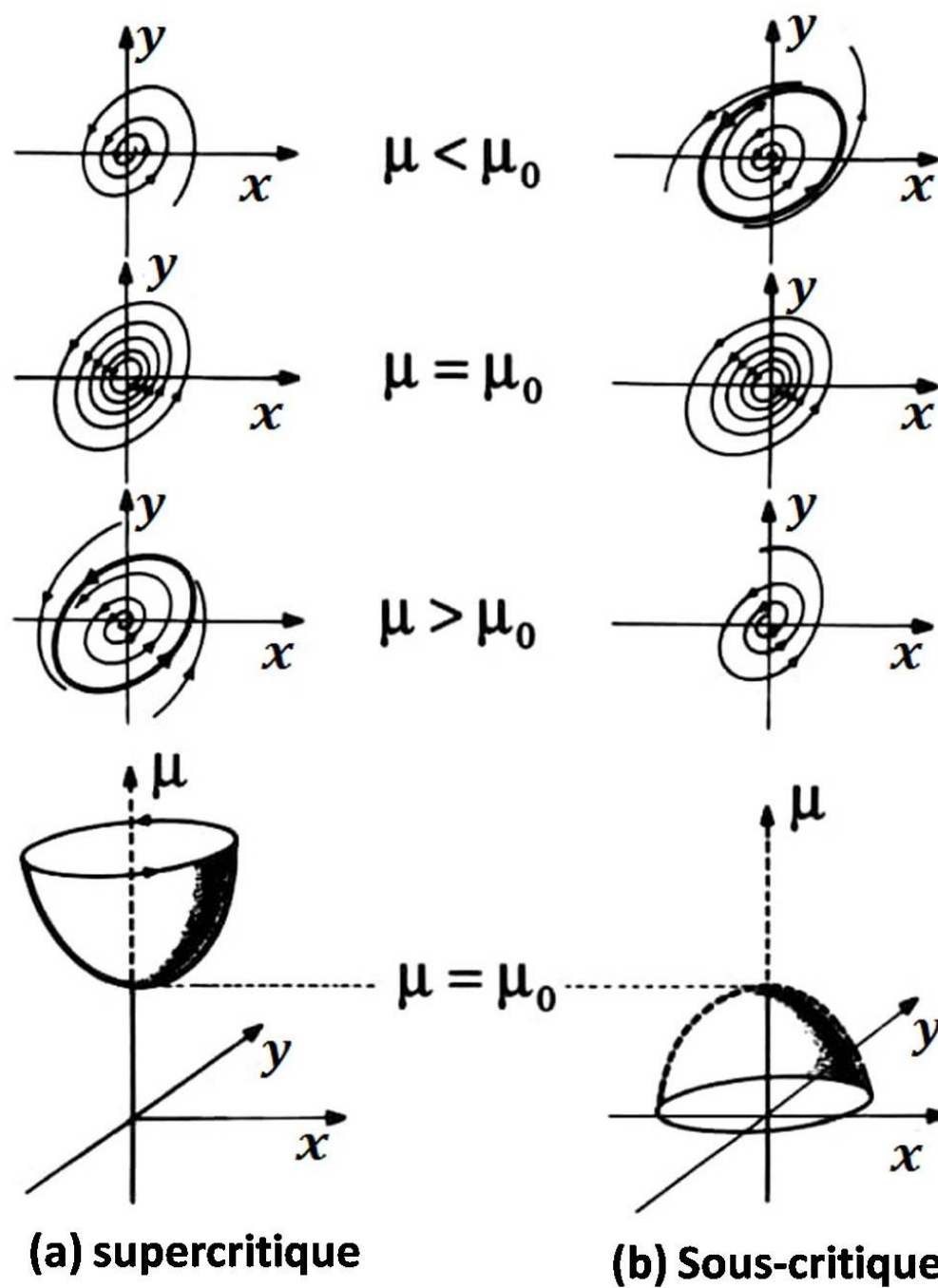


FIGURE 2.8 – Les portraits de phase et une famille des orbites périodiques à un paramètre pour la bifurcation de Hopf.

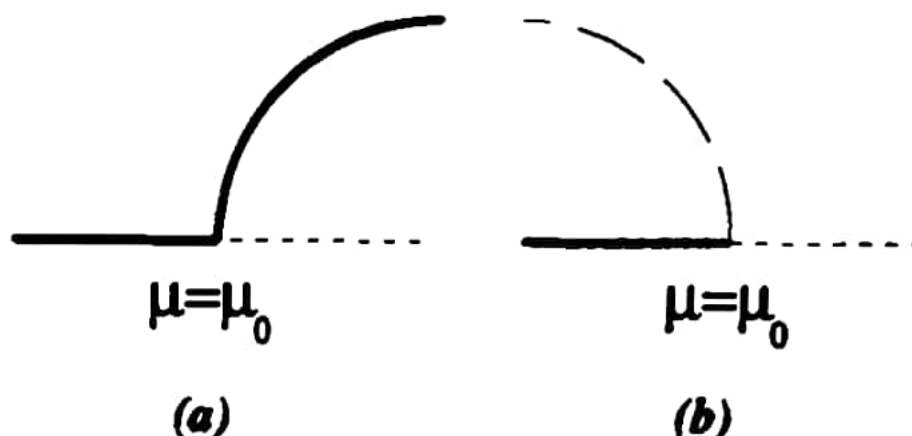


FIGURE 2.9 – Diagrammes de bifurcation pour (a) le cas super critiques et (b) le cas sous-critiques.

2.5.1 Bifurcation de Hopf dégénérée

Exemple 2.5.2. *Considérons l'équation de Van Der Pol*

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

On peut d'écrire l'équation de Van Der Pol comme le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y. \end{cases}$$

Le système linéarisé en $(0, 0)$ est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases}$$

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

On a

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = -\lambda(\mu - \lambda) + 1 \\ = -\lambda\mu + \lambda^2 + 1,$$

donc si

$$\mu \in]-2, 2[,$$

alors

$$\Delta = \mu^2 - 4 < 0.$$

Les valeurs propres de la matrice J sont donc complexes conjuguées et égales à

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2}.$$

$$1. \operatorname{sgn}(w) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial} \Big|_{\mu=0} (0, 0)\right) = -1, w = -1.$$

$$2. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} = d > 0.$$

$$3. a = 0.$$

Puis que $a = 0$ donc la condition $a \neq 0$ n'est pas vérifiée, on dit dans ce cas que la bifurcation est dégénérée.

2.5.2 Bifurcation de Hopf super critique

La bifurcation de Hopf super critique est la déstabilisation de la partie foyer stable quand les valeurs propres complexes conjuguées associées à cette partie traversent l'axe imaginaire pur pour la transformer en une partie foyer instable. Cette déstabilisation s'accompagne de la naissance d'un cycle limite stable.

Exemple 2.5.3. Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

On remarque que l'origine $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système.

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1.$$

Les valeurs propres de la matrice J sont donc complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$.

1. $\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=0} (0, 0)\right) = 1, w = 1.$
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = 1 = d > 0.$
3. $a = \frac{1}{16} \left[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} \right] + \frac{1}{16} \left[(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy} \right].$
 $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -6,$
 $f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -2,$
 $g_{xxy} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -2,$
 $g_{yyy} = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \Big|_{\mu=0} (0, 0) = -6.$

On remplace dans a on obtenons : $a = \frac{1}{16} [-6 - 2 - 2 - 6] = -1.$

- Puis que $ad = -1.1 = -1 < 0 \Rightarrow$ il y a une solution périodique pour $\mu > 0$.
- Puis que $d = 1 > 0$, le point d'équilibre $(0, 0)$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$.
- Puis que $a = -1 < 0$ alors la bifurcation est super critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable
- L'amplitude $\sqrt{\mu}$.
- La périodicité $T = 2\pi$.

2.5.3 Bifurcation de Hopf sous-critique

La bifurcation sous-critique est une déstabilisation de la partie foyer accompagnée de la naissance d'un cycle limite instable.

Exemple 2.5.4. On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y + x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

On remarque que l'origine $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système.

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 1 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2 + 1.$$

Les valeurs propres de la matrice J sont donc complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$.

1. $\text{sgn}(w) = \text{sgn}(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} |_{\mu=0} (0, 0)) = 1, w = 1.$
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} |_{\mu=0} = 1 = d > 0.$
3. $a = \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16} [(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}].$
 $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} |_{\mu=0} (0, 0) = 6,$
 $f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} |_{\mu=0} (0, 0) = 2,$
 $g_{xxy} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} |_{\mu=0} (0, 0) = 2,$
 $g_{yyy} = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} |_{\mu=0} (0, 0) = 6.$

On remplace dans a on obtenons : $a = \frac{1}{16} [6 + 2 + 2 + 6] = 1.$

- Puis que $ad = 1.1 = 1 > 0 \Rightarrow$ il y a une solution périodique pour $\mu < 0$.
- Puis que $d = 1 > 0$, le point d'équilibre $(0, 0)$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$.
- Puis que $a = 1 > 0$ alors la bifurcation est sous-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est instable.
- L'amplitude $\sqrt{\mu}$.
- La périodicité $T = 2\pi$.

Chapitre 3

Méthode de Melnikov

Dans ce chapitre, Nous étudions la méthode de Melnikov sur la carte de Poincaré pour un système dynamique perturbé, nous donnons quelques applications sur cette méthode. De plus, nous présentons ensuite quelques résultats simples de la théorie de Melnikov. Pour plus de détails nous référons à [5] et [15].

3.1 Introduction

La méthode de Melnikov donne un outil analytique pour établir l'existence de points homoclines transverses de la carte de Poincaré pour une orbite périodique. Il peut aussi être utilisé pour établir l'existence d'orbites périodiques subharmoniques. En outre, il peut être utilisé pour montrer l'existence de cycles limites et de cycles séparatrix, tout cela est pour les système dynamiques perturbés sous la forme

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X), \quad (3.1)$$

avec $X \in \mathbb{R}^n$ et $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Nous commençons par un résultat pour les systèmes planaires périodiquement perturbés sous la forme

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X, t), \quad (3.2)$$

où $X \in \mathbb{R}^2$ et g sont périodiques de période T dans t . Notez que ce système peut être écrit comme un système autonome dans $\mathbb{R}^3$ en définissant $x_3 = t$. Nous supposons que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

et que $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

3.2 Quelques définitions de base

Dans cette partie, nous introduisons quelques définitions que nous utiliserons après [15].

- **Point homocline** : Le point q est appelé point homocline si $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$, tel que p est un point d'équilibre hyperbolique.
- **Cycle séparatrix** : Le flot sur la courbe fermée simple déterminée par l'union de cette orbite homocline et le point d'équilibre à l'origine s'appelle un cycle séparatrix.
- **Système hamiltonien** : Soit E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $H \in C^2(E)$ où $H = H(x, y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Un système sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\end{aligned}$$

est appelé un système hamiltonien.

- **Système autonome** [14] : Lorsque la variable libre t n'apparaît pas explicitement dans l'expression de f dans le système (1.1) qui en définit dans le premier chapitre, le système est dit autonome.
- **Carte de Poincaré** : Soient E être un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in C^1(E)$. Supposons que $\phi_t(x_0)$ est une solution périodique du système (1.1) qui en définit dans le premier chapitre de période T et que le cycle

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$$

est contenu dans E . Soit Σ l'hyperplan orthogonal à Γ en x_0 ; c'est-à-dire

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Alors il y a un $\delta > 0$ et une fonction unique $\tau(x)$, définie et continuellement différentiable pour $x \in N_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \delta\}$ tels que $\tau(x_0) = T$ et $\phi_{\tau(x_0)}(x_0) \in \Sigma$ pour toute $x \in N_\delta(x_0)$.

Donc, sous ces hypothèses et pour toute $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la fonction

$$P(x) = \phi_{\tau(x_0)}(x)$$

est appelée la carte de Poincaré pour Γ en x_0 .

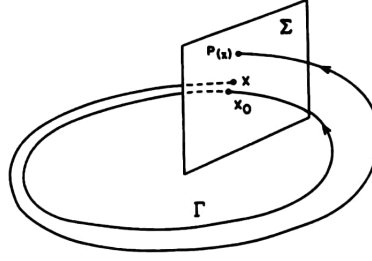


FIGURE 3.1 – La carte de Poincaré.

- **équivalence topologique** [14] : Deux flot

$$\varphi_t : A \rightarrow A,$$

et

$$\psi_t : B \rightarrow B,$$

sont équivalents s'il existe un homéomorphisme

$$h : A \rightarrow B,$$

qui dessine les orbites de φ sur les orbites de ψ et préserve la direction du temps. Autrement dit, il y a une carte $\tau : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est monotone augmentant avec t et

$$h(\varphi_\tau(x, t)(x)) = \psi_t(h(x)).$$

- **Cycle limite multiple** : Soient $P(s)$ la carte de Poincaré pour un cycle Γ d'un système analytique planaire (1.1) et

$$d(s) = P(s) - s$$

la fonction de déplacement. Alors si

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ et } d^{(k)}(0) \neq 0,$$

Γ est appelé un cycle limite multiple de multiplicité k . Si $k = 1$ alors Γ est appelé un cycle limite simple.

- **Croisent transversalement** : Soit p un point dans $\mathbb{R}^n$. On dit que deux variétés différentiable M et N dans $\mathbb{R}^n$ se croisent transversalement à $p \in M \cap N$ si $T_p M \oplus T_p N = \mathbb{R}^n$ où $T_p M$ et $T_p N$ désignent les espaces tangentes de M et N respectivement en p . On dit que M et N se croisent transversalement s'ils se croisent transversalement à chaque point $p \in M \cap N$.
- **Variétés stables et instables** : Les orbites périodiques ont des variétés stables et instables, tout comme les points d'équilibre ; Soit Γ une orbite périodique (hyperbolique) et soit N un voisinage de Γ . Les variétés locales stables et instables de Γ respectivement sont données par

$$S(\Gamma) = \{x \in N \mid d(\phi_t(x), \Gamma) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow \infty \text{ et } \phi_t(x) \in N \text{ pour } t \geq 0\}$$

et

$$U(\Gamma) = \{x \in N \mid d(\phi_t(x), \Gamma) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow -\infty \text{ et } \phi_t(x) \in N \text{ pour } t \leq 0\}$$

Les variétés globales stables et instables de Γ respectivement sont alors définies par

$$W^s(\Gamma) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S(\Gamma))$$

et

$$W^u(\Gamma) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U(\Gamma))$$

- **Difféomorphisme** [14] : Une application $f : U \longrightarrow V$ tels que $U \subset E, V \subset F$ et E, F : espaces vectorielles normés, est un difféomorphisme de classe C^r avec $r \geq 1$ si :
 1. f bijective.
 2. f de classe C^r .
 3. f^{-1} de classe C^r .
- **Ensemble dénombrable** : Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à (en bijection avec) l'ensemble (ou un sous ensemble) des entiers $\mathbb{N}$.
- **Cantor** : Soit l'application

$$\varphi : [a.b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \varphi(t) = u(t) + iv(t),$$

où $u, v : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et φ continue sur $[a.b]$. On appelle Cantor si $\varphi(a) = \varphi(b)$

- **Itérée de fonction** : Soit l'application $f : X \longrightarrow X$ tel que X un ensemble non vide. Pour $n \in \mathbb{N}$ la n^{ieme} itérée de f est la composé $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois).
- **La fonction sous-harmonique** : La fonction f de classe C^2 sur U où U est un ouvert borné, est sous-harmonique dans U si et seulement si $\Delta f \leq 0$.

3.3 Méthode de Melnikov

La méthode de Melnikov est basée sur les hypothèses suivantes :

(A.1) Pour $\varepsilon = 0$ le système (3.2) a une orbite homoclinique

$$\Gamma_0 : X = \gamma_0(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

à un point de selle hyperbolique X_0 .

(A.2) Pour $\varepsilon = 0$ le système (3.2) a une famille d'orbites périodiques à un paramètre $\gamma_\alpha(t)$ de période T_α à l'intérieur de Γ_0 avec $\partial\gamma_\alpha(0)/\partial\alpha \neq 0$.

La fonction Melnikov $M(t_0)$ est alors définie par

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^t \nabla \cdot f(\gamma_0(s)) ds} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt, \quad (3.3)$$

où le produit de coin de deux vecteurs u et $v \in \mathbb{R}^2$ est défini par $u \wedge v = u_1 v_2 - v_1 u_2$. On notera que la fonction Melnikov $M(t_0)$ est proportionnelle à la dérivée de la carte de Poincaré par rapport au paramètre ε dans un voisinage intérieur du cycle séparatrix Γ_0 (ou au voisinage d'un cycle).

Avant d'énoncer le résultat principal, établi par Melnikov, concernant l'existence de points homoclines transversaux de la carte de Poincaré, nous avons besoin du lemme suivant qui établit l'existence d'une orbite périodique $\gamma_\varepsilon(t)$ de (3.2), et donc l'existence de la carte de Poincaré P_ε , pour (3.2) avec un ε suffisamment petit.

Lemme 3.3.1. [15] *Sous les hypothèses (A.1) et (A.2), pour ε suffisamment petit, (3.2) a une orbite périodique hyperbolique unique $\gamma_\varepsilon(t) = X_0 + O(\varepsilon)$ de la période T . En conséquence, la carte de Poincaré P_ε a un point fixe hyperbolique unique de type selle $X_\varepsilon = X_0 + O(\varepsilon)$.*

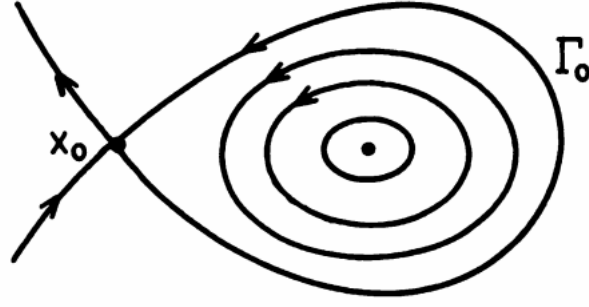


FIGURE 3.2 – Le portrait de phase du système (3.2) sous les hypothèses (A.1) et (A.2).

Théorème 3.3.1. [5] *Sous les hypothèses (A.1) et (A.2), si la fonction de Melnikov $M(t_0)$ défini par (3.3) a un zéro simple dans $[0, T]$ alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit les variétés stables et instables $W^s(X_\varepsilon)$ et $W^u(X_\varepsilon)$ de la carte Poincaré P_ε se croisent transversalement c'est-à-dire que P_ε a un point transversal homoclinique et si $M(t_0) > 0$ (ou $M(t_0) < 0$) pour tout t alors $W^s(X_\varepsilon) \cap W^u(X_\varepsilon) = \emptyset$.*

Remarque 3.3.1. *Le théorème 3.3.1 est un résultat important car il établit l'existence d'un point homocline transverse pour P_ε .*

Théorème homoclinique de Smale-Birkhoff

Il existe d'un ensemble invariant étrange Λ pour certains itérés, F_ε , de P_ε et le même type de dynamique perturbée pour (3.2) que pour la carte en fer à cheval de Smale, (voir le chapitre 2 dans [20] ou le chapitre 5 dans [5]), selon le théorème suivant

Théorème (Théorème homoclinique de Smale-Birkhoff). [20] *Soit $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme tel que P a un point fixe hyperbolique de type selle p , et un point homoclinique transversal $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$.*

Alors il existe un entier N tel que $F = P_N$ ait un ensemble de Cantor invariant compact hyperbolique Λ sur lequel F est topologiquement équivalent à une carte de décalage sur des séquences bi-infinies de zéros et de uns. L'ensemble invariant Λ

- (i) *contient un ensemble dénombrable d'orbites périodiques de F de durées arbitrairement longues,*
- (ii) *contient un ensemble non dénombrable d'orbites non périodiques bornées, et*

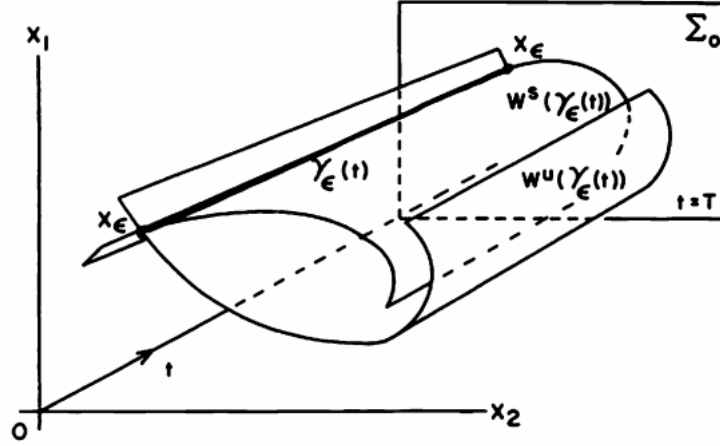


FIGURE 3.3 – Le point fixe hyperbolique x_ε de la carte de Poincaré P_ε dans la section Σ_0 à $t = 0$ qui est identifié à la section à $t = T$.

(iii) contient une orbite dense.

Le théorème suivant contient un autre résultat important de la théorie de Melnikov, qui établit l'existence d'un point homoclinique de tangence dans $W^s(X_\varepsilon) \cap W^u(X_\varepsilon)$.

Théorème 3.3.2. [5] Supposons que (A.1) et (A.2) sont valides pour le système

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X, t, \mu), \quad (3.4)$$

en fonction d'un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$, cela g est T -périodique en t , que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et que $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Si la fonction Melnikov $M(t_0, \mu)$ définie par (3.3) a un zéro quadratique à $(t_0, \mu_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire si $M(t_0, \mu_0) = \frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0, \mu_0) = 0$, $\frac{\partial^2 M}{\partial t_0^2}(t_0, \mu_0) \neq 0$ et $\frac{\partial M}{\partial \mu} \neq 0$, alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit il y a une valeur de bifurcation $\mu_\varepsilon = \mu_0 + O(\varepsilon)$ où $W^s(X_\varepsilon)$ et $W^u(X_\varepsilon)$ se croisent tangentiellement.

Remarque 3.3.2. Si pour $\varepsilon = 0$, (3.2) ou (3.4) sont des systèmes hamiltoniens, c'est-à-dire si

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T,$$

alors $\nabla \cdot f = 0$ et la fonction de Melnikov a la forme la plus simple

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt. \quad (3.5)$$

Preuve. Si $\dot{X} = f(X)$ est hamiltonien, alors $f = (H_y, -H_x)$ pour $X \in \mathbb{R}^2$ et donc $\nabla f = \partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y = 0$ pour $X \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Nous ne voudrions pas s'attendre à ce que la structure non hyperbolique à l'intérieur du cycle de séparatrix Γ_0 soit préservée sous de petites perturbations comme dans (3.2). Cependant, dans certaines conditions, certaines des orbites périodiques $\gamma_\alpha(t)$ dont les périodes T_α sont des multiples rationnels de la période T de la fonction de perturbation g , c'est-à-dire,

$$T_\alpha = \frac{m}{n}T,$$

sont conservés sous de petites perturbations. Nous supposons que $f(x)$ est un champ vectoriel hamiltonien sur $\mathbb{R}^2$, qu'il y a une famille d'orbites périodiques à un paramètre $\gamma_\alpha(t)$ à l'intérieur du cycle de séparatrix Γ_0 , et que l'hypothèse suivante

(A.3) $\frac{\partial T_\alpha}{\partial h_\alpha} \neq 0$ où $h_\alpha = H(\gamma_\alpha(t))$.

Théorème 3.3.3. [5] *Si dans l'équation (3.2) f est un champ vectoriel hamiltonien, alors sous hypothèses (A.1) - (A.3), si la fonction sous-harmonique de Melnikov*

$$M_{m,n}(t_0) = \int_0^{mT} f(\gamma_\alpha(t)) \wedge g(\gamma_\alpha(t), t + t_0) dt, \quad (3.6)$$

le long d'une orbite périodique sous-harmonique $\gamma_\alpha(t)$, de période mT/n , a un zéro simple dans $[0, mT]$ alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (3.2) a une orbite périodique sous-harmonique de période mT dans un ε voisinage de $\gamma_\alpha(t)$.

Remarque 3.3.3. *Des résultats aux théorèmes 3.3.1 - 3.3.3 sont donnés pour les systèmes hamiltoniens à deux degrés, ce n'est pas nécessaire si nous utilisons l'équation (3.3) pour la fonction de Melnikov.*

3.4 Applications de la théorie de Melnikov

3.4.1 Équation de Duffing

Considérons l'équation de Duffing perturbée périodiquement

$$\ddot{x} - x + x^3 - \varepsilon(\mu \cos \omega t - \delta \dot{x}) = 0. \quad (3.7)$$

On peut d'écrire l'équation de Duffing comme le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(\mu \cos \omega t - \delta y).\end{aligned}$$

Où l'amplitude de la force μ , la fréquence ω et l'amortissement δ sont des paramètres variables et ε est un petit paramètre (d'échelle).

Pour $\varepsilon = 0$ nous avons un système hamiltonien suivant :

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Pour $\varepsilon = 0$ il y a une selle hyperbolique à $(0, 0)$, les centres à $(x, y) = (\pm 1, 0)$ et deux homoclines orbitales

$$\Gamma_0^\pm : \gamma_0^\pm = \pm(\sqrt{2} \operatorname{sech}(t), -\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \tanh t)^T$$

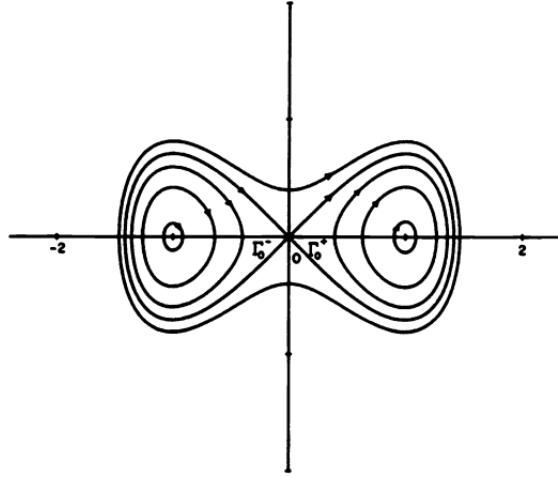


FIGURE 3.4 – Le portrait de phase de l'équation de Duffing avec $\varepsilon = 0$.

Nous allons calculer la fonction de Melnikov pour $\gamma_0^+(t)$; (le calcul pour $-\gamma_0^+(t)$ est identique)

$$\begin{aligned}M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) [\mu \cos \omega(t + t_0) - \delta y_0(t)] dt \\ &= -\sqrt{2}\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh t \cos \omega(t + t_0) dt - 2\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2 t dt.\end{aligned}$$

Calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh t \cos \omega(t + t_0) dt$ par la méthode des résidus.

Le première étape : On utilisons l'intégration par parties

On pose : $u = \cos \omega(t + t_0)$, $du = -\omega \sin \omega(t + t_0)$

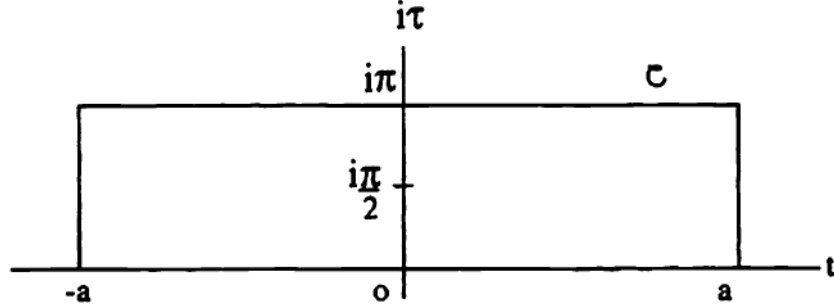
$dv = \operatorname{sech}(t) \tanh t dt$, $v = -\operatorname{sech}(t)$ donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh t \cos \omega(t + t_0) dt \\ &= - \left[\cos \omega(t + t_0) \operatorname{sech}(t) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega(t + t_0) \operatorname{sech}(t) dt \\ &= -\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sin \omega t \cos \omega t_0 + \cos \omega t \sin \omega t_0 \right] \operatorname{sech}(t) dt \\ &= -\omega \cos t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(t) \sin \omega t dt - \omega \sin \omega t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(t) \cos \omega t dt \end{aligned}$$

et puis puisque $\sin \omega t \operatorname{sech}(t)$ est une fonction impaire, il s'ensuit que

$$I = -\omega \sin \omega t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(t) \cos \omega t dt.$$

La deuxième étape : Soit $z = t + i\tau$, $f(z) = \operatorname{sech}(z) \cos \omega z = \frac{\cos \omega z}{\cosh z}$ et soit C désigne le contour.



Ensuite, par le théorème des résidus

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z).$$

Puisque $\cosh z$ a un zéro simple à $z = i\pi/2$ et $f(z)$ a un pôle simple à $z = i\pi/2$ et pas d'autres singularités à l'intérieur ou sur C .

Ainsi, le résidu de $f(z) = g(z)/h(z)$ à $z = i\pi/2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= g(i\pi/2)/h'(i\pi/2) \\ &= \cos(i\omega_0\pi/2)/\sinh(i\pi/2) \\ &= \cosh(\omega_0\pi/2)/i \\ &= -i \cosh(\omega\pi/2). \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z) = -i \cosh(\omega\pi/2).$$

La troisième étape : Pour $z = \pm a + i\tau$ et $0 \leq \tau \leq \pi$, $|\frac{\cos \omega z}{\cosh z}| \leq e^{-a} \frac{(1+e^{\omega\pi})}{(1-e^{-2a})}$ et de ce fait

$$\left| \int_0^\pi \frac{\cos \omega(\pm a + i\tau)}{\cosh(\pm a + i\tau)} d\tau \right| \leq \pi e^{-a} \frac{(1 + e^{\omega\pi})}{(1 - e^{-2a})},$$

qui se rapproche de zéro $a \rightarrow 0$.

Et pour $z = t + i\pi = -u + i\pi$

$$\begin{aligned} \int_{a+i\pi}^{a-i\pi} f(z) dz &= \int_a^{-a} \frac{\cos \omega(-u + i\pi)}{\cosh(-u + i\pi)} du \\ &= \cosh \omega\pi \int_{-a}^a \frac{\cos \omega u}{\cosh u} du, \end{aligned}$$

depuis $\cosh(-u + i\pi) = -\cosh u$, $\cos \omega(-u + i\pi) = \cos \omega u \cosh \omega\pi + \sin \omega u \sinh \omega\pi$ et $\sin \omega u / \cosh u$ est une fonction individuelle.

La quatrième étape : Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z) \\ &= (1 + \cos \omega\pi) \int_{-a}^a \frac{\cos \omega t}{\cosh t} dt + \int_0^\pi \frac{\cos \omega(a + i\tau)}{\cosh(a + i\tau)} d\tau + \int_0^\pi \frac{\cos \omega(-a + i\tau)}{\cosh(-a + i\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Et enfin, nous faisons $a \rightarrow \infty$ et en utilisant les résultats des étapes de 1 à 3 nous avons

$$\int_{-a}^a \frac{\cos \omega t}{\cosh t} dt = \frac{2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z)}{(1 + \cos \omega\pi)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 I &= -\omega \sin \omega t_0 \int_{-a}^a \frac{\cos \omega t}{\cosh t} dt \\
 &= -\omega \sin \omega t_0 \frac{2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} f(z)}{(1 + \cos \omega \pi)} \\
 &= \frac{-\omega \sin \omega t_0 2\pi \cosh(\omega \pi/2)}{(1 + \cos \omega \pi)} \\
 &= -\pi \omega \sin \omega t_0 \operatorname{sech}(\omega \pi/2),
 \end{aligned}$$

depuis $2 \cosh^2(\omega \pi/2) = (1 + \cos \omega \pi)$.

Ainsi on a

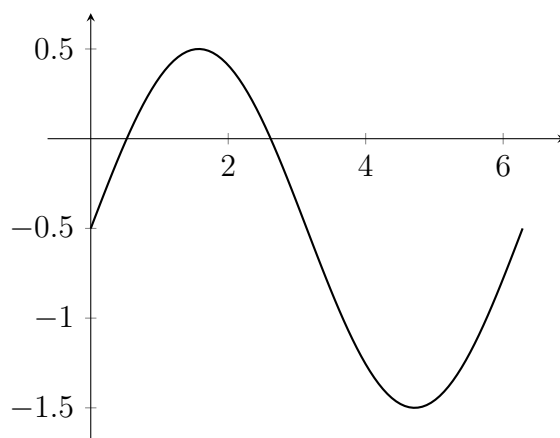
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2 t dt = \frac{2}{3}.$$

Nous avons donc

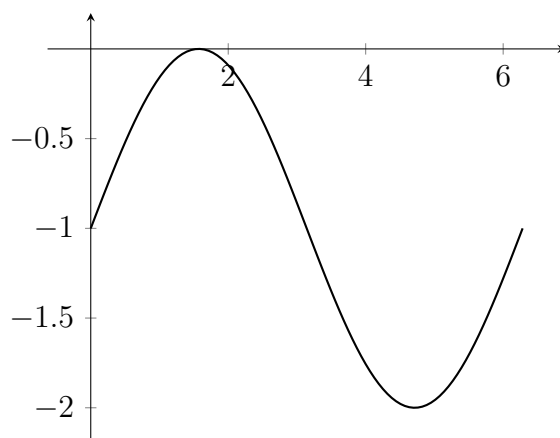
$$\begin{aligned}
 M(t_0) &= \sqrt{2} \mu \pi \omega \sin \omega t_0 \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) - \frac{4\delta}{3} \\
 &= \sqrt{2} \delta \pi \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \left[\frac{\mu}{\delta} \sin \omega t_0 - \frac{4 \cosh(\frac{\pi \omega}{2})}{3\sqrt{2}\pi \omega} \right].
 \end{aligned}$$

Si on définit $K_0(\omega) = \frac{4 \cosh(\frac{\pi \omega}{2})}{3\sqrt{2}\pi \omega}$ c'est à dire

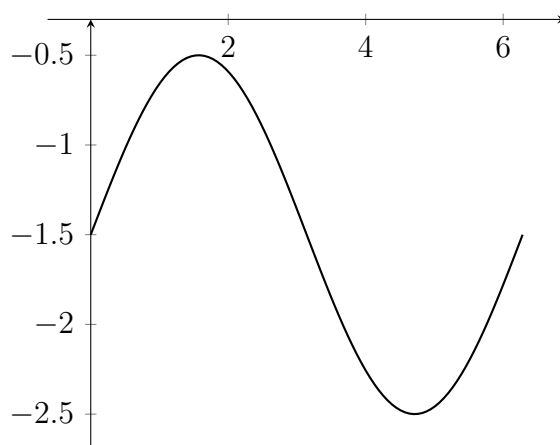
$$M(t_0) = \sqrt{2} \delta \pi \omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \left[\frac{\mu}{\delta} \sin \omega t_0 - K_0(\omega) \right].$$



$$0 < K_0(\omega) < \mu/\delta$$



$$K_0(\omega) = \mu/\delta$$



$$K_0(\omega) > \mu/\delta > 0$$

 FIGURE 3.5 – La fonction $\mu/\delta \sin \omega t_0 - K_0(\omega)$.

Alors

- Si $K_0(\omega) < \frac{\mu}{\delta}$, $M(t_0)$ a un zéro simple et d'après le théorème 3.3.1, $W^s(X_\varepsilon)$ et $W^u(X_\varepsilon)$ se croisent transversalement pour ε suffisamment petit.
- Si $K_0(\omega) > \frac{\mu}{\delta}$, $M(t_0)$ n'a pas de zéros et donc par le théorème 3.3.1, $W^s(X_\varepsilon) \cup W^u(X_\varepsilon) = \emptyset$.
- Si $K_0(\omega) = \frac{\mu}{\delta}$ alors $M(t_0)$ a un zéro quadratique et par le théorème 3.3.2, il y a une intersection tangentielle de $W^s(X_\varepsilon)$ et $W^u(X_\varepsilon)$ à un certain $\mu = K_0(\omega)\delta + O(\varepsilon)$.

Ceci est confirmé par les cartes de Poincaré pour l'équation de Diffing perturbée avec $\varepsilon = 0.1$, Comme le montre la figure 3.6 ci-dessous

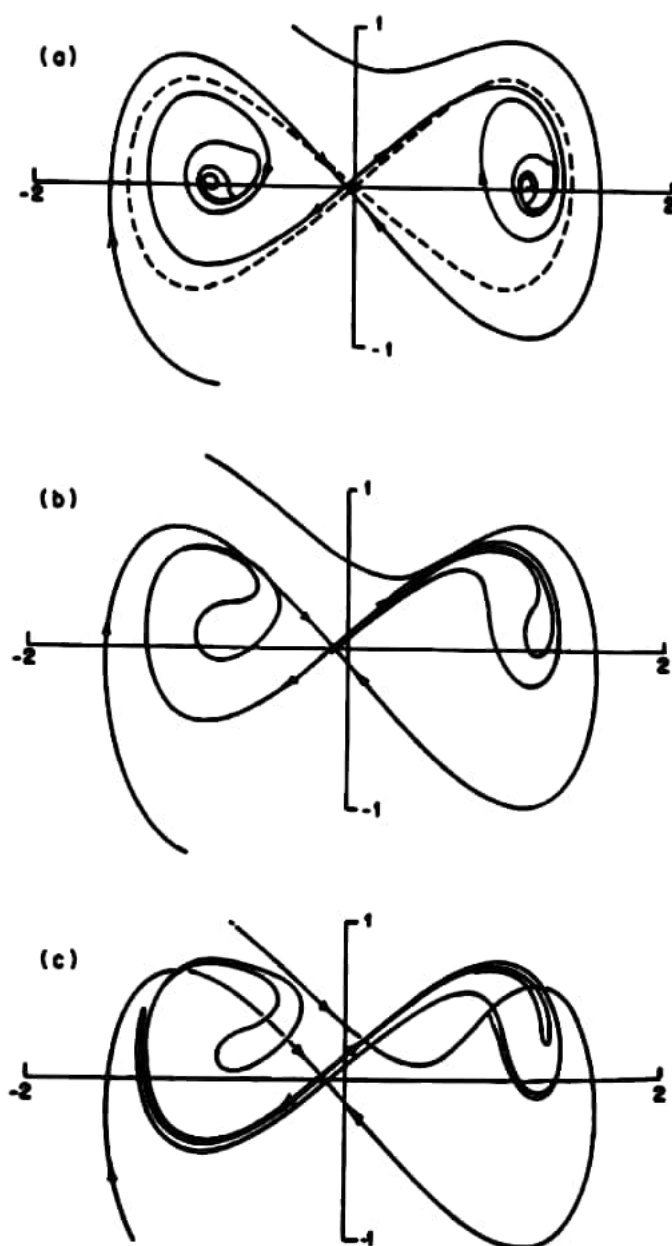


FIGURE 3.6 – Cartes de Poincaré pour l'équation perturbée de Duffing, montrant des variétés stables et instables du point de selle près de $(0, 0)$, avec $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 2.5$ et (a) $\varepsilon\mu = 0.11$, (b) $\varepsilon\mu = 0.19$, et (c) $\varepsilon\mu = 0.3$.

3.4.2 Équation du pendule

Considérons le mouvement d'un pendule amorti dont le pivot est soumis à une force d'excitation périodique

$$\ddot{x} + B\dot{x} + (1 - A \sin t) \sin x. \quad (3.8)$$

En posant $\dot{x} = y$, $A = \varepsilon a$, $B = \varepsilon b$ le système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin x + \varepsilon(a \sin t \sin x - by). \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, le système est hamiltonien avec

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x.$$

Pour $\varepsilon = 0$ il y a un centre à $(0, 0)$, les selles hyperboliques à $(x, y) = (\pm\pi, 0)$ et deux homoclines orbitales

$$\Gamma_0^\pm : \gamma_0^\pm = (\pm 2 \arctan(\sinh t), \pm 2 \operatorname{sech}(t)), \quad -\infty < t < \infty.$$

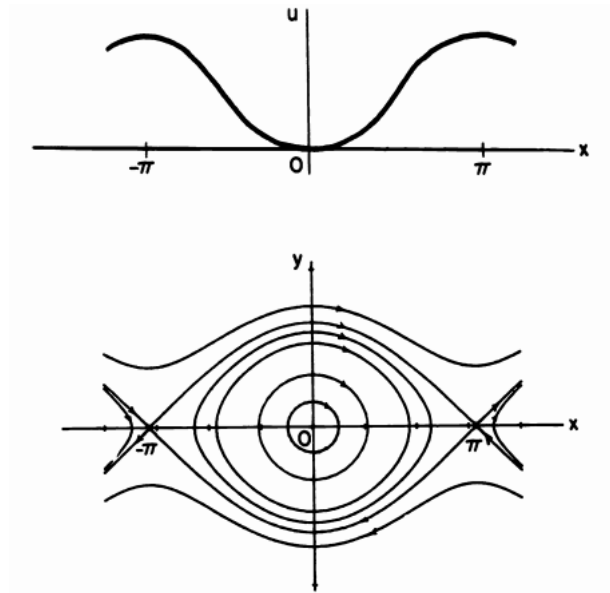


FIGURE 3.7 – Le portrait de phase de l'équation du pendule non amorti.

La fonction de Melnikov avec $\gamma_0(t) = \gamma_0^+(t)$ donne

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2sech(t) \\ -\sin(2 \arctan(\sinh t)) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \sin(t + t_0) \sin(2 \arctan(\sinh t)) - 2bsech(t) \end{pmatrix} dt.$$

Puisque $\sin(2 \arctan(\sinh t)) = 2 \sinh t sech^2(t)$ donc

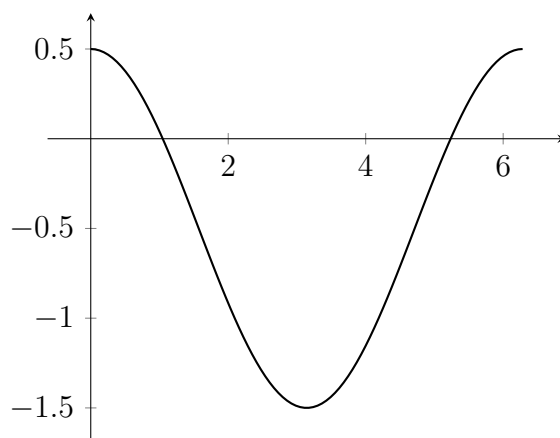
$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2sech(t) \\ -2 \sinh t sech^2(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \sin(t + t_0) \sinh t sech^2(t) - 2bsech(t) \end{pmatrix} dt \\ &= 4a \int_{-\infty}^{\infty} \sinh t sech^3(t) (\sin t_0 \cos t + \cos t_0 \sin t) dt - 2b \int_{-\infty}^{\infty} sech^2(t) dt \\ &= 4a \sin t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sinh t sech^3(t) \cos t + 4a \cos t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sinh t sech^3(t) \sin t - 2b \int_{-\infty}^{\infty} sech^2(t) dt. \end{aligned}$$

Le premier terme étant nul vu que l'on intègre une fonction impaire de t. L'intégrale restante peut s'évaluer par la méthode des résidus et l'on trouve finalement

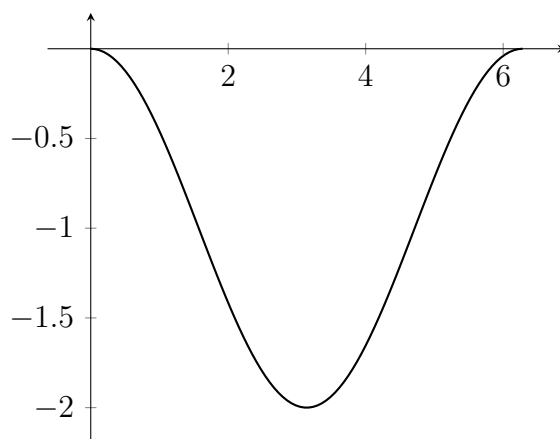
$$\begin{aligned} M(t_0) &= \frac{2a\pi}{\sinh(\pi/2)} \cos t_0 - 8b \\ &= \frac{2a\pi}{\sinh(\pi/2)} \left[\cos t_0 - \frac{4b \sinh(\pi/2)}{a\pi} \right]. \end{aligned}$$

Si on défini $K_0 = \frac{4b \sinh(\pi/2)}{\pi}$ c'est à dire

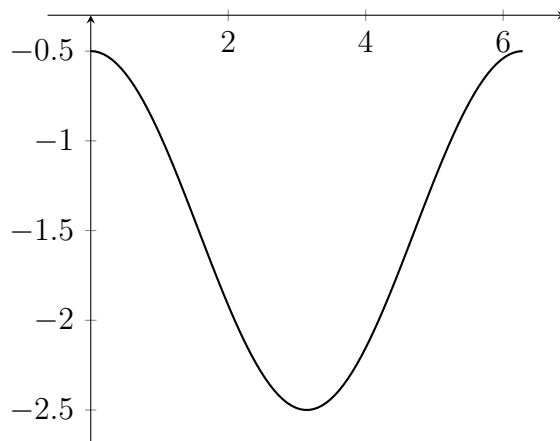
$$M(t_0) = \frac{2a\pi}{\sinh(\pi/2)} \left[\cos t_0 - \frac{K_0}{a} \right].$$



$$K_0 < a$$



$$K_0 = a$$



$$K_0 > a$$

FIGURE 3.8 – La fonction $\cos t_0 - \frac{K_0}{a}$.

Alors

- Si $K_0 < a$, $M(t_0)$ a un zéro simple et d'après le théorème 3.3.1, $W^s(X_\varepsilon)$ et $W^u(X_\varepsilon)$ se croisent transversalement pour ε suffisamment petit.
- Si $K_0 > a$, $M(t_0)$ n'a pas de zéros et donc par le théorème 3.3.1, $W^s(X_\varepsilon) \cup W^u(X_\varepsilon) = \emptyset$.
- Si $K_0 = a$ alors $M(t_0)$ a un zéro quadratique et par le théorème 3.3.2, il y a une intersection tangentielle de $W^s(X_\varepsilon)$ et $W^u(X_\varepsilon)$ à un certain $a_\varepsilon = K_0 + O(\varepsilon)$.

3.5 Quelques résultats simples de la théorie de Melnikov

Nous présentons ensuite quelques résultats simples de la théorie de Melnikov pour les systèmes planaires perturbés de la forme

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X, \mu), \quad (3.9)$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m)$.

Théorème 3.5.1. [5] *Sous l'hypothèse (A.1), s'il existe un $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que la fonction*

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), \mu) dt,$$

satisfait

$$M(\mu_0) = 0 \quad \text{et} \quad M_{\mu_1}(\mu_0) \neq 0.$$

Alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit il y a un $\mu_\varepsilon = \mu_0 + O(\varepsilon)$ tel que le système (3.9) avec $\mu = \mu_\varepsilon$, a une orbite homoclinique unique dans un voisinage $O(\varepsilon)$ de l'orbite homoclinique Γ_0 . De plus, si $M(\mu_0) \neq 0$ alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ et $|\mu - \mu_0|$ suffisamment petits, le système (3.9) n'a pas de cycle de séparatrix dans un voisinage $O(\varepsilon)$ de $\Gamma_0 \cup \{x_0\}$.

Exemple 3.5.1. *Considérons l'équation perturbée de Duffing*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon[\alpha y + \beta x^2 y]. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = 0$, il s'agit d'un système hamiltonien avec hamiltonien

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Le portrait de phase de ce système avec $\varepsilon = 0$ est donné à la figure 3.4. La courbe graphique $\Gamma_0^- \cup \{0\} \cup \Gamma_0^+$ représentée sur la figure 3.4 correspond à $H(x, y) = 0$; c'est-à-dire qu'il est représenté par des mouvements sur les courbes définies par

$$y^2 = x^2 - \frac{x^4}{2}.$$

Nous calculons la fonction de Melnikov dans le théorème 3.5.1 pour ce système en utilisant le fait que le long des trajectoires de l'équation de Duffing $dt = dx/\dot{x} = dx/y$. Nous calculons seulement $M(x)$ le long de la séparatrice de droite Γ_0^+ ; le calcul le long de Γ_0^- est identique.

$$\begin{aligned} M(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma_0^+(t)) \wedge g(\gamma_0^+(t), \mu) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) [\alpha y_0(t) + \beta x_0^2(t) y_0(t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_0^2(t) [\alpha + \beta x_0^2(t)] dt \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 - x^2/2} (\alpha + \beta x^2) dx \\ &= 2\alpha \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 - x^2/2} dx + 2\beta \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 - x^2/2} x^2 dx \\ &= \frac{4}{3}\alpha + \frac{16}{15}\beta. \end{aligned}$$

Nous voyons que $M(\mu) = 0$ si et seulement si $\beta = -5\alpha/4$. Ainsi, d'après le théorème 3.5.1, pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, il existe un $\mu_\varepsilon = \alpha(1, -5/4)^T + O(\varepsilon)$ tel que le système de ce exemple avec $\mu = \mu_\varepsilon$, c'est-à-dire avec $\beta = -5\alpha/4 + O(\varepsilon)$, a deux orbites homoclines $\Gamma_0^\pm$ à la selle à l'origine dans un voisinage $O(\varepsilon)$ de $\Gamma_0^\pm$.

Théorème 3.5.2. [5] Sous l'hypothèse (A.2), s'il existe un point $(\mu_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que la fonction

$$M(\mu, \alpha) = \int_0^{T_\alpha} f(\gamma_\alpha(t)) \wedge g(\gamma_\alpha(t), \mu) dt,$$

satisfait

$$M(\mu_0, \alpha_0) = 0 \quad \text{et} \quad M_\alpha(\mu_0, \alpha_0) \neq 0.$$

Alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (3.9) avec $\mu = \mu_0$ a un cycle limite hyperbolique unique dans un voisinage $O(\varepsilon)$ du cycle $\gamma_{\alpha_0}(t)$.

Si $M(\mu_0, \alpha_0) \neq 0$, alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit le système (3.6) avec $\mu = \mu_0$ n'a pas de cycle dans un voisinage $O(\varepsilon)$ du cycle $\gamma_{\alpha_0}(t)$.

Remarque 3.5.1. Sous l'hypothèse (A.2), on peut montrer que s'il existe un point $(\mu_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que

$$M(\mu_0, \alpha_0) = M_\alpha(\mu_0, \alpha_0) = 0,$$

$$M_{\alpha\alpha}(\mu_0, \alpha_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad M_{\mu 1}(\mu_0, \alpha_0) \neq 0.$$

Alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit il existe un $\mu_\varepsilon = \mu_0 + O(\varepsilon)$ tel que le système (3.9) avec $\mu = \mu_0$ a un cycle limite unique de multiplicité deux dans un voisinage $O(\varepsilon)$ du cycle $\gamma_{\alpha_0}(t)$.

Exemple 3.5.2. Considérons l'équation de Lienard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - [\mu_1 x + \mu^2 x^2 + \mu_3 x^3], \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

Avec $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$.

Le système non perturbé avec $\varepsilon = 0$ a un centre à l'origine avec une famille des orbites périodiques à un paramètre $\gamma_\alpha(t) = (\alpha \cos t, -\alpha \sin t)^T$ de période $T_\alpha = 2\pi$.

Nous calculons la fonction de Melnikov dans le théorème 3.5.2

$$\begin{aligned} M(\mu, \alpha) &= \int_0^{T_\alpha} f(\gamma_\alpha(t)) \wedge g(\gamma_\alpha(t), \mu) \\ &= \int_0^{2\pi} x_\alpha(t) [\mu_1 x_\alpha + \mu^2 x_\alpha^2 + \mu_3 x_\alpha^3] \\ &= \int_0^{2\pi} (\mu_1 \alpha^2 \cos^2 t + \mu^2 \alpha^3 \cos^3 t + \mu_3 \alpha^4 \cos^4 t) \\ &= -2\pi \alpha^2 \left[\frac{\mu_1}{2} + \frac{3}{8} \mu_3 \alpha^2 \right]. \end{aligned}$$

On voit que l'équation $M(\mu, \alpha) = 0$ a une solution si et seulement si $\mu_1 \mu_3 < 0$. Il résulte du théorème 3.5.2 que si $\mu_1 \mu_3 < 0$ alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit le système Lienard aura une limite unique cycle qui est approximativement un cercle de rayon

$$\alpha = \sqrt{\frac{4|\mu_1|}{3|\mu_3|}} + O(\varepsilon).$$

Bibliographie

- [1] M.R. Alecea, *Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem for Planar Systems, Dynamics at the Horsetooth, M640 , 2011.*
- [2] J. Bricmont, *Introduction à La dynamique Non Linéaire, Unité de Physique théorique et mathématique, Année académique 2009-2010.*
- [3] J. Frédéric, *Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique, Notes de cours, 2011/2012*
- [4] J. Guckenheimer, M. Myers and B. Sturmfels, *Computing Hopf Bifurcations I, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997.*
- [5] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, (1983).*
- [6] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I : nonstiff problems, New York, Springer-Verlag, 1993.*
- [7] J. Hale et H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations, vol. 3, New York, Springer-Verlag, coll. Texts in Applied Mathematics, 1991.*
- [8] T. Kumar Dutta, A. Kr.Jain and D.Nabajyoti, *Analytical process for determination of HopFf bifurcations, Journal of Global Research in Mathematical Archives, Volume 1, No. 8, August 2013.*
- [9] Yu.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory. 3rd edition, Springer, 2004.*
- [10] I. Kvacic and M.J.Brennan, *The Duffing Equation : Nonlinear Oscillators and their Behaviour, University of Southampton, 2011.*
- [11] S. Lynch, *Dynamical Systems With Applications Using Matlab, Birkhauser, Boston (2004).*

- [12] P. Manneville, *Dynamique Non-Linéaire et Chaos, Laboratoire d'Hydrodynamique, Ecole polytechnique, 2002.*
- [13] J. E. Marsden, and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 1976.*
- [14] J.D. Meiss, *Differential Dynamical Systems, SIAM, Philadelphia, PA (2007).*
- [15] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition, Springer, New York (2001).*
- [16] R. H. Rand, *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations, Cornell University, 2005.*
- [17] J.J.Sloyine, W.Li, *Applied non linear control" Prentice Hall., 1991.*
- [18] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, American Mathematical Society, 2011.*
- [19] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, 2nd edition, Springer, Berlin (1989).*
- [20] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, New York, 1990.*

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de l'application de la théorie des perturbations, à savoir la théorie de la bifurcation de Hopf, leur définition, des caractéristiques et applications. Nous avons d'abord introduit toutes les propriétés et concepts de base utilisées dans notre étude, puis nous avons étudié la méthode de Melnikov, considérée comme l'un des principaux outils pour déterminer l'existence (ou l'absence) du chaos dans le système de Hamilton. Nous avons appliqué ces concepts pour résoudre des exemples de base.

Mots clés: Théorie des perturbations, bifurcation de Hopf, méthode de Melnikov, système de Hamilton.

Abstract

This work is devoted to the study of the application of the perturbation theory, namely the theory of the bifurcation of Hopf, their definition, characteristics and applications. We first introduced all the basic properties and concepts used in our study, then we studied Melnikov's method as one of the main tools for determining the existence (or absence) of chaos in the Hamilton system. We have applied these concepts to solve basic examples.

Key words: Perturbation theory, bifurcation of Hopf, Melnikov method, Hamilton system.

المخلص

هذا العمل مخصص لدراسة أحد تطبيقات نظرية التذبذب، ألا وهي نظرية التشعب لهوف تعريفها وخصائصها وتطبيقاتها. أولاً قمنا بعرض كل الخصائص والمفاهيم الأساسية المستعملة في دراستنا، ثم تطرقنا لدراسة طريقة ملنيكوف والتي تعتبر واحدة من الأدوات الرئيسية لتحديد وجود (أو عدم وجود) الفوضى في نظام هاميلتوني. وقد طبقنا هاته المفاهيم في حل بعض الأمثلة الأساسية.

كلمات مفتاحية: نظرية التذبذب، تشعب هوف، طريقة ملنيكوف، نظام هاميلتوني.