



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ E C H A H I D HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Stabilité exponentielle de quelques systèmes
en thermoélasticité
avec élasticité non-simple**

Présenté par: Aicha Nemsi
Afaf Ahmima

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	Lamine Guedda	M.C.B	Univ. El Oued
Rapporteur	Abdelfeteh Fareh	M.C.A	Univ. El Oued
Examineur	Nadjet Douadi	M.A.A	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicace

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à **ALLAH** le tout puissant.

Je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour, a la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ,
maman **Milouda** que j'adore.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père **Khalifa**.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères **Ali**,
Oukacha, **Samire**, **Ahmed**, **Hicham** et mes sœurs **Djehad**, **Heddi**.

A toute ma famille et toute la famille **AHMIMA**.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés,
mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de cœur, toi **Fatma** , **Hanan** et **Ali**.

A mon binôme **Aicha**.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

AFAF

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire de master. A celui qui réside dans mon cœur et esprit c'est grâce à lui que j'ai terminé mes études à mon amoureux mari **Youcef**.

A la source de tendresse et d'amour à suer source de force an grand cœur mer chère mère **Farida**.

A celui qui m'a accompagné durant mon cursus scientifique qui a beaucoup sacrifié pour que je puisse étudier à mon cher petit enfant **Ouaiss**.

A celle de bon cœur et pure esprit qui était à coté de moi avec son aide précieux à ma mère que je n'ai pas eu, ma belle-mère **Mariem**.

A celui est pleur de dignité que j'ai son nom avec fierté à mon père **Abdel Aziz**.

A mes sœurs qui m'ont encouragé et m'ont soutenu à mes esprits **Asma, Nour, Fatma** et **Hana**. A mes frères qui m'ont le cœur **Abde Rahmen** et **Omor**.

A mes sœurs que je n'ai pas eu mes généreuses amies qu'ont l'esprit de solidarité **Afaf** et **Zohra**.

AICHA

Remerciements

Avant tout, nous remercions **DIEU** le tout puissant de nous avoir donné la volonté d'accomplir et d'achever ce mémoire.

Tout d'abord, nous tenons à remercier le **Dr. Abdelfeteh Fareh**, pour la disponibilité, la confiance, les conseils, l'encadrement tout au long la période de recherche.

Nos remerciements s'adressent au **Dr Nisse Lamine** pour son aide pratique et son soutien moral et ses encouragements.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger notre travail.

D'ailleurs, nous remercions chaleureusement tous les membres de nos familles surtout nos parents pour leur effort et leur fatigue.

Nos remerciements s'adressent également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nos profonds remerciements à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Notations générales

$H^1, H_0^1, H^2, H^4, W^P, W_0^P$	Espaces de Sobolev,
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire,
<i>i.e</i>	C'est à dire,
∂	L'opérateur de différentiation partielle,
$D(\mathcal{A}), R(\mathcal{A})$	Domaine et image de l'opérateur \mathcal{A} ,
$\rho(\mathcal{A})$	Ensemble résolvant de l'opérateur \mathcal{A} ,
$\sigma(\mathcal{A})$	Le spectre de l'opérateur \mathcal{A} ,
σ_p	Le specter ponctuelle (le valeur propre),
$ \cdot $	La norme euclidienne sur \mathbb{R}^d ,
$\ \cdot\ _X$	La norme sur l'espace X ,
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateur bornés et linéaires de E dans F,
$Re\langle \cdot, \cdot \rangle$	La partie réelle de produit scalaire,
$Im\langle \cdot, \cdot \rangle$	La partie imaginaire de produit scalaire,
C_0^∞	Espace des fonctions tests,
$C_c^m(\Omega)$	Espace des fonctions de classe C^m à support compact dans Ω ,
$\{T(t), t \geq 0\}$	Semigroupe à un paramètre ,
B_E	La boule unité de E,
$\mathcal{K}(E, F)$	L'espace des opérateurs linéaires et compacts de E dans F,
$\mathcal{K}(E)$	L'espace des opérateur linéaire et compact de E dans F,
$Ker \mathcal{A}$	Noyau de l'opérateur \mathcal{A} .

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Espaces fonctionnels	2
1.1.1 Espace de Hilbert	2
1.1.2 Espaces de Sobolev	3
1.2 Quelques inégalités utiles	4
1.3 Opérateurs linéaires bornés	5
1.4 Semigroupe fortement continu	7
1.4.1 Théorème de Hille-Yosida	7
1.4.2 Théorème de Lumer-Phillips	8
1.5 Stabilité exponentielle	9
2 Stabilité exponentielle d'une barre thermoélastique avec élasticité non-simple	10
2.1 Existence et unicité	12
2.2 Stabilité exponentielle	15
3 Stabilité exponentielle d'un système en non-simple thermoélasticité de type III	26
3.1 Cas régulier	26
3.1.1 Existence et unicité	28
3.1.2 Stabilité exponentielle	31
3.2 Cas limite $\beta \neq 0$ et $\delta = 0$	37

3.2.1	Existence et unicité	37
3.2.2	Stabilité exponentielle	41

Introduction générale

Un intérêt croissant s'est donné ces dernières années à la détermination du comportement asymptotique des solutions de plusieurs problèmes en thermoélasticité. L'intérêt provient du fait qu'une structure thermo-mécanique est exponentiellement stable si les variations dues à une perturbation sont très faibles et peuvent être négligées après une courte période de temps, par contre une structure est faiblement stable si l'effet d'une perturbation est apprécié dans le système après un certain laps de temps.

Notons qu'une solution $U(t)$ engendrée par un semigroupe est exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives γ, w telles que

$$\|U(t)\| \leq U(0)\gamma e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dans la théorie d'élasticité classique la déformation est donnée par la formule suivante

$$F = \nabla_X x = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = I + \nabla u,$$

où X, x et $u = x - X$ sont respectivement les positions initiale et finale et le déplacement d'un point matériel M dans la configuration d'un corps déformable. En général ceci suffit pour décrire les changements de forme et les rotations globales du corps.

Pour certaines qualités des matériaux la négligence de la réponse de la structure interne des matériaux à l'excitation externe conduit à défaillance du modèle, ce qui conduit à introduire des dérivées d'ordre supérieures dans la définition de la déformation, par suite l'apparence des dérivées d'ordre 3 et 4 des fonctions inconnues u et φ , ces matériaux sont appelés matériaux non-simple.

Plusieurs publications ont paru sur ce sujet et l'étude de la stabilité des systèmes en non-simple thermoélasticité, citons par exemple les travaux de Quintanilla et ses co-auteurs Magaña et Liu et les travaux de Aouadi.

Dans ce mémoire nous allons considérer des systèmes des équations aux dérivées partielles modélisant des matériaux non-simple et nous allons étudier l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle des solutions de ces systèmes.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on va donner quelques notions générales de l'analyse fonctionnelle qui seront utiles dans les chapitres qui suivent.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. [1] Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et qui est complet par rapport à la norme $\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.1.2. [1] Ω est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

1) Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

C'est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = 2$ c'est un espace de Hilbert réel (ou complexe) muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \bar{v} dx.$$

2) Pour $p = \infty$ on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable; } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \},$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{Inf} \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.1.3. [1] Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ telle que } \int_{\Omega} u\varphi' = - \int_{\Omega} g\varphi, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \right\},$$

pour $p = 2$ on note

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note $g = u'$ et on l'appelle la dérivée faible (où au sens des distributions) de u .

Notations

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}$). L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

la norme associée est

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni par la norme induite de $W^{1,p}(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par celui de $H^1(\Omega)$.

Définition 1.1.4. [6] *L'espace de Sobolev* $H^m(\Omega)$

Pour tout entier $m \geq 1$, on définit l'espace

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right\} dx,$$

et on note par

$$\|v\|_{m,\Omega} = \langle v, v \rangle_{m,\Omega}^{\frac{1}{2}},$$

la norme correspondante.

1.2 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes sont d'une grande importance

Inégalité de Young

Soient p et q deux réels conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |ab| \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

En particulier si $u, v \in L^2(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n et $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors, il existe une constante positive C ne dépend que de $mes(\Omega)$ et n tel que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Définition 1.2.1. [1] On dit qu'une forme bilinéaire

$$a(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R},$$

est :

1. Continue, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq C |u| |v| \quad \forall u, v \in \mathcal{H},$$

2. Coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Théorème 1.2.1. [1] [*Lax-Milgram*]

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur \mathcal{H} , et L une forme linéaire continue. Alors, il existe $u \in \mathcal{H}$ solution unique du problème tel que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

1.3 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1. [7] Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur le même champ de scalaire \mathbb{K} , un opérateur linéaire $\mathcal{A} : E \rightarrow F$ est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathcal{A}x\| \leq C \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F sera noté $\mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$.

Théorème 1.3.1. [7]

Soit E et F deux espaces normés, l'application $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\|\mathcal{A}\| = \sup \{ \|\mathcal{A}x\| : \|x\| \leq 1 \},$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1.3.2. [1] On dit qu'un opérateur $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $\mathcal{A}(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte de F , où B_E est la boule unité de E . On désigne par $\mathcal{K}(E, F)$ le sous-espace des opérateurs compacts de E dans F , on pose $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposition 1.3.1. [7] Soit E et F des espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire \mathcal{A} est compact, si pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite $(\mathcal{A}x_n)$ possède une sous-suite convergente dans F .

Définition 1.3.3. [1] Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble résolvant de \mathcal{A} est

$$\rho(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{R}; (\mathcal{A} - \lambda I) \text{ est inversible} \} = \{ \lambda \in \mathbb{R}; (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E) \}.$$

Le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. On dit que λ est une valeur propre de \mathcal{A} et on note $\lambda \in \sigma_P(\mathcal{A})$ si

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I) \neq \{0\};$$

Théorème 1.3.2. [1] Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$ Alors, on a

1. $0 \in \sigma(\mathcal{A})$,
2. $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\} = \sigma_P(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$.

Théorème 1.3.3. [7] Soit E un espace de Banach. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur et $\|\mathcal{A}\| < 1$ alors $I - \mathcal{A}$ est un inversible et l'inverse est donné par

$$(I - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n.$$

Preuve. Puisque E est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach.

Comme $\|\mathcal{A}\| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{A}\|^n$ converge dans \mathbb{R} .

Notons que $\|\mathcal{A}^n\| \leq \|\mathcal{A}\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{A}^n\|$ est convergente, et par suite $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ est normalement convergente.

Soient $S = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ et $S_k = \sum_{n=0}^k \mathcal{A}^n$, alors, S_k converge vers S dans $\mathcal{L}(E)$.

Nous avons

$$\|(I - \mathcal{A})S_k - I\| = \|I - \mathcal{A}^{k+1} - I\| = \|\mathcal{A}^{k+1}\| \leq \|\mathcal{A}\|^{k+1} \longrightarrow 0.$$

En on déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I - \mathcal{A})S_k = I.$$

Par conséquent

$$(I - \mathcal{A})S = (I - \mathcal{A}) \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - \mathcal{A})S_k = I,$$

De la même manière on montre que $S(I - \mathcal{A}) = I$ alors $I - \mathcal{A}$ est inversible et

$$(I - \mathcal{A})^{-1} = S.$$

□

1.4 Semigroupe fortement continu

Définition 1.4.1. [4]

Une famille $\{T(t), 0 \leq t < \infty\}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach E est appelée semigroupe fortement continu (où, un C_0 -semigroupe) si

1. $T(t + s) = T(t)T(s) \quad \forall t, s \geq 0,$
2. $T(0) = I,$
3. Pour chaque $x \in E, T(\cdot)x : [0, +\infty[\rightarrow E$ est continue.

Le semigroupe est dit uniformément continu si au lieu de 3. on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Le générateur infinitésimal de $\{T(t), t \geq 0\}$ est l'opérateur linéaire \mathcal{A} de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in E : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et est défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt} \Big|_{t=0} \quad \text{pour } x \in D(\mathcal{A}).$$

1.4.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.4.1. [8] Soient \mathcal{H} espace de Hilbert et $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu $T(t)$ et $x \in D(\mathcal{A})$, alors, pour tout $t \geq 0$ la fonction

$$\begin{aligned} [0, +\infty[&\longrightarrow \mathcal{H} \\ t &\longrightarrow T(t)x \end{aligned}$$

est de classe C^1 et vérifie

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = \mathcal{A}T(t)x.$$

Remarque 1.4.1. [8] Du théorème précédent on remarque que $u(t) = T(t)x$ est la solution du problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{A}u, \\ u_0 = x. \end{cases}$$

Théorème 1.4.2 (Hille-Yosida). [4]

Un opérateur linéaire borné \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contractions $\{T(t), t \geq 0\}$, si et seulement si

I. \mathcal{A} est fermé de domaine dense, $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$,

II. L'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ contient \mathbb{R}^+ et pour chaque $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

1.4.2 Théorème de Lumer-Phillips

Définition 1.4.2. [4] Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $|\cdot|$ la norme associée. Un opérateur \mathcal{A} de domaine dense est dit dissipatif, si pour tout $x \in D(\mathcal{A})$, on a

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0.$$

Théorème 1.4.3. [4] Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire de domaine $D(\mathcal{A})$ dense dans un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Si \mathcal{A} est dissipatif et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, alors, \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contractions sur \mathcal{H} .

Comme corollaire de ce théorème, on a le résultat suivant :

Théorème 1.4.4. [4] Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire de domaine $D(\mathcal{A})$ dense dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Si \mathcal{A} est dissipatif et $0 \in \rho(\mathcal{A})$, \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contractions sur \mathcal{H} .

Preuve. Par l'hypothèse $0 \in \rho(\mathcal{A})$, \mathcal{A} est inversible et \mathcal{A}^{-1} est un opérateur linéaire et borné. Par le théorème 1.3.3, de l'application contractile, il est facile de voir que l'opérateur $I\lambda - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ est inversible pour $0 < \lambda < \|\mathcal{A}^{-1}\|$. Par conséquent, D'après le théorème de Lumer-Phillips on obtient : \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe des contractions sur \mathcal{H} . Ainsi la preuve est terminée. \square

1.5 Stabilité exponentielle

Définition 1.5.1. [2] Un semigroupe $T(t)$ est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives α et $M \geq 0$ telle que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.5.1. (Gearhart) [4]

Soit $S(t) = e^{At}$ un C_0 -semigroupe de contractions dans un espace de Hilbert. $S(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si :

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

et

$$\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty.$$

Théorème 1.5.2. Soient I un interval borné de \mathbb{R} et $m > j$, alors, l'injection de $H^m(I)$ dans $H^j(I)$ est compacte.

Chapitre 2

Stabilité exponentielle d'une barre thermoélastique avec élasticité non-simple

Dans ce chapitre, nous allons montrer la stabilité exponentielle d'un système en non-simples-thermoélasticité.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} - \alpha u_{xxxx} + \beta \theta_x & \text{dans } (0, \infty) \times (0, L), \\ c \theta_t = \kappa \theta_{xx} + \beta u_{xt} & \text{dans } (0, \infty) \times (0, L), \end{cases} \quad (2.1)$$

où u est le déplacement transversal, θ la différence de température et $\rho, \mu, \alpha, \beta, c, \kappa$ sont des constantes constitutives positives.

Ce système modélise les variations produites sur le déplacement transversal u et la différence de température θ d'un corps élastique non-simple. Notons que la seconde équation est obtenue à l'aide de la loi de Fourier $q + \kappa \theta_x = 0$, où q est le flux de la chaleur et θ est la différence de température. On suppose que u, θ satisfont les conditions initiales et les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), \theta(0, x) = \theta_0(x) & x \in (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, L) = \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, L) = 0 & \text{dans } (0, \infty), \end{cases} \quad (2.2)$$

ou

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x), \theta(0, x) = \theta_0(x) & x \in (0, L), \\ u(t, 0) = u(t, L) = u_x(t, 0) = u_x(t, L) = \theta_x(t, 0) = \theta_x(t, L) = 0 & \text{dans } (0, \infty). \end{cases} \quad (2.3)$$

On considère selon le cas soit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_1 := (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times L^2(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

soit

$$\mathcal{H}_2 := H_0^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

tel que

$$L_*^2(0, L) := \left\{ \varphi \in L^2(0, L); \int_0^L \varphi dx = 0 \right\}.$$

On munit l'espace \mathcal{H} du produit scalaire

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\rho v \bar{v}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + \alpha u_{xx} \bar{u}_{xx}^* + c \theta \bar{\theta}^* \right] dx,$$

où $U = (u, v, \theta)^T$, $U^* = (u^*, v^*, \theta^*)^T \in \mathcal{H}$.

Remarque 2.0.1. *En multipliant (2.1)₁ par u_t et (2.1)₂ par θ dans L^2 puis on additionne, et on intègre par partie on obtient :*

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L u_{tt} \bar{u}_t dx + \mu \int_0^L u_x \bar{u}_{xt} dx + \alpha \int_0^L u_{xx} \bar{u}_{xxt} dx + c \int_0^L \theta_t \bar{\theta} dx \\ & = \beta \int_0^L \theta_x \bar{u}_t dx - \beta \int_0^L u_t \bar{\theta}_x dx - \kappa \int_0^L \theta_x \bar{\theta}_x dx, \end{aligned}$$

cela implique

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho |u_t|^2 + \mu |u_x|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 + c |\theta|^2] dx = -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u}_t dx - \beta \int_0^L u_t \bar{\theta}_x dx,$$

alors, l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |u_t|^2 + \mu |u_x|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 + c |\theta|^2] dx,$$

satisfait l'estimation,

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u}_t dx - \beta \int_0^L u_t \bar{\theta}_x dx.$$

2.1 Existence et unicité

Pour écrire notre problème dans le cadre de la théorie de semigroupe en introduit le nouveau variable $v = u_t$ alors, le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = \frac{1}{\rho} (\mu u_{xx} - \alpha u_{xxxx} + \beta \theta_x), \\ \theta_t = \frac{1}{c} (\kappa \theta_{xx} + \beta v_x), \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où $U = (u, v, \theta)$ et \mathcal{A} est l'opérateur différentiel donné par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_{xx} - \frac{\alpha}{\rho} \partial_{xxxx} & 0 & \frac{\beta}{\rho} \partial_x \\ 0 & \frac{\beta}{c} \partial_x & \frac{\kappa}{c} \partial_{xx} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où I est l'opérateur identité.

Le domaine de \mathcal{A} dans \mathcal{H}_1 est

$$D_1(\mathcal{A}) = (H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_*^2(0, L),$$

et dans \mathcal{H}_2 est

$$D_2(\mathcal{A}) = (H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)) \times H_0^2(0, L) \times H_*^2(0, L),$$

où

$$H_*^2(0, L) := \left\{ \varphi \in H^2(0, L); \int_0^L \varphi dx = 0 \right\}.$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du système (2.1) on applique le théorème de Lumer-Phillips, on va montrer alors, que \mathcal{A} est

1) dissipatif

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \mu \int_0^L u_{xx} \bar{v} dx - \alpha \int_0^L u_{xxxx} \bar{v} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{v} dx + \mu \int_0^L v_x \bar{u}_x dx \\ &+ \alpha \int_0^L v_{xx} \bar{u}_{xx} dx + \beta \int_0^L v_x \bar{\theta} dx + \kappa \int_0^L \theta_{xx} \bar{\theta} dx, \end{aligned}$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu \int_0^L u_x \bar{v}_x dx - \alpha \int_0^L u_{xx} \bar{v}_{xx} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{v} dx + \mu \int_0^L v_x \bar{u}_x dx \\ &\quad + \alpha \int_0^L v_{xx} \bar{u}_{xx} dx - \beta \int_0^L v \bar{\theta}_x dx - \kappa \int_0^L \theta_x \bar{\theta}_x dx,\end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = i2 \operatorname{Im} (\mu \langle u_x, \bar{v}_x \rangle + \alpha \langle u_{xx}, \bar{v}_{xx} \rangle + \beta \langle \theta_x, v \rangle) - \kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx,$$

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq 0.$$

Donc \mathcal{A} est dissipatif.

Pour simplifier les notations, tout ce qui suit C désigne une constante générique positive.

2) \mathcal{A} est maximal.

Montrons tout d'abord que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

On prend $F = (f, h, q)^T \in \mathcal{H}$, et on cherche $U = (u, v, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$, ceci s'écrit en termes de composantes

$$\begin{cases} v = f, \\ \mu u_{xx} - \alpha u_{xxxx} + \beta \theta_x = \rho h, \\ \kappa \theta_{xx} + \beta v_x = cq, \end{cases} \quad (2.5)$$

d'après (2.5)₁

$$v = f \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \text{ (resp } v = f \in H_0^2(0, L)).$$

En substituant la valeur de v de (2.5)₁ dans (2.5)₃ on arrive à

$$\theta_{xx} = \frac{1}{\kappa} \left[-\beta f_x + cq \right] \in L^2(0, L).$$

La théorie classique des équations elliptiques, entraîne l'existence d'une solution

$$\theta \in H^2(0, L).$$

L'équation (2.5)₂ s'écrit alors,

$$-\mu u_{xx} + \alpha u_{xxxx} = \varphi, \quad (2.6)$$

avec

$$\varphi = \beta\theta_x - \rho h \in L^2(0, L).$$

Pour prouver que l'équation (2.6) admet une solution unique dans $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ (resp $(H_0^2(0, L))$) on applique le théorème de Lax-Milgram.

On définit l'espace $W_1 = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, (resp $(W_2 = H_0^2(0, L))$), et on prend le produit scalaire de la dernière équation dans $L^2(0, L)$ par une fonction $u^* \in C_0^\infty(0, L)$, on obtient :

$$-\mu \int_0^L u_{xx} \bar{u}^* dx + \alpha \int_0^L u_{xxxx} \bar{u}^* dx = \int_0^L \varphi \bar{u}^* dx \quad \forall u^* \in L^2(0, L),$$

ce qui implique que

$$\mu \int_0^L u_x \bar{u}_x^* dx + \alpha \int_0^L u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx = \int_0^L \varphi \bar{u}^* dx \quad u^* \in L^2(0, L).$$

Pour (u, u^*) on définit une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et une forme linéaire $L(\cdot)$ par

$$a(u, u^*) = \mu \int_0^L u_x \bar{u}_x^* dx + \alpha \int_0^L u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx.$$

$$L(u^*) = \int_0^L \varphi \bar{u}^* dx.$$

On montre que $a(\cdot, \cdot)$ est continue, coercive et $L(\cdot)$ est continue :

1) Continuité de $a(\cdot, \cdot)$: en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned} |a(u, u^*)| &\leq \mu \|u_x\|_{L^2} \|u_x^*\|_{L^2} + \alpha \|u_{xx}\|_{L^2} \|u_{xx}^*\|_{L^2}, \\ &\leq \max(\mu, \alpha) (\|u_x\|_{L^2} \|u_x^*\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2} \|u_{xx}^*\|_{L^2}), \\ &\leq C (\|u_x\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2}) (\|u_x^*\|_{L^2} + \|u_{xx}^*\|_{L^2}), \\ &\leq C \|u\|_{W_i} \|u^*\|_{W_i}. \end{aligned}$$

où $i = 1; 2$. Donc $a(\cdot, \cdot)$ est continue.

2) Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \mu \int_0^L u_x \bar{u}_x dx + \alpha \int_0^L u_{xx} \bar{u}_{xx} dx, \\
&= \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |u_{xx}|^2 dx, \\
&\geq \min(\mu, \alpha) (\|u_x\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}\|_{L^2}^2), \\
&\geq C_0 \|u\|_{W_i}^2,
\end{aligned}$$

où $i = 1; 2$.

Donc $a(\cdot, \cdot)$ est coercive.

$a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire, continue et coercive sur W_i ($i=1$ ou 2) et $L(\cdot)$ est linéaire et continue sur W_i . On conclut qu'il existe une solution unique $u^* \in W_1 = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ resp ($u^* \in W_2 = H_0^2(0, L)$), de plus on a

$$\int_0^L \alpha u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx = \int_0^L (\varphi + \mu u_{xx}) \bar{u}^* dx,$$

ce qui signifie que

$$u_{xx} \in H^2(0, L),$$

donc

$$u \in H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L), \quad (\text{resp } u \in H^4(0, L) \cap H_0^2(0, L)).$$

On a donc $(u, v, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, d'où $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

En utilisant le théorème 1.4.4, du premier chapitre on constate que \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contractions, donc en utilisant la théorème 1.4.1, l'équation $U_t = \mathcal{A}U$ admet une solution unique, ce qui termine la démonstration.

2.2 Stabilité exponentielle

Théorème 2.2.1. *Pour tout $(u_0, v_0, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$, il existe deux constantes positives γ et w telles que, l'énergie associée à la solution (u, v, θ) satisfait*

$$E(t) \leq \gamma e^{-wt} \quad \forall t \geq 0.$$

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide du théorème de Gearhart-Prüss, donc on doit montrer les deux lemmes suivant

Lemme 2.2.1. Soit \mathcal{A} l'opérateur défini en (2.4), alors,

$$i\mathbb{R} = \{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Preuve. Montrons tout d'abord \mathcal{A}^{-1} est compact.

Soit (F_n) est une suite bornée dans \mathcal{H}_i ($i=1$ ou 2) et (U_n) une suite dans $D(\mathcal{A})$ telle que :
 $F_n = \mathcal{A}U_n$ et $U_n = (u_n, v_n, \theta_n)$.

On sait que : $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq C_1$.

Puisque (F_n) est bornée on a

$$\|F_n\| \leq C_2,$$

alors,

$$\|U_n\| = \|\mathcal{A}^{-1}F_n\| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|\|F_n\| \leq C_1C_2,$$

donc $U_n = (u_n, v_n, \theta_n)$ est bornée dans $D(\mathcal{A})$.

Sachant que l'injection de $H^m(0, L)$ dans $H^j(0, L)$ est compacte pour $m > j$ alors, il existe une sous suite $U_r = (u_r, v_r, \theta_r)$ et une fonction $U = (u, v, \theta)$ telle que :

$$(u_r, v_r, \theta_r) \xrightarrow{\mathcal{H}} (u, v, \theta)$$

alors la sous suite $U_r = \mathcal{A}^{-1}F_r$ converge dans \mathcal{H} .

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tel que : $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, d'après le théorème 1.3.2, $i\lambda$ est une valeur propre de \mathcal{A} i.e $(\mathcal{A}U = i\lambda U)$,

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0, \\ i\lambda \rho v - \mu u_{xx} + \alpha u_{xxxx} - \beta \theta_x = 0, \\ i\lambda c \theta - \beta v_x - \kappa \theta_{xx} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\langle i\lambda I - \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle i\lambda U - \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}, \\ &= i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

par conséquent on obtient :

$$Re\langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U \rangle_{\mathcal{H}} = Re(i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}) = -Re\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}},$$

Donc

$$\operatorname{Re} \langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx = 0,$$

i.e

$$\|\theta_x\|_{L^2} = 0,$$

l'inégalité de Poincaré donne

$$\|\theta\|_{L^2} = 0.$$

En substituant $\theta = 0$ dans (2.7)₃ et par intégration sur $(0, x)$ on obtient

$$-\beta v - \kappa \theta_x = 0,$$

en substituant $\theta_x = 0$ dans l'équation précédente on arrive à

$$v = 0,$$

En substituant $v = 0$ dans l'équation (2.7)₁ on arrive à

$$u = 0.$$

C'est une contradiction donc

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

□

Lemme 2.2.2. *L'opérateur \mathcal{A} défini dans (2.4) satisfait :*

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F = (f, h, q) \in \mathcal{H}$, il existe $U = (u, v, \theta)$ unique de $D(\mathcal{A})$, tel que $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, ce que s'écrit en terme des composantes,

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f, \\ i\lambda \rho v - \mu u_{xx} + \alpha u_{xxxx} - \beta \theta_x = \rho h, \\ i\lambda c \theta - \beta v_x - \kappa \theta_{xx} = cq. \end{cases} \quad (2.8)$$

On a

$$\operatorname{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}} = \kappa \int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq |\langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}$$

cela signifie que

$$\int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.9)$$

En multipliant l'équation (2.8)₂ par u dans $L^2(0, L)$, en utilisant l'intégration par partie, et en substituant la valeur de $i\lambda\bar{u}$ obtenue de (2.8)₁ on obtient

$$\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |u_{xx}|^2 dx = \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx + \rho \int_0^L |v|^2 dx + \rho \int_0^L v \bar{f} dx + \rho \int_0^L h \bar{u} dx. \quad (2.10)$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz on aura

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |u_{xx}|^2 dx &\leq \beta \|\theta_x\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \rho \|v\|_{L^2}^2 + \rho \|v\|_{L^2} \|f\|_{L^2} \\ &\quad + \rho \|h\|_{L^2} \|u\|_{L^2}, \\ &\leq \beta \|\theta_x\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \rho \|v\|_{L^2}^2 + 2\rho \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

On applique l'inégalité de Young sur $\beta \|\theta_x\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$ on obtient :

$$\beta \|\theta_x\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \varepsilon \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon} \|\theta_x\|_{L^2}^2. \quad (2.12)$$

On applique l'inégalité de Poincaré sur $\|u\|_{L^2}^2$ et en substituant (2.9) dans (2.12) on arrive a

$$\beta \|\theta_x\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \varepsilon C \|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon} C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.13)$$

En substituant (2.13) dans (2.11) on arrive a

$$\mu \int_0^L |u_x|^2 dx - \varepsilon C \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |u_{xx}|^2 dx \leq \frac{\beta^2}{4\varepsilon} C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \rho \|v\|_{L^2}^2 + 2\rho \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

On prend $\varepsilon = \frac{\mu}{2C}$ on obtient

$$\frac{\mu}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |u_{xx}|^2 dx \leq \rho \|v\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.14)$$

La prochaine étape consiste à estimer $\|v\|_{L^2}$ on définit le fonction ϕ , w , z et y comme solutions des problèmes suivants

$$\begin{aligned} -\phi_{xx} &= v & \text{dans } [0, L] & \text{avec } \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \\ -w_{xx} &= \theta & \text{dans } [0, L] & \text{avec } w_x(0) = w_x(L) = 0, \\ -z_{xx} &= q & \text{dans } [0, L] & \text{avec } z(0) = z(L) = 0, \\ -y_{xx} &= g & \text{dans } [0, L] & \text{avec } y(0) = y(L) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En multipliant l'équation de système (2.15)₃ par z dans $L^2(0, L)$, on obtient

$$\int_0^L -z_{xx}\bar{z}dx = \int_0^L q\bar{z}dx.$$

En utilisant l'intégration par partie, on trouve

$$\|z_x\|_{L^2}^2 = \int_0^L q\bar{z}dx.$$

On applique les inégalités de Cauchy-Schwartz et Poincaré, on trouve

$$\|z_x\|_{L^2} \leq C_p \|q\|_{L^2}. \quad (2.16)$$

De la même manière on trouve

$$\|y_x\|_{L^2} \leq C_p \|h\|_{L^2}. \quad (2.17)$$

En multipliant l'équation du système (2.8)₃ par ϕ_x dans $L^2(0, L)$ on obtient

$$i\lambda c \langle \theta, \phi_x \rangle_{L^2} - \kappa \langle \theta_{xx}, \phi_x \rangle_{L^2} - \beta \langle v_x, \phi_x \rangle_{L^2} = c \langle q, \phi_x \rangle_{L^2}. \quad (2.18)$$

Maintenant, nous estimons terme par terme

$$\begin{aligned} I_1 &= i\lambda c \langle \theta, \phi_x \rangle_{L^2} = -i\lambda c \langle w_{xx}, \phi_x \rangle_{L^2}, \\ &= i\lambda c \langle w_x, \phi_{xx} \rangle_{L^2}, \\ &= c \langle w_x, i\lambda v \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

On remplace la valeur de $-i\lambda v$ obtenue de (2.8)₂ on obtient

$$I_1 = \frac{c\mu}{\rho} \langle w_x, u_{xx} \rangle_{L^2} - \frac{c\alpha}{\rho} \langle w_x, u_{xxxx} \rangle_{L^2} + \frac{c\beta}{\rho} \langle w_x, \theta_x \rangle_{L^2} + c \langle w_x, h \rangle_{L^2},$$

une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{c\mu}{\rho} \langle w_{xx}, u_x \rangle_{L^2} + \frac{c\alpha}{\rho} \langle w_{xx}, u_{xxx} \rangle_{L^2} - \frac{c\beta}{\rho} \langle w_{xx}, \theta \rangle_{L^2} - c \langle w_x, y_{xx} \rangle_{L^2}, \\ &= \frac{c\mu}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle_{L^2} - \frac{c\alpha}{\rho} \langle \theta, u_{xxx} \rangle_{L^2} + \frac{c\beta}{\rho} \langle \theta, \theta \rangle_{L^2} + c \langle w_{xx}, y_x \rangle_{L^2}, \\ &= \frac{c\mu}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle_{L^2} - \frac{c\alpha}{\rho} |\theta u_{xx}|_0^L + \frac{c\alpha}{\rho} \langle \theta_x, u_{xx} \rangle_{L^2} + \frac{c\beta}{\rho} \|\theta\|_{L^2}^2 - c \langle \theta, y_x \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant (2.15)₁, on conclut que :

$$I_2 = -\kappa \langle \theta_{xx}, \phi_x \rangle_{L^2} = \kappa \langle \theta_x, \phi_{xx} \rangle_{L^2} = -\kappa \langle \theta_x, v \rangle_{L^2}, \quad (2.20)$$

et

$$I_3 = -\beta \langle v_x, \phi_x \rangle_{L^2} = \beta \langle v, \phi_{xx} \rangle_{L^2} = -\beta \|v\|_{L^2}^2. \quad (2.21)$$

Enfin, en utilisant (2.15)₃, on obtient :

$$I_4 = c \langle q, \phi_x \rangle_{L^2} = -c \langle z_{xx}, \phi_x \rangle_{L^2} = c \langle z_x, \phi_{xx} \rangle_{L^2} = -c \langle z_x, v \rangle_{L^2}, \quad (2.22)$$

puis, en substituant les estimations (2.19) - (2.22) dans l'équation (2.18) on arrive à

$$\begin{aligned} & \frac{c\mu}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle_{L^2} - \frac{c\alpha}{\rho} |\theta u_{xx}|_0^L + \frac{c\alpha}{\rho} \langle \theta_x u_{xx} \rangle_{L^2} + \frac{c\beta}{\rho} \|\theta\|_{L^2}^2 \\ & - c \langle \theta, y_x \rangle_{L^2} - \kappa \langle \theta_x, v \rangle_{L^2} - \beta \|v\|_{L^2}^2 = -c \langle z_x, v \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\beta \|v\|_{L^2}^2 = \frac{c\mu}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle_{L^2} - \frac{c\alpha}{\rho} |\theta u_{xx}|_0^L + \frac{c\alpha}{\rho} \langle \theta_x u_{xx} \rangle_{L^2} + \frac{c\beta}{\rho} \|\theta\|_{L^2}^2 - c \langle \theta, y_x \rangle_{L^2} - \kappa \langle \theta_x, v \rangle_{L^2} + c \langle z_x, v \rangle_{L^2}. \quad (2.23)$$

On pose

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{c\mu}{\rho} \langle \theta, u_x \rangle_{L^2}, & J_2 &= \frac{c\alpha}{\rho} \langle \theta_x, u_{xx} \rangle_{L^2}, & J_3 &= \frac{c\beta}{\rho} \|\theta\|_{L^2}^2, \\ J_4 &= -c \langle \theta, y_x \rangle_{L^2}, & J_5 &= \kappa \langle \theta_x, v \rangle_{L^2}, & J_6 &= c \langle z_x, v \rangle_{L^2}, \\ & & J_7 &= \frac{c\alpha}{\rho} |\theta u_{xx}|_0^L, \end{aligned}$$

A ce point là on va éstimer Les fonctionnelles J_1 - J_7 .

On applique les inégalités de Young et de Poincaré on obtient :

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{c\mu}{\rho} \int_0^L |\theta \bar{u}_x|_{L^2} dx, \\ &\leq \frac{\varepsilon_1 c\mu}{\rho} C_p \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{c\mu}{\rho 4\varepsilon_1} \|u_x\|_{L^2}^2, \\ &\leq \frac{\varepsilon_1 c\mu}{\rho} C_p C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{c\mu}{\rho 4\varepsilon_1} \|u_x\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On prend $\varepsilon_1 = \frac{12c}{\beta}$ on obtient :

$$|J_1| \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\mu\beta}{48\rho} \|u_x\|_{L^2}^2.$$

De la même manière,

$$|J_2| \leq \frac{\varepsilon_2 c\alpha}{\rho} C \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{c\alpha}{\rho 4\varepsilon_2} \|u_{xx}\|_{L^2}^2,$$

on prend $\varepsilon_2 = \frac{6c}{\beta}$ on obtient

$$|J_2| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\alpha\beta}{32\rho}\|u_{xx}\|_{L^2}^2,$$

et

$$|J_3| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

$$|J_4| \leq C_p\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

$$|J_5| \leq \varepsilon_3\|v\|_{L^2}^2 + \frac{\kappa^2}{4\varepsilon_3}C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

on prend $\varepsilon_3 = \frac{\beta}{2}$ on obtient

$$|J_5| \leq \frac{\beta}{2}\|v\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

$$|J_6| \leq C_p\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

$$|J_7| \leq \varepsilon_4|u_{xx}(0)|^2 + \varepsilon_4|u_{xx}(L)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}C_pC\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

En fin, on substitue ces estimations dans l'expression (2.23), et on multiplie par $\frac{6}{\beta}$ on arrive à

$$3\|v\|_{L^2}^2 \leq C_\varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\mu}{8\rho}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{4\rho}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + \varepsilon_4|u_{xx}(0)|^2 + \varepsilon_4|u_{xx}(L)|^2. \quad (2.24)$$

Considérons tout d'abord le cas des conditions (2.2), alors,

$$\varepsilon_4|u_{xx}(0)|^2 + \varepsilon_4|u_{xx}(L)|^2 = 0,$$

en multipliant (2.24) par ρ , et (2.9) par c et on utilise l'inégalité de Poincaré, puis on additionne ces deux inégalités avec (2.14) on obtient

$$\frac{3}{8}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\|\theta\|_{L^2} + 2\rho\|v\|_{L^2}^2 + \frac{3\mu}{8}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{3\alpha}{4}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Dans le cas des conditions (2.3) on a

$$\varepsilon_4 |u_{xx}(0)|^2 + \varepsilon_4 |u_{xx}(L)|^2 \neq 0,$$

Pour éliminer ce terme on procède comme suit

on définit la fonction

$$q(x) = -\frac{2}{L}x + 1, \quad \forall x \in [0, L]. \quad (2.25)$$

En multipliant l'équation (2.8)₂ par $q(x)u_x$ dans $L^2(0, L)$ on obtient

$$i\lambda\rho\langle v, qu_x \rangle_{L^2} - \mu\langle u_{xx}, qu_x \rangle_{L^2} + \alpha\langle u_{xxxx}, qu_x \rangle_{L^2} - \beta\langle \theta_x, qu_x \rangle_{L^2} = \rho\langle h, qu_x \rangle_{L^2}. \quad (2.26)$$

On pose

$$K_1 = i\lambda\rho\langle v, qu_x \rangle_{L^2}, \quad K_2 = -\mu\langle u_{xx}, qu_x \rangle_{L^2}, \quad K_3 = \alpha\langle u_{xxxx}, qu_x \rangle_{L^2}.$$

On va calculer les parties réelles de ces fonctionnelles

1. On remplace la valeur de $i\lambda u_x$ obtenue de (2.8)₁ on obtient

$$\operatorname{Re} K_1 = -\rho \operatorname{Re}\langle v, qv_x \rangle_{L^2} - \rho \operatorname{Re}\langle v, qf_x \rangle_{L^2},$$

on calcule $-\rho \operatorname{Re}\langle v, qv_x \rangle_{L^2}$ par une intégration par partie

$$\begin{aligned} -\rho\langle v, qv_x \rangle_{L^2} &= \rho\langle (qv)_x, v \rangle_{L^2}, \\ &= \rho\langle q_x v, v \rangle_{L^2} + \rho\langle qv_x, v \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$-\rho[\langle v, qv_x \rangle_{L^2} + \overline{\langle v, qv_x \rangle_{L^2}}] = \rho\langle q_x v, v \rangle_{L^2},$$

en utilisant la définition de $q(x)$, on obtient

$$-\rho \operatorname{Re}\langle v, qv_x \rangle_{L^2} = -\frac{\rho}{L} \|v\|_{L^2}^2,$$

alors,

$$\operatorname{Re}(K_1) = -\frac{\rho}{L} \|v\|_{L^2}^2 - \rho \operatorname{Re}\langle v, qf_x \rangle_{L^2}. \quad (2.27)$$

2. Calcul de K_2 : En utilisant l'intégration par partie on obtient

$$K_2 = \mu \langle u_x, q_x u_x \rangle_{L^2} + \mu \langle u_x, q u_{xx} \rangle_{L^2},$$

l'utilisation la définition de $q(x)$, conduit à

$$\begin{aligned} -\mu \langle q u_x, u_{xx} \rangle_{L^2} - \mu \overline{\langle q u_x, u_{xx} \rangle_{L^2}} &= -\mu \frac{2}{L} \langle u_x, u_x \rangle_{L^2}, \\ -\mu \operatorname{Re} \langle q u_x, u_{xx} \rangle_{L^2} &= -\frac{\mu}{L} \|u_x\|_{L^2}^2, \\ \operatorname{Re}(K_2) &= -\frac{\mu}{L} \|u_x\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

3. Calcul de K_3 :

$$K_3 = -\alpha \langle u_{xxx}, q_x u_x \rangle_{L^2} - \alpha \langle u_{xxx}, q u_{xx} \rangle_{L^2},$$

alors,

$$\operatorname{Re} K_3 = -\alpha \operatorname{Re} \langle u_{xxx}, q_x u_x \rangle_{L^2} - \alpha \operatorname{Re} \langle u_{xxx}, q u_{xx} \rangle_{L^2}, \quad (2.29)$$

et on aura

$$-\alpha \langle u_{xxx}, q_x u_x \rangle_{L^2} = -\alpha |q_x u_x u_{xx}|_0^L + \alpha \langle u_{xx}, q_x u_{xx} \rangle_{L^2} + \alpha \langle u_{xx}, q_{xx} u_x \rangle_{L^2}.$$

En utilisant la définition de $q(x)$, on obtient :

$$-\alpha \operatorname{Re} \langle u_{xxx}, q_x u_x \rangle_{L^2} = -\frac{2\alpha}{L} \|u_{xx}\|_{L^2}^2. \quad (2.30)$$

En utilisant l'intégration par partie, pour calculer $-\alpha \operatorname{Re} \langle u_{xxx}, q u_{xx} \rangle_{L^2}$ on obtient

$$-\alpha \langle u_{xxx}, q u_{xx} \rangle_{L^2} - \alpha \langle u_{xx}, q u_{xxx} \rangle_{L^2} = -|\alpha q |u_{xx}|^2|_0^L + \alpha \langle u_{xx}, q_x u_{xx} \rangle_{L^2}.$$

En utilisant la définition de $q(x)$, on obtient :

$$-\alpha \operatorname{Re} \langle u_{xxx}, q u_{xx} \rangle_{L^2} = \frac{\alpha}{2} |u_{xx}(L)|^2 + \frac{\alpha}{2} |u_{xx}(0)|^2 - \frac{\alpha}{L} \|u_{xx}\|_{L^2}^2, \quad (2.31)$$

En substituant (2.30) et (2.31) dans (2.29) on trouve

$$\operatorname{Re} K_3 = \frac{\alpha}{2} |u_{xx}(L)|^2 + \frac{\alpha}{2} |u_{xx}(0)|^2 - \frac{3\alpha}{L} \|u_{xx}\|_{L^2}^2. \quad (2.32)$$

En substituant l'équation (2.27), (2.28) et (2.32) dans (2.26) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}|u_{xx}(L)|^2 + \frac{\alpha}{2}|u_{xx}(0)|^2 &= \frac{\rho}{L}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{\mu}{L}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{3\alpha}{L}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + \rho \operatorname{Re}\langle v, qf_x \rangle_{L^2} \\ &\quad + \beta \operatorname{Re}\langle \theta_x, qu_x \rangle_{L^2} + \rho \operatorname{Re}\langle h, qu_x \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy Schwartz, puis Yuong on obtient

$$\begin{aligned} |u_{xx}(L)|^2 + |u_{xx}(0)|^2 &\leq \frac{2\rho}{\alpha L}\|v\|_{L^2}^2 + \frac{2\mu}{\alpha L}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\alpha L}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + \frac{2\rho}{\alpha}\|v\|_{L^2}\|q\|_{L^2}\|f_x\|_{L^2} \\ &\quad + \frac{2\beta}{\alpha}\|\theta_x\|_{L^2}\|q\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2} + \frac{2\rho}{\alpha}\|h\|_{L^2}\|q\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_{xx}(L)|^2 + |u_{xx}(0)|^2 &\leq \frac{2\rho}{\alpha L}\|v\|_{L^2}^2 + \frac{2\mu}{\alpha L}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\alpha L}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{2\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{4}\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|q\|_{L^2}^2\|u_x\|_{L^2}^2 \right), \end{aligned}$$

Nous avons $\|q\|_{L^2}^2 = \frac{L}{3}$, alors,

$$|u_{xx}(L)|^2 + |u_{xx}(0)|^2 \leq \frac{2\rho}{\alpha L}\|v\|_{L^2}^2 + \left(\frac{2\mu}{\alpha L} + \frac{2\beta}{3\alpha L} \right) \|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{6}{\alpha L}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

donc

$$|u_{xx}(L)|^2 + |u_{xx}(0)|^2 \leq C_1 (\|v\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}\|_{L^2}^2) + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.33)$$

en substituant (2.33) dans (2.24) on obtient

$$3\|v\|_{L^2}^2 \leq C_1 \varepsilon_4 \|v\|_{L^2}^2 + \left(C_1 \varepsilon_4 + \frac{\mu}{8\rho} \right) \|u_x\|_{L^2}^2 + \left(C_1 \varepsilon_4 + \frac{\alpha}{4\rho} \right) \|u_{xx}\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

on prend $\varepsilon_4 = \min \left\{ \frac{1}{C_1}, \frac{\mu}{8\rho C_1}, \frac{\alpha}{4\rho C_1} \right\}$ on obtient

$$2\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{\mu}{4\rho}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2\rho}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.34)$$

Les mêmes démarches que dans le cas des conditions (2.2) on obtient

$$\frac{1}{4}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\|\theta\|_{L^2}^2 + \rho\|v\|_{L^2}^2 + \frac{\mu}{4}\|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_{xx}\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Alors, il existe $M > 0$ tel que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

d'où $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\| \leq M\|F\|$ est par suite

$$\frac{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\|}{\|F\|} \leq M$$

et

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M,$$

ce qui termine la démonstration. □

Chapitre 3

Stabilité exponentielle d'un système en non-simple thermoélasticité de type III

Dans le chapitre précédent l'équation de la chaleur est construite à partir de la loi de Fourier

$$q + \kappa \theta_x = 0,$$

et l'équation constitutive

$$\theta_t + \gamma \operatorname{div} q + \delta \operatorname{div} u_t = 0.$$

Cette équation signifie qu'un changement de température en un point a un effet spontanément à un point à l'infini ce qui est physiquement faux. Pour corriger ce fait plusieurs propositions sont faites, parmi eux on note la th'eorie de Green et Naghdi qui ont proposé d'introduire une nouvelle variable appelée déplacement thermique et de remplacer l'inégalité de l'entropie par une égalité, deux nouveaux type de thermoélasticité ont apparus qui sont appelés Thermoélasticité de type II et de type III. Dans ce chapitre on va étudier la stabilité d'un système en thermoélasticité non simple avec thermoélasticité de type III.

3.1 Cas régulier

Considérons tout d'abord le système suivant

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta \alpha_{tx} - \delta \alpha_{xxx}, & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \pi) \\ a \alpha_{tt} = \kappa \alpha_{xx} + m \alpha_{txx} + \beta u_{tx} + \delta u_{xxx} & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \pi) \end{cases} \quad (3.1)$$

où u, α sont respectivement, le déplacement transversal et le déplacement thermique qui est définie par

$$\alpha(\cdot, t) = \alpha(\cdot, 0) + \int_0^t \theta(\cdot, s) ds,$$

où θ est la différence de température et ρ, μ, γ, a, m sont des constantes constitutives positives et $\gamma\kappa > \delta^2$. Ces constantes ont des significations physique bien déterminées. On suppose de plus que u, α satisfont les conditions initiales et les conditions aux bords suivantes

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \alpha(x, 0) = \alpha_0(x), \alpha_t(x, 0) = \alpha_1(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = \alpha_x(0, t) = \alpha_x(\pi, t) = 0 & \text{dans } (0, \infty). \end{cases} \quad (3.2)$$

L'espace d'énergie associé à ce système est l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := (H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)) \times L^2(0, \pi) \times H_*^1(0, \pi) \times L_*^2(0, \pi),$$

où

$$H_*^m(0, \pi) := \left\{ \varphi \in H^m(0, \pi); \int_0^\pi \varphi dx = 0 \right\}, m = 0, 1 \text{ et } H^0 = L^2.$$

On munit \mathcal{H} du produit scalaire

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \left[\rho v \bar{v}^* + a \theta \bar{\theta}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + \gamma u_{xx} \bar{u}_{xx}^* + \kappa \alpha_x \bar{\alpha}_x^* + \delta \alpha_x \bar{u}_{xx}^* + \delta u_{xx} \bar{\alpha}_x^* \right] dx,$$

où $U = (u, v, \alpha, \theta)^T$, $U^* = (u^*, v^*, \alpha^*, \theta^*)^T \in \mathcal{H}$.

Remarque 3.1.1. En multipliant (3.1)₁ par u_t et (3.1)₂ par α_t dans L^2 puis on additionne, et on intègre par partie on obtient

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^\pi u_{tt} \bar{u}_t dx + \mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_{xt} dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xxt} dx + \delta \int_0^\pi \alpha_x \bar{u}_{xxt} dx + a \int_0^\pi \alpha_{tt} \bar{\alpha}_t dx \\ & + \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_{xt} dx + \delta \int_0^\pi u_{xx} \bar{\alpha}_{xt} dx = -m \int_0^\pi \alpha_{xt} \bar{\alpha}_{xt} dx - \beta \int_0^\pi \alpha_t \bar{u}_{xt} dx + \beta \int_0^\pi u_{xt} \bar{\alpha}_t dx, \end{aligned}$$

cela implique

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi [\rho |u_t|^2 + a |\alpha_t|^2 + \mu |u_x|^2 + \gamma |u_{xx}|^2 + \kappa |\alpha_x|^2 + 2\delta \alpha_x u_{xx}] dx &= -m \int_0^\pi \alpha_{xt} \bar{\alpha}_{xt} dx \\ & - \beta \int_0^\pi \alpha_t \bar{u}_{xt} dx + \beta \int_0^\pi u_{xt} \bar{\alpha}_t dx, \end{aligned}$$

alors, l'énergie

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^\pi [\rho |u_t|^2 + a |\alpha_t|^2 + \mu |u_x|^2 + \gamma |u_{xx}|^2 + \kappa |\alpha_x|^2 + 2\delta \alpha_x u_{xx}] dx,$$

satisfait l'estimation,

$$\frac{dE}{dt}(t) := -m \int_0^\pi |\alpha_{xt}|^2 dx - \beta \int_0^\pi \alpha_t \bar{u}_{xt} dx + \beta \int_0^\pi u_{xt} \bar{\alpha}_t dx.$$

3.1.1 Existence et unicité

Pour écrire notre problème dans le cadre de la théorie des semigroupes on introduit les nouveaux variables $v = u_t$ et $\theta = \alpha_t$, alors, le système (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = \frac{1}{\rho} (\mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta \theta_x - \delta \alpha_{xxx}), \\ \alpha_t = \theta, \\ \theta_t = \frac{1}{a} (\kappa \alpha_{xx} + m \theta_{xx} + \beta v_x + \delta u_{xxx}), \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où $U = (u, v, \alpha, \theta)$ et \mathcal{A} est l'opérateur différentiel donné par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} D^2 - \frac{\gamma}{\rho} D^4 & 0 & -\frac{\delta}{\rho} D^3 & \frac{\beta}{\rho} D \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{\delta}{a} D^3 & \frac{\beta}{a} D & \frac{\kappa}{a} D^2 & \frac{m}{a} D^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

et I est l'opérateur identité.

Le domaine de \mathcal{A} est

$$D(\mathcal{A}) := \{U \in \mathcal{H} : u \in H^3(0, \pi), v \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi), \alpha \in H^2(0, \pi), \theta \in H_*^1(0, \pi), \\ \gamma u_x + \delta \alpha \in H^3(0, \pi), \kappa \alpha + \delta u_x \in H^2(0, \pi)\}.$$

Pour établir l'existence et l'unicité d'une solution au système (3.1) on applique le théorème de Lumer-Phillips, il suffit donc de vérifier que $D(\mathcal{A})$ est dense et que \mathcal{A} est dissipatif et maximal.

1) \mathcal{A} est dissipatif

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \mu \int_0^\pi u_{xx} \bar{v} dx - \gamma \int_0^\pi u_{xxxx} \bar{v} dx + \beta \int_0^\pi \theta_x \bar{v} dx - \delta \int_0^\pi \alpha_{xxx} \bar{v} dx + \kappa \int_0^\pi \alpha_{xx} \bar{\theta} dx \\ &+ m \int_0^\pi \theta_{xx} \bar{\theta} dx + \beta \int_0^\pi v_x \bar{\theta} dx + \delta \int_0^\pi u_{xxx} \bar{\theta} dx + \mu \int_0^\pi v_x \bar{u}_x dx + \gamma \int_0^\pi v_{xx} \bar{u}_{xx} dx \\ &+ \kappa \int_0^\pi \theta_x \bar{\alpha}_x dx + \delta \int_0^\pi \theta_x \bar{u}_{xx} dx + \delta \int_0^\pi v_{xx} \bar{\alpha}_x dx,\end{aligned}$$

une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu \int_0^\pi u_x \bar{v}_x dx - \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{v}_{xx} dx + \beta \int_0^\pi \theta_x \bar{v} dx + \delta \int_0^\pi \alpha_{xx} \bar{v}_x dx - \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\theta}_x dx \\ &- m \int_0^\pi \theta_x \bar{\theta}_x dx - \beta \int_0^\pi v \bar{\theta}_x dx - \delta \int_0^\pi u_{xx} \bar{\theta}_x dx + \mu \int_0^\pi v_x \bar{u}_x dx + \gamma \int_0^\pi v_{xx} \bar{u}_{xx} dx \\ &+ \kappa \int_0^\pi \theta_x \bar{\alpha}_x dx + \delta \int_0^\pi \theta_x \bar{u}_{xx} dx - \delta \int_0^\pi v_x \bar{\alpha}_{xx} dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= 2i \operatorname{Im} (\mu \langle u_x, v_x \rangle_{L^2} + \gamma \langle u_{xx}, v_{xx} \rangle_{L^2} + \delta \langle \alpha_{xx}, v_x \rangle_{L^2} + \beta \langle \theta_x, v \rangle_{L^2} \\ &+ \kappa \langle \alpha_x, \theta_x \rangle_{L^2} + \delta \langle \theta_x, u_{xx} \rangle_{L^2}) - m \int_0^\pi |\theta_x|^2 dx,\end{aligned}$$

et par suite

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -m \int_0^\pi |\theta_x|^2 dx \leq 0,$$

donc \mathcal{A} est dissipatif.

2) \mathcal{A} est maximal.

Montrons tout d'abord que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$, et cherchons $U = (u, v, \alpha, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$, ceci s'écrit en termes de composantes

$$\begin{cases} v = f_1, \\ \mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta \theta_x - \delta \alpha_{xxx} = \rho f_2, \\ \theta = f_3, \\ \kappa \alpha_{xx} + m \theta_{xx} + \beta v_x + \delta u_{xxx} = a f_4, \end{cases} \quad (3.4)$$

d'après (3.4)₁ et (3.4)₃ on a

$$v = f_1 \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi), \quad \theta = f_3 \in H_*^1(0, \pi).$$

En substituant les valeurs de v et θ dans (3.4)₂ et (3.4)₄ on arrive a

$$\begin{cases} \mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} - \delta \alpha_{xxx} = \rho f_2 - \beta f_{3x}, \\ \kappa \alpha_{xx} + \delta u_{xxx} = a f_4 - m f_{3xx} - \beta f_{1x}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Rappelons que L^2 est séparable et que $\{\sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos(nx), n \in \mathbb{N}\}$ sont des bases orthonormales et complètes pour L^2 , donc en développant $f_i, i \in \{1, \dots, 4\}$, u et α en séries comme suit

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), & f_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \\ f_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx), & f_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(nx), \\ u &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx), & \alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx), \end{aligned}$$

et en utilisant les conditions sur $f_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |a_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty.$$

La substitution dans (3.5) donne

$$\begin{cases} -n^2 (\mu + \delta n^2) u_n - \delta n^3 \alpha_n = \rho b_n + \beta n c_n, \\ -\delta n^3 u_n - \kappa n^2 \alpha_n = a d_n + m n^2 c_n - \beta n a_n, \end{cases}$$

donc

$$u_n = \frac{-a_n n^2 \beta \delta - b_n \kappa \rho + c_n (n^3 \delta - n \beta \kappa) + d_n n a \delta}{n^4 (\gamma \kappa - \delta^2) + \kappa \mu n^2},$$

et

$$\alpha_n = \frac{a_n n (\mu + \delta n^2) \beta + b_n n \delta \rho - c_n n^2 (m (\mu + \delta n^2) - \beta \delta) - d_n (\mu + \delta n^2) a}{n^4 (\gamma \kappa - \delta^2) + \kappa \mu n^2}.$$

En multipliant l'équation (3.5)₁ par une fonction $u^* \in C_0^\infty$ et l'équation (3.5)₂ par $\alpha^* \in C_0^\infty$ dans $L^2[0, \pi]$, on obtient

$$\begin{cases} \gamma \int_0^\pi u_{xxxx} \bar{u}^* dx + \delta \int_0^\pi \alpha_{xxx} \bar{u}^* dx = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx, \\ \kappa \int_0^\pi \alpha_{xx} \bar{\alpha}^* dx + \delta \int_0^\pi u_{xxx} \bar{\alpha}^* dx = \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx, \end{cases}$$

où

$$\varphi_1 = \mu u_{xx} - \rho f_2 + \beta f_{3x} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = a f_4 - m f_{3xx} - \beta f_{1x},$$

une intégration par partie donne

$$\begin{cases} \int_0^\pi (\gamma u_{xx} + \delta \alpha_x) \bar{u}_{xx}^* dx = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx, \\ \int_0^\pi (\kappa \alpha + \delta u_x) \bar{\alpha}_{xx}^* dx = \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx, \end{cases}$$

ce qui signifie que

$$\begin{cases} \gamma u_{xx} + \delta \alpha_x \in H^2(0, \pi), \\ \kappa \alpha + \delta u_x \in H^2(0, \pi), \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \gamma u_x + \delta \alpha \in H^3(0, \pi), \\ \kappa \alpha + \delta u_x \in H^2(0, \pi). \end{cases} \quad (3.6)$$

En multipliant l'équation (3.6)₁ par δ et l'équation (3.6)₂ par γ puis on soustraire, on obtient

$$\alpha \in H^2(0, \pi).$$

De la même manière on trouve

$$u \in H^3(0, \pi).$$

On a donc $(u, v, \alpha, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, donc $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

En utilisant le théorème 1.4.4, du premier chapitre on constate que \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction, donc en utilisant la théorème 1.4.1, l'équation $U_t = \mathcal{A}U$ admet une solution unique, ce qui termine la démonstration.

3.1.2 Stabilité exponentielle

Théorème 3.1.1. *Pour tout $(u_0, u_1, \alpha_0, \alpha_1) \in D(\mathcal{A})$, il existe deux constantes positives γ et w telles que, l'énergie associée à la solution (u, v, α, θ) satisfait*

$$E(t) \leq \gamma e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide du théorème de Gearhart-Prüss, donc on doit montrer les deux lemmes suivants

Lemme 3.1.1. *Soit \mathcal{A} l'opérateur défini en (3.3), alors,*

$$i\mathbb{R} = \{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Preuve. Pour montrer le lemme on procède en trois étapes comme suit

I) **la première étape :**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors,

$$i\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(i\lambda \mathcal{A}^{-1} - I)$$

est inversible si \mathcal{A} et $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ sont inversibles,

1. \mathcal{A} inversible puisque $0 \in \rho(\mathcal{A})$ et
2. $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ est inversible si $\|i\lambda\mathcal{A}^{-1}\| < 1$ (d'après le théorème 1.3.3, de l'application contractile), c'est à dire pour $|\lambda| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$,
donc $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ inversible si $\lambda \in] - \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[$ et on a

$$\{i\lambda, \lambda \in] - \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

II) La deuxième étape :

Si

$$\sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \|\mathcal{A}\|^{-1} \} = M < \infty,$$

on a pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$,

$$\begin{aligned} i\lambda I - \mathcal{A} &= i\lambda I - \mathcal{A} + i\lambda_0 I - i\lambda_0 I, \\ &= (i\lambda_0 I - \mathcal{A}) + (i\lambda - i\lambda_0), \\ &= (i\lambda_0 I - \mathcal{A}) (I + i(\lambda - \lambda_0) (i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}), \end{aligned}$$

alors $(i\lambda I - \mathcal{A})$ est inversible si $(i\lambda_0 I - \mathcal{A})$ et $(I + i(\lambda - \lambda_0) (i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1})$ sont inversibles.

1. $(i\lambda_0 I - \mathcal{A})$ inversible puisque $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ et
2. $(I + i(\lambda - \lambda_0) (i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1})$ est inversible si $\| (i(\lambda - \lambda_0) (i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}) \| < 1$,
c'est à dire

$$|\lambda - \lambda_0| \| (i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1} \| < 1,$$

par suite

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_0| \sup \| (i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1} \| &< 1, \\ |\lambda| - |\lambda_0| &\leq |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

On choisit $|\lambda_0|$ très proche $\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$ on obtient

$$|\lambda| < \frac{1}{M} + \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

donc $(I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1})$ est inversible pour $\lambda \in] - M^{-1} - \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, M^{-1} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[$ et on a

$$\{i\lambda, \lambda \in] - M^{-1} - \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, M^{-1} + \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

L'intervalle $] \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}[$ est prolongeable chaque fois où

$$\sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \|\mathcal{A}\|^{-1} \} = M < \infty.$$

III) la Troisième étape :

Supposer que $\sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})\|, |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \} = \infty$, alors, il existe un nombre réel $\sigma \neq 0$ avec $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\sigma| < \infty$ et $\{i\lambda, |\lambda| < |\sigma|\} \subset \rho(\mathcal{A})$ et

$\sup \{ \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < |\sigma|\} = \infty$, dans ce cas, nous pouvons trouver une suite de nombres réels $\lambda_n \rightarrow \sigma$, et une suite $U_n = (u_n, v_n, \alpha_n, \theta_n) \in D(\mathcal{A})$ telle que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ et $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ceci s'écrit

$$i\lambda_n u_n - v_n \rightarrow 0, \text{ dans } H^2. \quad (3.7)$$

$$i\lambda_n v_n - \frac{1}{\rho}(\mu D^2 u_n - \gamma D^4 u_n + \beta D \theta_n - \sigma D^3 \alpha_n) \rightarrow 0, \text{ dans } L^2. \quad (3.8)$$

$$i\lambda_n \alpha_n - \theta_n \rightarrow 0, \text{ dans } H^1. \quad (3.9)$$

$$i\lambda_n \theta_n - \frac{1}{a}(\kappa D^2 \alpha_n + m D^2 \theta_n + \beta D v_n + \delta D^3 u_n) \rightarrow 0, \text{ dans } L^2. \quad (3.10)$$

en multipliant $(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n$ par U_n dans \mathcal{H} , on trouve

$$\begin{aligned} \langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} &= i\lambda_n \langle U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}}, \\ &= i\lambda_n \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

prenant la partie réelle, on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re} i\lambda_n \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}}, \\ &= - \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}}, \\ &= m \int_0^\pi |D\theta_n|^2 dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\|D\theta_n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0, \quad (3.11)$$

l'inégalité de Poincaré donne

$$\|\theta_n\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

d'après (3.9) on a

$$\begin{cases} i\lambda_n\alpha_n - \theta_n \longrightarrow 0, \text{ dans } L^2, \\ i\lambda_n D\alpha_n - D\theta_n \longrightarrow 0, \text{ dans } L^2. \end{cases} \quad (3.13)$$

En substituant la valeurs de θ_n dans (3.13)₁ et $D\theta_n$ dans (3.13)₂, on obtient

$$\|\alpha_n\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad \|D\alpha_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

En multipliant (3.10) par Du_n (qui est borné) dans $L^2(0, \pi)$, et en utilisant intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} i\lambda_n \langle \theta_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\kappa}{a} \langle D\alpha_n, D^2u_n \rangle_{L^2} + \frac{m}{a} \langle D\theta_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \\ - \frac{\beta}{a} \langle Dv_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{a} \langle D^2u_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme $\theta_n, D\theta_n, D\alpha_n \longrightarrow 0$ et Du_n, D^2u_n sont bornés on a

$$\langle \theta_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\kappa}{a} \langle D\alpha_n, D^2u_n \rangle_{L^2} + \frac{m}{a} \langle D\theta_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

par suite

$$- \frac{\beta}{a} \langle Dv_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{a} \|D^2u_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

en utilisant (3.7), on arrive à

$$-i\lambda_n \frac{\beta}{a} \langle Du_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{a} \|D^2u_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

i.e

$$-i\lambda_n \beta \|Du_n\|_{L^2}^2 + \delta \|D^2u_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

donc

$$\begin{cases} \|Du_n\|_{L^2} \longrightarrow 0, \\ \|D^2u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

On applique l'inégalité de Poincaré on conclut que

$$\|u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0, \quad (3.15)$$

et (3.7) donne directement

$$\|v_n\|_{L^2} \longrightarrow 0. \quad (3.16)$$

En combinant (3.11),(3.12),(3.14),(3.15),(3.16) on conclut que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ce qui contredit le fait que donc $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$.

□

Lemme 3.1.2. *l'opérateur \mathcal{A} défini dans (3.3) satisfait*

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \sup \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Preuve. Supposons que ceci n'est pas vrai, c'est à dire

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \sup \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty,$$

alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et suite de vecteurs unitaires $U_n = (u_n, v_n, \alpha_n, \theta_n)$, telles que $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ et $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$,

ce qui s'écrit par les convergence (3.7)-(3.10).

En utilisant des procédures similaires de celles qu'on a utilisé dans le lemme précédent on obtient

$$\|D\theta_n\|_{L^2} \longrightarrow 0, \quad \|\theta_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En divisant (3.9) par λ_n et en utilisant le fait que $\lambda_n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{cases} \|\alpha_n\|_{L^2} \longrightarrow 0, \\ \|D\alpha_n\|_{L^2} \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Puisque $(i\lambda_n u_n - v_n)$ est convergente et (v_n) bornée alors, $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Prenant le produit scalaire dans L^2 de (3.7), (3.10) par $D\theta_n$ et Du_n respectivement, et on utilise l'intégration par partie, on trouve

$$\langle i\lambda_n u_n, D\theta_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

et

$$\langle i\lambda_n \theta_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\kappa}{a} \langle D\alpha_n, D^2 u_n \rangle_{L^2} + \frac{m}{a} \langle D\theta_n, D^2 u_n \rangle_{L^2}$$

$$-\frac{\beta}{a}\langle Dv_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{a}\langle D^2u_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

par conséquent,

$$-\frac{\beta}{a}\langle Dv_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{a}\langle D^2u_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

ce qui donne, en utilisant (3.7),

$$-i\beta\langle \lambda_n Du_n, Du_n \rangle_{L^2} + \delta\langle D^2u_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

donc

$$-i\beta\lambda_n \|Du_n\|_{L^2}^2 + \delta \|D^2u_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

cela signifie que

$$\|Du_n\|_{L^2}, \|D^2u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En multipliant (3.8) par v_n dans L^2 on obtient

$$\langle i\lambda_n v_n, v_n \rangle_{L^2} - \frac{\mu}{\rho}\langle D^2u_n, v_n \rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\rho}\langle D^4u_n, v_n \rangle_{L^2} - \frac{\beta}{\rho}\langle D\theta_n, v_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{\rho}\langle D^3\alpha_n, v_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

sachant que

$$\langle D^2u_n, v_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0, \quad \langle D\theta_n, v_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

on a

$$i\lambda_n \langle v_n, v_n \rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\rho}\langle D^4u_n, v_n \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{\rho}\langle D^3\alpha_n, v_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En divisant par v_n on trouve

$$i\langle v_n, v_n \rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\rho}\langle D^4u_n, \frac{v_n}{\lambda_n} \rangle_{L^2} + \frac{\delta}{\rho}\langle D^3\alpha_n, \frac{v_n}{\lambda_n} \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Comme $v_n \sim i\lambda_n u_n$ on peut remplacer v_n par $i\lambda_n u_n$, on intègre par partie on aura

$$i\|v_n\|_{L^2}^2 - i\frac{\gamma}{\rho}\|D^2u_n\|_{L^2}^2 - i\frac{\delta}{\rho}\langle D\alpha_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Puisque

$$\gamma\|D^2u_n\|_{L^2}^2 + \delta\langle D\alpha_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

alors,

$$\|v_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En combinant tous ces résultats on conclut que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ce qui contredit le fait que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. \square

3.2 Cas limite $\beta \neq 0$ et $\delta = 0$

Supposant maintenant que $\delta = 0$, le système (3.1) se réduit à :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta \alpha_{tx}, & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \pi), \\ a \alpha_{tt} = \kappa \alpha_{xx} + m \alpha_{txx} + \beta u_{tx} & \text{dans } (0, \infty) \times (0, \pi). \end{cases} \quad (3.17)$$

En utilisant les mêmes conditions aux limites et conditions initiales que dans le cas normal. On considère le même espace de Hilbert que dans le cas général et on le munit par le produit scalaire

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \left[\rho v \bar{v}^* + a \theta \bar{\theta}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + \gamma u_{xx} \bar{u}_{xx}^* + \kappa \alpha_x \bar{\alpha}_x^* \right] dx.$$

Au système (3.1) est associée l'énergie suivante

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^\pi [\rho |u_t|^2 + a |\alpha_t|^2 + \mu |u_x|^2 + \gamma |u_{xx}|^2 + \kappa |\alpha_x|^2] dx. \quad (3.18)$$

Remarque 3.2.1. L'énergie $E(t)$ satisfait l'estimation,

$$\frac{dE}{dt}(t) := -m \int_0^\pi |\alpha_{xt}|^2 dx - \beta \int_0^\pi \alpha_t \bar{u}_{xt} dx + \beta \int_0^\pi u_{xt} \bar{\alpha}_t dx.$$

3.2.1 Existence et unicité

Introduisant les nouveaux variables $v = u_t$ et $\theta = \alpha_t$ alors, le système (3.17) s'écrit

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = \frac{1}{\rho} (\mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta \theta_x), \\ \alpha_t = \theta, \\ \theta_t = \frac{1}{a} (\kappa \alpha_{xx} + m \theta_{xx} + \beta v_x), \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec \mathcal{A} est l'opérateur différentiel donné par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} D^2 - \frac{\gamma}{\rho} D^4 & 0 & 0 & \frac{\beta}{\rho} D \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & \frac{\beta}{a} D & \frac{\kappa}{a} D^2 & \frac{m}{a} D^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

de domaine

$$D(\mathcal{A}) = (H^4(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)) \times (H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)) \times H^2(0, \pi) \times H_*^1(0, \pi)$$

où

$$H_*^1(0, \pi) := \left\{ \varphi \in H^1(0, \pi); \int_0^\pi \varphi dx = 0 \right\}$$

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du système (3.17) on applique le théorème de Lumer-Phillips, il suffit donc de vérifier que $D(\mathcal{A})$ est dense et que \mathcal{A} est dissipatif et maximal. La densité de $D(\mathcal{A})$ dans \mathcal{H} est due au densité de $C_c^\infty(0, \pi)$ dans tous les $H^m(0, \pi)$ ce qui donne la densité de $(H^4(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi))$ dans $(H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi))$ et de $(H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi))$ dans $L^2(0, \pi)$.

1) \mathcal{A} est dissipatif :

$$Re \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -m \int_0^\pi |\theta_x|^2 dx \leq 0. \quad (3.20)$$

Donc \mathcal{A} est dissipatif

2) \mathcal{A} est maximal.

Montrons tout d'abord que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$, et on cherche $U = (u, v, \alpha, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$, ceci s'écrit en termes de composantes

$$\begin{cases} v = f_1, \\ \mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta \theta_x = \rho f_2, \\ \theta = f_3, \\ \kappa \alpha_{xx} + m \theta_{xx} + \beta v_x = a f_4, \end{cases} \quad (3.21)$$

d'après (3.21)₁ et (3.21)₃ on a

$$v = f_1 \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi), \theta = f_3 \in H_*^1(0, \pi).$$

En substituant les valeurs de v et θ dans les équation (3.21)₂ et (3.21)₄ on arrive a

$$\begin{cases} \mu u_{xx} - \gamma u_{xxxx} = \rho f_2 - \beta f_{3x}, \\ \kappa \alpha_{xx} = a f_4 - m f_{3xx} - \beta f_{1x}, \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour prouver que l'équation (3.22) admet une solution unique dans $(H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)) \times H_*^1(0, \pi)$ en applique le théorème de Lax-Milgram.

On définit l'espace $W = (H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)) \times H_*^1(0, \pi)$.

En multipliant les équations (3.22)₁ et (3.22)₂ respectivement par des fonctions $u^* \in C_0^\infty$ et $\alpha^* \in C_0^\infty$ dans $L^2[0, \pi]$ on obtient :

$$\begin{cases} -\mu \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}^* dx + \gamma \int_0^\pi u_{xxxx} \bar{u}^* dx = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx, \\ -\kappa \int_0^\pi \alpha_{xx} \bar{\alpha}^* dx = \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx, \end{cases}$$

où

$$\varphi_1 = -\rho f_2 + \beta f_{3x} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -a f_4 + m f_{3xx} + \beta f_{1x},$$

une intégration par partie nous conduit à :

$$\begin{cases} \mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_x^* dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx, \\ \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x^* dx = \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx. \end{cases} \quad (3.23)$$

On additionne (3.23)₁ et (3.23)₂, on trouve :

$$\mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_x^* dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx + \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x^* dx = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx + \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx.$$

Pour (U, U^*) on définit une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et une forme linéaire $L(\cdot)$ par

$$a(U, U^*) = \mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_x^* dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx + \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x^* dx.$$

$$L(U^*) = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx + \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx,$$

où $U = (u, \alpha)$ et $U^* = (u^*, \alpha^*)$.

On montre que $a(\cdot, \cdot)$ est continue, coercive et $L(\cdot)$ est continue

1) Continuité de $a(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} |a(U, U^*)| &= \left| \mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_x^* dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx + \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x^* dx \right|, \\ &\leq \mu \int_0^\pi |u_x \bar{u}_x^*| dx + \gamma \int_0^\pi |u_{xx} \bar{u}_{xx}^*| dx + \kappa \int_0^\pi |\alpha_x \bar{\alpha}_x^*| dx, \\ &\leq \mu \|u_x\|_{L^2} \|u_x^*\|_{L^2} + \gamma \|u_{xx}\|_{L^2} \|u_{xx}^*\|_{L^2} + \kappa \|\alpha_x\|_{L^2} \|\alpha_x^*\|_{L^2}, \end{aligned}$$

alors,

$$|a(U, U^*)| \leq \max(\mu, \gamma, \kappa) \left[\|u_{xx}\|_{L^2} \|u^*\|_{L^2} + \|u_{xx}\|_{L^2} \|u_{xx}^*\|_{L^2} + \|\alpha_x\|_{L^2} \|\alpha_x^*\|_{L^2} \right],$$

en on déduit

$$|a(U, U^*)| \leq C \left(\|u_{xx}\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} + \|\alpha_{xx}\|_{L^2} + \|\alpha_x\|_{L^2} + \|\alpha\|_{L^2} \right) \times \left(\|u^*\|_{L^2} + \|u_x^*\|_{L^2} + \|u_{xx}^*\|_{L^2} + \|\alpha_{xx}^*\|_{L^2} + \|\alpha_x^*\|_{L^2} + \|\alpha^*\|_{L^2} \right),$$

on conclut que :

$$|a(U, U^*)| \leq C \|U\|_W \|U^*\|_W.$$

2) Continuité de $L(\cdot)$:

$$\begin{aligned} |L(U^*)| &= \left| \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx + \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx \right|, \\ &\leq \|\varphi_1\|_{L^2} \|u^*\|_{L^2} + \|\varphi_2\|_{L^2} \|\alpha^*\|_{L^2}, \\ &\leq \max(\|\varphi_1\|_{L^2}, \|\varphi_2\|_{L^2}) (\|u^*\|_{L^2} + \|\alpha^*\|_{L^2}), \\ &\leq C \|U^*\|_W. \end{aligned}$$

2) Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} a(U, U) &= \mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_x dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx} dx + \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x dx, \\ &= \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx + \gamma \int_0^\pi |u_{xx}|^2 dx + \kappa \int_0^\pi |\alpha_x|^2 dx, \\ &\geq \min(\mu, \gamma, \kappa) \left[\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|\alpha_x\|^2 \right], \\ &\geq C_0 \|U\|_W^2. \end{aligned}$$

$a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire, continue et coercive sur W et $L(\cdot)$ est linéaire et continue sur W , on conclut qu'il existe une solution unique $U^* \in W = (H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)) \times H_*^1(0, \pi)$ telle que :

$$\mu \int_0^\pi u_x \bar{u}_x^* dx + \gamma \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx + \kappa \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x^* dx = \int_0^\pi \varphi_1 \bar{u}^* dx + \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx.$$

En substituant $(u^*, \alpha^*) = (u^*, 0)$ et $(u^*, \alpha^*) = (0, \alpha^*)$ respectivement on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^\pi u_{xx} \bar{u}_{xx}^* dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\pi (\mu u_{xx} + \varphi_1) \bar{u}^* dx, \\ \int_0^\pi \alpha_x \bar{\alpha}_x^* dx = \frac{1}{\kappa} \int_0^\pi \varphi_2 \bar{\alpha}^* dx, \end{cases}$$

et comme $\mu u_{xx} + \varphi_1, \varphi_2 \in L^2$ on conclut que

$$\begin{cases} u_{xx} \in H^2(0, \pi), \\ \alpha \in H^2(0, \pi), \end{cases}$$

par suite donc

$$\begin{cases} u \in H^4(0, \pi), \\ \alpha \in H^2(0, \pi). \end{cases}$$

On a donc $(u, v, \alpha, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de $\mathcal{A}U = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, donc $0 \in \rho(\mathcal{A})$ et comme $\|\mathcal{A}\| < 1$ la théorie des opérateurs confirme que $(I - \mathcal{A})$ est inversible d'où la maximalité de \mathcal{A} . Le théoème de Lumer-Phillips assure que \mathcal{A} est générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction. Le théoème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de système, ce qui termine la démonstration.

3.2.2 Stabilité exponentielle

On montre que la solution de (3.17) satisfait le résultat du théorème 3.1.1, ceci se fait en démontrant les deux lemmes qui suivent

Lemme 3.2.1. *Soit \mathcal{A} l'opérateur défini en (3.19), alors,*

$$i\mathbb{R} = \{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Preuve. Pour montrer le lemme on procède en trois étapes

Les deux premières étapes se font comme ci-dessus. Nous passons donc directement à :

III) La Troisième étape :

Supposer que $\sup \{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\} = \infty$ alors, il existe un nombre réel $\sigma \neq 0$ avec $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\sigma| < \infty$ et $\{i\lambda, |\lambda| < |\sigma|\} \subset \rho(\mathcal{A})$ et

$\sup \{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|, |\lambda| < |\sigma|\} = \infty$, dans ce cas, nous pouvons trouver une suite de nombres réels (λ_n) , avec $\lambda_n \rightarrow \sigma$, et une suite des vecteurs unitaires $U_n = (u_n, v_n, \alpha_n, \theta_n)$ du domaine $D(\mathcal{A})$ telle que $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ceci s'écrit

$$i\lambda_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ dans } H^2. \quad (3.24)$$

$$i\lambda_n v_n - \frac{1}{\rho}(\mu D^2 u_n - \gamma D^4 u_n + \beta D \theta_n) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2. \quad (3.25)$$

$$i\lambda_n\alpha_n - \theta_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2. \quad (3.26)$$

$$i\lambda_n\theta_n - \frac{1}{a}(\kappa D^2\alpha_n + mD^2\theta_n + \beta Dv_n) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2. \quad (3.27)$$

En multipliant $(i\lambda I - \mathcal{A}U_n)$ par U_n dans \mathcal{H} , on trouve :

$$\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} = i\lambda_n \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} \rightarrow 0.$$

Prenant sa partie réelle, on trouve :

$$\operatorname{Re}\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant l'équation (3.20), on trouve :

$$\operatorname{Re}\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \rangle_{\mathcal{H}} = m \int_0^\pi |D\theta_n|^2 dx \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Donc

$$\|D\theta_n\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

l'inégalité de Poincaré donne

$$\|\theta_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

D'après (3.24)

$$\begin{cases} i\lambda_n\alpha_n - \theta_n \rightarrow 0, \\ i\lambda_n D\alpha_n - D\theta_n \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

En substituant la valeurs de θ_n et $D\theta_n$ dans (3.29)₁ et (3.29)₂, on obtient :

$$\|\alpha_n\|_{L^2}, \|D\alpha_n\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

En multipliant (3.27) par Du_n dans $L^2(0, \pi)$, ce qui est borné, et en utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$i\lambda_n \langle \theta_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\kappa}{a} \langle D\alpha_n, D^2u_n \rangle_{L^2} + \frac{m}{a} \langle D\theta_n, D^2u_n \rangle_{L^2} - \frac{\beta}{a} \langle Dv_n, Du_n \rangle_{L^2} \rightarrow 0.$$

Comme $\theta_n, D\alpha_n, D\theta_n \rightarrow 0$ et Du_n, D^2u_n sont bornés on a

$$i\lambda_n \langle \theta_n, Du_n \rangle_{L^2} + \frac{\kappa}{a} \langle D\alpha_n, D^2u_n \rangle_{L^2} + \frac{m}{a} \langle D\theta_n, D^2u_n \rangle_{L^2} \rightarrow 0,$$

par suite

$$-\frac{\beta}{a} \langle Dv_n, Du_n \rangle_{L^2} \rightarrow 0,$$

en utilisant (3.24), on arrive à :

$$-i\lambda_n\beta\|Du_n\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

alors

$$\|Du_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En applique l'inégalité de Poincaré on conclut que :

$$\|u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

En combinant tous ces résultats on conclut que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ce qui contredit le fait que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$.

□

Lemme 3.2.2. *l'opérateur \mathcal{A} défini dans (3.19) satisfait :*

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Preuve. Supposons que

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et suite de vecteurs $U_n = (u_n, v_n, \alpha_n, \theta_n)$, telles que $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, $\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Cela implique que

$$i\lambda_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H^2 \tag{3.30}$$

$$i\lambda_n v_n - \frac{1}{\rho}(\mu D^2 u_n - \gamma D^4 u_n + \beta D \theta_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2 \tag{3.31}$$

$$i\lambda_n \alpha_n - \theta_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H^1 \tag{3.32}$$

$$i\lambda_n \theta_n - \frac{1}{a}(\kappa D^2 \alpha_n + m D^2 \theta_n + \beta D v_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2. \tag{3.33}$$

Les mêmes manipulations utilisées dans le cas précédent nous donne

$$\|D\theta_n\|_{L^2}, \|\theta_n\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

$$\|\alpha_n\|_{L^2}, \|D\alpha_n\|_{L^2} \longrightarrow 0,$$

$$\|Du_n\|_{L^2}, \|u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Il reste montrer que $(v_n)_n$ et $(D^2u_n)_n$ tendent vers 0.

Pour ce faire, On définit les suites : $\phi_n = \int_0^x v_n(y)dy$ et $\xi_n = \int_0^x \theta_n(y)dy$.

Se sont des suites bornées dans L^2 , en effet

$$\|\phi_n\|_{L^2}^2 = \int_0^\pi \left(\int_0^x v_n(y)dy \right)^2 dx \leq \int_0^\pi \int_0^x dy \int_0^x v_n^2(y)dy \leq \pi \int_0^\pi \int_0^\pi v_n^2(y)dy \leq \pi^2,$$

d'où

$$\|\phi_n\|_{L^2(0,\pi)} \leq \pi.$$

de la même manière on aura

$$\|\xi_n\|_{L^2(0,\pi)} \leq \pi.$$

En multipliant (3.33) par ϕ_n dans L^2 , et on intègre par partie on arrive à

$$\langle i\lambda_n \theta_n, \phi_n \rangle_{L^2} + \frac{\kappa}{a} \langle D\alpha_n, D\phi_n \rangle_{L^2} + \frac{m}{a} \langle D\theta_n, D\phi_n \rangle_{L^2} - \frac{\beta}{a} \langle Dv_n, \phi_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0. \quad (3.34)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \langle i\lambda_n \theta_n, \phi_n \rangle &= i\lambda_n \int_0^\pi \theta_n \bar{\phi}_n dx, \\ &= i\lambda_n \int_0^\pi \theta_n \bar{\phi}_n dx + i\lambda_n \int_0^\pi \xi_n \bar{v}_n dx - i\lambda_n \int_0^\pi \xi_n \bar{v}_n dx, \\ &= \int_0^\pi \frac{d}{dx} (\xi_n i\lambda_n \bar{\phi}_n) dx - i\lambda_n \int_0^\pi \xi_n \bar{v}_n dx, \\ &= [\xi_n i\lambda_n \bar{\phi}_n]_0^\pi - i\lambda_n \int_0^\pi \xi_n \bar{v}_n dx = -i\lambda_n \int_0^\pi \xi_n \bar{v}_n dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En remplaçant $i\lambda_n v_n$ par $\frac{1}{\rho}(\mu D^2 u_n - \gamma D^4 u_n)$ de (3.31), on obtient

$$\langle \xi_n, i\lambda_n v \rangle_{L^2} = \langle \xi_n, \frac{1}{\rho}(\mu D^2 u_n - \gamma D^4 u_n) \rangle_{L^2} = \langle \xi_n, \frac{\mu}{\rho} D^2 u_n \rangle_{L^2} - \langle \xi_n, \frac{\gamma}{\rho} D^4 u_n \rangle_{L^2},$$

en intégrant par partie on arrive à

$$\langle \xi_n, i\lambda_n v \rangle_{L^2} = -\langle \theta_n, \frac{\mu}{\rho} Du_n \rangle_{L^2} - \langle D\theta_n, \frac{\gamma}{\rho} D^2 u_n \rangle_{L^2},$$

puisque $(D\theta_n)_n, (\theta_n)_n$ tendent vers zéro et $(Du_n), (D^2u_n)$ sont bornées, on obtient

$$\langle i\lambda_n \theta_n, \phi_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0. \quad (3.36)$$

En substituant (3.36) dans (3.34), on arrive à :

$$-\frac{\kappa}{a}\langle D\alpha_n, D\phi_n\rangle_{L^2} - \frac{m}{a}\langle D\theta_n, D\phi_n\rangle_{L^2} - \frac{\beta}{a}\langle Dv_n, \phi_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

en substituant la valeurs de ϕ_n , on obtient

$$\kappa\langle D\alpha_n, v_n\rangle_{L^2} + m\langle D\theta_n, v_n\rangle_{L^2} + \beta\langle v_n, v_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0. \quad (3.37)$$

Puisque $D\alpha_n, D\theta_n \rightarrow 0$ et v_n sont bornées, on a

$$\kappa\langle D\alpha_n, v_n\rangle_{L^2} + m\langle D\theta_n, v_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0,$$

en substituant dans (3.37), on obtient

$$\|v_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En multipliant maintenant(3.31) par u_n , on trouvé

$$\langle i\lambda_n v_n, u_n\rangle_{L^2} - \frac{\mu}{\rho}\langle D^2 u_n, u_n\rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\rho}\langle D^4 u_n, u_n\rangle_{L^2} - \frac{\beta}{\rho}\langle D\theta_n, u_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Sachant que u_n est bornée et $D\theta_n \rightarrow 0$, cela implique

$$-\frac{\beta}{\rho}\langle D\theta_n, u_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

L'équation devient comme suit

$$\langle i\lambda_n v_n, u_n\rangle_{L^2} - \frac{\mu}{\rho}\langle D^2 u_n, u_n\rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\rho}\langle D^4 u_n, u_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0. \quad (3.38)$$

D'abord, nous avons

$$\langle i\lambda_n v_n, u_n\rangle_{L^2} = -\langle v_n, i\lambda_n u_n\rangle_{L^2},$$

et $v_n \rightarrow 0$ et $i\lambda_n u_n$ sont bornées, de ce qui précède, on conclut que :

$$\langle i\lambda_n v_n, u_n\rangle_{L^2} = -\langle v_n, i\lambda_n u_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En substituant dans (3.38), et on intègre par partie on arrive à

$$\frac{\mu}{\rho}\langle Du_n, Du_n\rangle_{L^2} + \frac{\gamma}{\rho}\langle D^2 u_n, D^2 u_n\rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

puisque $Du_n \rightarrow 0$ on obtient

$$\|D^2 u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

En combinant tous ces résultats on conclut que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$, ce qui contredit le fait que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Alors, d'après le théorème de Gearhart-Prüss la solution est exponentiellement stable, ce qui termine la démonstration. \square

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.
- [2] K. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Alfred A.Knopf, 1995.
- [3] H. D. Fernández-Sare, J. E. Muñoz-Rivera, R. Quintanilla, Decay of solutions in non-simple thermoelastic bars, *inter. J. Engin. Sci.* 48(2010), 1233-1241.
- [4] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall, 1999.
- [5] A. Magana, R. Quintanilla, Exponential Decay in nonsimple thermoelasticity of type *III*, *Math. Meth. Appl. Sci.* 39(2016), 225-235.
- [6] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1988.
- [7] B. Rynne, M. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlage London Limited 2008.
- [8] I. I. Vrabie, *C_0 -Semigroups and applications*, Elsevier Science B. V, 2003.

Résumé

Dans ce mémoire on a étudié l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique de quelques systèmes en théorie de thermoélasticité avec élasticité non-simple.

Le premier système est un couplage entre une équation hyperbolique du déplacement et une équation parabolique de la chaleur, on a montré l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution en deux cas des conditions aux bords.

Le second système est un système en thermoélasticité de type III dont l'équation de chaleur est remplacé par une équation hyperbolique avec une nouvelle variable représente le déplacement thermique. On a montré la stabilité exponentielle de ce système.

La méthode utilisée pour l'obtention de ces résultats et le théorème de Hille-Yosida basé sur la théorie des semigroupes et théorème de Gearhart-Prüss basé sur la théorie spectrale des opérateurs.

Mots clés : Stabilité exponentielle, thermoélasticité de type III, théorème de Gearhart-Prüss, semigroupes des contractions.

Abstract

In this dissertation we studied some systems in non-simple thermoelasticity and prove the well-posedness and exponential stability results.

The first system is a coupling between the hyperbolic equation of the displacement and the parabolic equation of the heat, we prove the well-posedness and that the solution decays exponentially in two case of boundary conditions.

For the second system we deal with a type III thermoelasticity where the heat equation is replaced by a hyperbolic equation with a new variable α called thermal displacement, we prove that the solution decays exponentially.

The method used to obtain these results is Hille-Yosida theorem based on semigroups theory and Gearhart-Prüss theorem based on spectral theory.

Key words: Exponential stability, thermoelasticity of type III, Gearhart-Prüss theorem, contraction semigroups.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة وجود ووحداية الحل والإستقرار الأسي لعدة جمل في نظرية الحرارة المرنة مع مرونة غير بسيطة. النظام الأول هو تزواج بين المعادلة الزائدية للإزاحة ومعادلة القطع المكافئ للحرارة لقد أظهرنا وجود ووحداية الحل والإستقرار الأسي لهذا الحل وذلك في حالتين من الحالات الشروط الحدودية.

النظام الثاني هو نظام من النوع الثالث للحرارة الذي أبتكره قرين ونقدي، حيث يتم استبدال المعادلة الحرارية بمعادلة زائدية بمتغير جديد يسمى حركة الحرارة، وقد تم إظهار الإستقرار الأسي للنظام.

في كل هذه الأعمال استعملنا نظرية Hille-Yosida المعتمدة على نظرية أشباه الزمر ونظرية Gearhart-Prüss المعتمدة على النظرية الطيفية للمؤثرات..

الكلمات المفتاحية: الإستقرار الأسي، الحرارة المرونية من النوع III، نظرية Gearhart-Prüss, semigroup من التقلصات.