



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Etude mathématique de problème de
contact avec frottement entre deux corps
élastiques**

Présenté par: **TOUIL Faical**

BENGUESSOUM Adel

Soutenu le : 05 /06 / 2018

Devant le jury composé de :

Said Ameur Meziene
Hadj Ammar Tedjani
Azeb Ahmed Abdelazize

MAA
MCA
MCB

Président
Encadreur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Nous tenons à exprimer nos reconnaissances et nos remerciements les plus profonds à notre encadreur **Hadj Ammar Tedjani** de l'université Hamma lakhder qui nous a proposé le sujet de ce mémoire, pour son aide et ses conseils qui nous ont été un soutien très précieux. Nous tenons encore plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées.

Nous tenons aussi à manifester toute notre gratitude envers tous les membres de jury. Nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Enfin, nous dédions ce travail à toutes nos familles et nos amis et surtout à nos chers parents pour leur grand soutien.

Table des matières

Introduction	1
Notations générales	3
1 Préliminaires	6
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact avec frottement	6
1.1.1 Contraintes, déformations :	6
1.1.2 Loi de comportement élastique.	7
1.1.3 Conditions aux limites	8
1.1.4 Formulation mathématique d'un problème de contact avec frottement	10
1.2 Rappels d'analyse	11
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	11
1.2.2 Espaces de Sobolev	12
1.2.3 Espaces fonctionnels	13
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	15
2 Etude variationnelle d'un problème non linéaire de contact avec frottement	19
2.1 Formulation du problème et hypothèses	19
2.1.1 Position du problème	19
2.1.2 Hypothèses	21
2.2 Formulation variationnelle.	24
2.3 Existence et unicité de la solution	36

Introduction générale

Depuis les temps lointains, l'homme s'est intéressé aux problèmes de contact entre deux corps. Ces problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps élastique ou entre un corps élastique et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact du sabot de frein avec la roue, d'une roue de voiture avec la route, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou un fauteuil lors d'une posture assise, les multiples frottements entre plaques tectoniques ou encore l'écoulement de la lave lors d'une éruption volcanique, ne sont que quelques exemples qui font partie d'une liste non exhaustive de problèmes de contact. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse des processus physiques provenant des contacts avec frottement entre des corps élastiques. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (Mathematical Theory of Contact Mechanics : MTCM) a fait récemment un progrès impressionnant, voir par exemple [[13], [15], [9]] et les références qui y'a sont incluses.

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent dans l'industrie, notamment dans les structures mécaniques : ils sont variés, fortement non linéaires et complexes. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment réagissent les structures lorsqu'elles subissent ces forces. Le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa élastiquent, son mouvement...Les problèmes de contact étant non linéaires, la modélisation des phénomènes de contact pose des difficultés.

Notre but dans ce mémoire est d'étudier théoriquement le problème de contact avec frottement entre deux corps élastiques, ce problème connu sous le nom de problème de Signiorin.

Notre objet ici est l'étude de ce même problème pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique non linéaire de la forme :

$$\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell)).$$

Où σ^ℓ , u^ℓ et $\varepsilon(u^\ell)$ représentent respectivement le champ des contraintes, le champ des déplacements et le tenseur des déformations linéarisé, on suppose que la frontière de Ω^ℓ est constituée de trois parties disjointes deux à deux $\Gamma^\ell = \Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3^\ell$, $\Gamma_i^\ell \cap \Gamma_j^\ell = \emptyset$, $\forall i \neq j$. On suppose que les parties Γ_1^ℓ , Γ_2^ℓ , Γ_3^ℓ sont mesurables au sens de Lebesgue de $N - 1$ dimensionnelle. La formulation classique du problème mécanique sera notée par $\mathbb{P}$. Ce mémoire se divise en deux chapitres.

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par décrire le cadre physique dans lequel nous travaillons ainsi que le modèle mathématique correspondant, tout en donnant la loi de comportement et conditions aux limites qui apparaissent dans mémoire. Ensuite, nous aborderons le cadre fonctionnel permettant l'analyse mathématique des problèmes ainsi considérés. Nous terminerons ce chapitre en passant en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les inéquations variationnelles, les équations d'évolution.

Dans le deuxième chapitre, en premier lieu on considère le problème mécanique $\mathbb{P}$ dans le cas où la loi de comportement est non linéaire. En utilisant la formule de Green, ainsi que l'inégalité de Korn, on propose deux formulations variationnelles $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. Le problème $\mathbb{P}_1$ est la formulation variationnelle qui dépend uniquement de l'inconnue u^ℓ , tandis que le problème $\mathbb{P}_2$ ne dépend que de σ^ℓ . En utilisant le théorème de Stampachia concernant les inéquations variationnelles elliptiques, ainsi que des hypothèses de régularité qu'on imposera par la suite, on démontre que $\mathbb{P}_1$ possède une solution unique. Par le même résultat que dans le cas du problème $\mathbb{P}_1$, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution du problème $\mathbb{P}_2$.

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensembles des nombres réels.
$\mathbb{N}$	Ensembles des entiers naturels.
c	Constante réelle strictement positive.
<i>i.e</i>	C'est à dire.
$\nabla\Psi$	Gradient de l'application $\Psi : \nabla\Psi = (\partial_1\Psi, \dots, \partial_N\Psi)$.
$Div\Psi$	Divergence de l'application $\Psi : Div\Psi = \partial_1\Psi + \dots + \partial_N\Psi$.
$\partial\Psi$	Sous-différentiel de l'application Ψ .
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$.
S_N	Espace des tenseurs d'ordre deux symétrique sur $\mathbb{R}^N$.
$\cdot$	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$ ou S_N .
$ \cdot $	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ ou S_N .
$\ \cdot\ _X$	La norme sur l'espace X .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Le produit scalaire sur l'espace X .
X'	Espace dual topologique de l'espace X .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X .
$p.p$	Presque partout.
$\Omega^\ell \ell = 1, 2.$	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$), parfois domaine Lipchitzien.
$\overline{\Omega}^\ell$	L'adhérence de Ω^ℓ .
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ .
$\Gamma_i^\ell \ i = (1, 2, 3)$	Les parties de frontière Γ^ℓ .
$mes(\Gamma_i^\ell)$	Mesure de Lebesgue (N-1) dimensionnelle de Γ_i^ℓ .
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ .
η^ℓ	Normale extérieure unitaire à Γ_i^ℓ .

$\nu_\eta^\ell, \nu_\tau^\ell$	Les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel ν^ℓ défini sur Ω^ℓ .
$C^1(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ .
$D(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω^ℓ .
$D'(\Omega^\ell)$	Espace des distributions sur Ω^ℓ .
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < \infty$.
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 d\Omega^\ell)^{\frac{1}{2}}$.
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\exists c > 0 : u^\ell < c, \quad p.p \text{ sur } \Omega^\ell$.
H^ℓ	L'espace $(L^2(\Omega^\ell))^N$.
H_1^ℓ	L'espace $(H^1(\Omega^\ell))^N$.
$\mathcal{H}^\ell$	L'espace $(L^2(\Omega^\ell))_S^{N \times N}$.
$\mathcal{H}_1^\ell$	L'espace $(H^1(\Omega^\ell))_S^{N \times N}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	Espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ .
H_{Γ^ℓ}	L'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^N$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$.
H'_{Γ^ℓ}	L'espace dual de H_{Γ^ℓ} , i.e $H'_{\Gamma^\ell} = (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^N$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$.
$\ \cdot\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\ \Psi\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle \Psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}}{\ \phi\ _{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{V(\Omega^\ell)}$	Le produit scalaire sur $V(\Omega^\ell)$ défini par : $\langle \nu^\ell, \omega^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)} = \langle \varepsilon(\nu^\ell), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_V$	Le produit scalaire sur V défini par : $\langle \nu, \omega \rangle_V = \langle \nu^1, \omega^1 \rangle_{V(\Omega^1)} + \langle \nu^2, \omega^2 \rangle_{V(\Omega^2)}$.
Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables.
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$	Les parties de $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3^\ell}$.
Γ_3	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 .
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique.
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique.
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ .
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $(\varepsilon(u^\ell))_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$.

- $\sigma^\ell . u^\ell$ Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par σ^ℓ : $(\sigma^\ell . u^\ell)_i = \sigma_{i,j}^\ell . u_j^\ell$.
- σ_η^ℓ Composante normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\eta^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) . \nu^\ell$
où η^ℓ est la normale unitaire sortante sur le bord du domaine Ω^ℓ .
- σ_τ^ℓ Vecteur composante tangentielle des contraintes à la frontière du domaine.
- u_η^ℓ Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine : $u_\eta^\ell = u^\ell . \eta^\ell$.
- $u_\eta^\ell . \eta^\ell$ Vecteur composante normale du déplacement u^ℓ : $(u_\eta^\ell . \eta^\ell)_i = u_\eta^\ell . \eta_i^\ell$.
- u_τ^ℓ Vecteur composante tangentielle du déplacement u^ℓ : $u_\tau^\ell = u^\ell - u_\eta^\ell . \eta^\ell$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact avec frottement

1.1.1 Contraintes, déformations :

On considère un corps déformable occupant un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) de frontière Γ supposée assez régulière, rapporté à un système d'axes orthonormés $Ox_i (i = \overline{1, N})$, l'objet du problème, du point de vue mécanique, est d'étudier le nouvel état d'équilibre du corps matériel, résultant de l'application des forces volumiques sur Ω et des forces de traction sur une partie de la frontière Γ . Les inconnues du problème sont le *champ des déplacements* $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ et le *champ des contraintes* $\sigma : \Omega \rightarrow S_N$.

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence du torseur des efforts extérieurs et du torseur des accélérations pour un systèmes matériel quelconque, conduit à *l'équation d'équilibre* :

$$Div\sigma + f = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (1.1)$$

Où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ représente la densité des forces volumiques sur Ω et $Div\sigma$ est la divergence du tenseur σ .

L'équation(1.1) équivaut à N relations scalaires, il est évident du simple point de vue mathématique que cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre d'un corps

élastique car, par exemple, les N composantes u_i du champ des déplacements ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que l'équation (1.1) exprime une loi universelle valable pour tous les solides. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

L'équation (1.1) est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations que l'on désigne sous le vocable général de lois de comportement, caractérisant le comportement de chaque type de solide.

Dans la suite, on considérera que des solides élastiques dans l'hypothèse des petites transformations, dans ce cas, la loi de comportement est exprimée par une relation entre le champ des contraintes et le champ des déformations linéarités $\varepsilon : \Omega \rightarrow S_N$ défini par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.2)$$

où ∂_i et ∂_j représentent les opérateurs de dérivation partielle respectivement par rapport aux variables x_i et x_j . Dans la suite, on va appeler ε champ des déformations, pour tout $x \in \Omega$ le tenseur $\varepsilon(x) \in S_N$ s'appelle tenseur des déformations en x . Des fois, pour marquer la dépendance du champ u par rapport au champ des déplacements u on va noter $\varepsilon(u)$ au lieu de ε .

1.1.2 Loi de comportement élastique.

C'est une loi de comportement de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon(u)). \quad (1.3)$$

Où $F : S_N \rightarrow S_N$ est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modéliser quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone : linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que F soit linéaire ou non), durcissement ou adoucissement de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que F soit monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.3). En effet, si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et on maintient la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$ il résulte

$\sigma(t) = F(\varepsilon_0)$, $\forall t > 0$. Par conséquent le modèle (1.3) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. De même, pour l'équation (1.3) les courbes charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident. Ce modèle ne peut donc pas décrire les déformations résiduelles ce qui justifie l'introduction d'autre lois constitutives capables de modeler ces phénomènes.

1.1.3 Conditions aux limites

a) Conditions aux limites de déplacement-traction :

Supposons maintenant que la frontière du domaine est constituée de trois parties disjointes deux à deux : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Soit $\eta = (\eta_i)$ le vecteur unitaire extérieur à Γ . Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas statique et par conséquent le temps n'interviendra pas par la suite. Nous considérons les conditions aux limites suivantes

$$u = \zeta \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad (1.4)$$

$$\sigma\eta = \mathbf{g} \quad \text{sur} \quad \Gamma_2. \quad (1.5)$$

La condition (1.4) est appelée condition aux limites de déplacement, sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ , la fonction ζ étant une donnée du problème, (par exemple, $\zeta = 0$ le solide est encastré sur la partie Γ_1 de sa frontière). La condition (1.5) est appelée condition aux limites de traction. Elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\eta$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière, $\mathbf{g}$ représentant la densité des forces appliquées de surface et constituant une donnée du problème. $\Gamma_1 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de traction pure et si $\Gamma_2 = \emptyset$ et problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mesure de Lebesgue N-1 dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un problème mixte déplacement-traction.

b) Condition aux limites de contact avec frottement de coulomb :

On suppose maintenant la contact entre deux corps élastiques occupant les domaines $\Omega^1, \Omega^2 \subset \mathbb{R}^N$ et pose Γ_3 la partie de contact. Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

On définit le déplacement normal relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par $[u_\eta] = u_\eta^1 + u_\eta^2$ où η^ℓ est la normale unitaire extérieure à Ω^ℓ .

On définit le déplacement tangentiel relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$.

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\begin{cases} \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \equiv \sigma_\eta \\ \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.6)$$

Puisque les deux corps Ω^1, Ω^2 représentent deux corps élastiques, cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité :

$$[u_\eta] \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.7)$$

Dans les points de Γ_3 tels que $[u_\eta] < 0$, il n'existe pas de contact entre Ω^1 et Ω^2 donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, on a

$$[u_\eta] < 0 \Rightarrow \sigma_\eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.8)$$

Aux points de Γ_3 tels que $[u_\eta] = 0$, le contact entre Ω^1, Ω^2 se produit, on a

$$[u_\eta] = 0 \Rightarrow \sigma_\eta \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.9)$$

Alors, Les conditions sur la partie limite Γ_3 contrainte par les conditions de contact unilatérales de friction de Coulomb intègrent les conditions de Signorini :

$$[u_\eta] \leq 0, \quad \sigma_\eta \leq 0, \quad \sigma_\eta [u_\eta] = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq -\mu \sigma_\eta & \text{si } [u_\tau] = 0 \\ \sigma_\tau = \mu \sigma_\eta \frac{[u_\tau]}{|[u_\tau]|} & \text{si } [u_\tau] \neq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

où σ_η et σ_τ est la composante normale et tangentielle, respectivement, de la contrainte limite, et $[u_\eta]$ représente le saut des déplacements dans la direction normale : soit le contact (*a.i.* $[u_\eta] = 0$) ou séparation (*a.i.* $[u_\eta] < 0$) sont autorisés. En d'autre formule ($[u_\eta] \leq 0$) est la condition de non-pénétration, $[u_\tau]$ représente le saut des déplacements dans la direction

tangentielle et $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. Il s'agit d'une version statique de la loi de Coulomb et doit être considérée soit comme un modèle mécanique adapté au cas des chargements proportionnels, soit comme une première approximation d'un modèle plus réaliste basé sur une loi de frottement u^1, u^2 (voir par exemple Shillor et Sofonea (1997), Rochdi (1998)). La loi de frottement (1.11) stipule que le cisaillement tangentiel ne peut pas dépasser la résistance de friction maximale $-\mu\sigma_\eta$. Ensuite, si l'inégalité est vérifiée, les surfaces adhèrent et sont appelées «état de collage», et l'égalité tient pour un glissement relatif, ce que l'on appelle l'état de glissement. Par conséquent, la surface de contact Γ_3 est divisée en trois zones : la zone de bâton, la zone de glissement et la zone de séparation dans laquelle $[u_\eta] < 0$, i.e, il n'y a pas de contact. Les bornes de ces zones sont des frontières libres puisqu'elles sont a priori inconnues, et font partie du problème. Il n'y a pratiquement aucune littérature traitant de ces frontières libres.

Pour résumer, les conditions de contact avec frottement (1.6), (1.10) et (1.11) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \equiv \sigma_\eta \\ [u_\eta] \leq 0, \quad \sigma_\eta \leq 0, \quad \sigma_\eta[u_\eta] = 0 \\ \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ |\sigma_\tau| \leq -\mu\sigma_\eta \\ |\sigma_\tau| < -\mu\sigma_\eta \Rightarrow [u_\tau] = 0 \\ |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\eta \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \sigma_\tau = -\lambda[u_\tau] \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.12)$$

1.1.4 Formulation mathématique d'un problème de contact avec frottement

On considère ici le problème mécanique qu'on va étudier dans le chapitre 2.

Problème $\mathbb{P}$: pour $\ell = 1, 2$. Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec u^ℓ :

$\Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$ et les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \rightarrow S_N$, tels que :

$$\begin{aligned} \sigma^\ell &= F^\ell(\varepsilon(u^\ell)) && \text{dans} && \Omega^\ell \\ \text{Div} \sigma + f^\ell &= 0 && \text{dans} && \Omega^\ell \\ u^\ell &= 0 && \text{sur} && \Gamma_1^\ell \\ \sigma^\ell \eta^\ell &= g^\ell && \text{sur} && \Gamma_2^\ell \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \equiv \sigma_\eta \\ (b) & [u_\eta] \leq 0, \quad \sigma_\eta \leq 0, \quad \sigma_\eta[u_\eta] = 0 \\ (c) & \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ (d) & |\sigma_\tau| \leq -\mu\sigma_\eta \\ (e) & |\sigma_\tau| < -\mu\sigma_\eta \Rightarrow [u_\tau] = 0 \\ (f) & |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\eta \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \sigma_\tau = -\lambda[u_\tau] \end{array} \right. \quad \text{sur} \quad \Gamma_3.$$

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.13)$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\langle u, \nu \rangle_H \leq \| u \|_H \| \nu \|_H, \quad \forall u, \nu \in H. \quad (1.14)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (1.13).

Soit H' l'espace dual de H c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{\nu \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, \nu \rangle_{H' \times H}}{\| \nu \|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 1.1. [12](*Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, \nu \rangle_{H' \times H} = (f, \nu)_H \quad \forall \nu \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \quad i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, \nu \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, \nu \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i \nu \rangle_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et on écrit} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega)$$

Théorème 1.2. (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.3. [2] (*trace de Sobolev*)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ telle que $\delta u = u|_\Gamma$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Rémarque 1.1. L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_\Gamma$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Rémarque 1.2. On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

1.2.3 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont introduits dans cette section. Nous désignons par S_N l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^N$, ou de manière équivalente, l'espace des matrices symétriques d'ordre N . Les produits internes et les normes correspondantes sur $\mathbb{R}^N$ et S_N sont

$$\begin{aligned} u^\ell \cdot \nu^\ell &= u_i^\ell \cdot \nu_i^\ell, \quad \|\nu^\ell\| = (\nu^\ell, \nu^\ell)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u^\ell, \nu^\ell \in \mathbb{R}^N \\ \sigma^\ell \cdot \tau^\ell &= \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, \quad \|\tau^\ell\| = (\tau^\ell, \tau^\ell)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in S_N \end{aligned}$$

Ici et ci-dessous $i, j = 1, 2, \dots, N$, et la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée. Soit deux domaines bornés Ω^ℓ , $l = 1, 2$ de l'espace $\mathbb{R}^N$ ($N=2,3$) Il y a domaine borné avec une frontière Lipschitz Γ^ℓ et soient $\eta^\ell = (\eta_i^\ell)$ le vecteur normale extérieure unitaire à Γ^ℓ . Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u^ℓ et σ^ℓ :

$$\begin{cases} H^\ell = \{u^\ell = (u_i^\ell)/u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^N, \\ H_1^\ell = \{u^\ell = (u_i^\ell)/u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^N, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)/\sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))_S^{N \times N}, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell)/\sigma_{ij}^\ell \in \mathcal{H}^\ell(\Omega^\ell), \sigma_{ij,j}^\ell \in H^\ell\}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Les espaces $H^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont des espaces réels de Hilbert munis des produits caïraes donnés par :

$$\begin{cases} \langle u^\ell, \nu^\ell \rangle_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell \cdot \nu_i^\ell dx, \\ \langle u^\ell, \nu^\ell \rangle_{H_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell \cdot \nu_i^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell \cdot \nabla \nu^\ell dx, \\ \langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell dx, \\ \langle \sigma^\ell, \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} \sigma^\ell \cdot \operatorname{div} \tau^\ell dx. \end{cases} \quad (1.16)$$

Respectivement Ici $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\operatorname{div} : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par :

$$\varepsilon(u^\ell) = \frac{1}{2}(\nabla u^\ell + (\nabla \nu^\ell)^T), \quad \operatorname{div} \sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell)$$

Les normes sur les espaces $H^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}, \|\cdot\|_{H_1^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement. Siot $\gamma^\ell : H_1^\ell \rightarrow H_{\Gamma^\ell}$ est la application de trace.

Puisque la frontière Γ^ℓ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $\nu^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons aussi la notation ν^ℓ pour la trace $\gamma^\ell \nu^\ell$ de ν^ℓ sur Γ^ℓ et nous notons par ν_η^ℓ et ν_τ^ℓ les composantes normales et tangentielles de ν^ℓ sur Γ^ℓ données par :

$$\nu_\eta^\ell = \nu^\ell \cdot \eta^\ell, \quad \nu_\tau^\ell = \nu^\ell - \nu_\eta^\ell \eta^\ell.$$

Soit H'_{Γ^ℓ} est un dual de $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^N$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$ désigner l'appariement de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour chaque élément $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, soit $\sigma^\ell \nu^\ell$ est un élément H'_{Γ^ℓ} donne par :

$$\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell \nu^\ell \rangle = \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \langle \operatorname{div} \sigma^\ell, \nu^\ell \rangle_{H^\ell} \quad \forall \nu^\ell \in H_1^\ell.$$

Désigne par σ_η^ℓ et σ_τ^ℓ la trace normale et la trace tangential de $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, respectivement. Si σ^ℓ est continûment différentiable sur $\overline{\Omega}^\ell$, tel que :

$$\sigma_\eta^\ell = (\sigma^\ell \eta^\ell) \cdot \eta^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \eta^\ell - \sigma_\eta^\ell \eta^\ell,$$

$$\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \gamma^\ell \nu^\ell \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \cdot \gamma^\ell \nu^\ell da,$$

pour tous $\nu^\ell \in H_1^\ell$, où da est un élément de mesure de surface.

L'espace des déplacements admissibles V^ℓ est un sous-espace fermé de H_1^ℓ défini par :

$$V^\ell = \{\nu^\ell \in H_1^\ell / \nu^\ell = 0, \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ^ℓ telle que :

$$\|\varepsilon(\nu^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|\nu^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall \nu^\ell \in V^\ell. \quad (1.17)$$

Sur V^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par :

$$\langle u^\ell, \nu^\ell \rangle_{V^\ell} = \langle \varepsilon(u^\ell), \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, \nu^\ell \in V^\ell, \quad (1.18)$$

et soit $\|\cdot\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\varepsilon(\nu^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} = \|\nu^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall \nu^\ell \in V^\ell. \quad (1.19)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{V^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|\nu^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^N} \leq c_0 \|\nu^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall \nu^\ell \in V^\ell. \quad (1.20)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2$$

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Définition 1.1. Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire. On dit que l'opérateur A est :

1. monotone si

$$\langle Au - A\nu, u - \nu \rangle_H \geq 0, \quad \forall u, \nu \in H,$$

2. *fortement monotone* s'il existe $m > 0$ tel que

$$\langle Au - A\nu, u - \nu \rangle_H \geq m \|u - \nu\|_H^2, \quad \forall u, \nu \in H,$$

3. *Lipschitz* s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - A\nu\|_H \leq L \|u - \nu\|_H, \quad \forall u, \nu \in H,$$

4. *hémicontinu* si

$$\forall u, \nu \in H, \quad \text{l'application } t \rightarrow A(u + t\nu) : \mathbb{R} \rightarrow H' \text{ est continue.}$$

Rémarque 1.3. Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par :

$$a(u, \nu) = \langle Au, \nu \rangle \quad \forall u, \nu \in H \quad (1.21)$$

On a alors les propriétés suivantes :

1. a est bilinéaire si et seulement si A linéaire
2. a est continue si et seulement si A continu.
3. a est coercive si et seulement si A est défini positif.

Lemme 1.1. si $A : H \rightarrow H$ est un opérateur fortement monotone et Lipschitz, Alors A est inversible et A^{-1} fortement monotone et Lipschitz.

Théorème 1.4. [6] (**Théorème du point fixe de Banach**)

Soit K une partie non vide et fermé de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e, $\exists k \in]0, 1[$ tel que :

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(\nu)\|_X \leq k \|u - \nu\|_X, \quad \forall u, \nu \in X.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possè de un point fixe unique dans K .

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur sont définies récursivement par $\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1})$ pour $n \geq 2$.

Théorème 1.5. *Sous les mêmes conditions du Théorème 1.4, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Définition 1.2. *Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\|a(u, \nu)\|_H \leq M \|u\|_H \|\nu\|_H, \quad \forall u, \nu \in H.$$

Définition 1.3. *Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ tel que :*

$$a(u, u) \geq m \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

Théorème 1.6. [12] (**Théorème du Lax-Milgram**)

Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait :

$$a(u, \nu) = l(\nu), \quad \forall \nu \in X. \quad (1.22)$$

De plus, si $a(., .)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_H \leq \frac{1}{2}a(\nu, \nu) - \langle \nu, \nu \rangle_H, \quad \forall \nu \in X. \quad (1.23)$$

Théorème 1.7. [6] (**Théorème du Stampachia**)

Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. soit $K \subset X$ un sous-ensemble convexe fermé et non vide, et soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in K$ qui satisfait :

$$a(u, \nu - u) \geq l(\nu - u), \quad \forall \nu \in K. \quad (1.24)$$

De plus, si $a(., .)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_H \leq \frac{1}{2}a(\nu, \nu) - \langle \nu, \nu \rangle_H, \quad \forall \nu \in K. \quad (1.25)$$

Définition 1.4. *Soit $u^\ell \in H_1^\ell$. Alors $\varepsilon(u^\ell) = 0$ si $u^\ell \in \mathcal{R}^\ell$, i.e*

$$\mathcal{R}^\ell = \{u^\ell \in H_1^\ell / \varepsilon(u^\ell) = 0\}. \quad (1.26)$$

Théorème 1.8. [10](*inégalité de Korn*)

Soit V^ℓ un sous-espace fermé de H_1^ℓ tel que :

$$V^\ell \cap \mathcal{R}^\ell = \{0\}. \quad (1.27)$$

Alors

$$\|\varepsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq C \|u^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall u^\ell \in V^\ell. \quad (1.28)$$

où $C > 0$ ne dépendant que Ω^ℓ et V^ℓ .

Supposant maintenant que $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, est une partition de Γ et soit V le sous-espace fermé de H_1 , définie par :

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1\}. \quad (1.29)$$

Corollaire 1.1. Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, alors l'inégalité de Korn (1.25) est vérifiée sur les sous-espace V définie par (1.26).

En utilisant ce résultat, il vient

Rémarque 1.4. Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, alors l'application $u \rightarrow \|\varepsilon\|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur les sous-espace V définie par (1.26), équivalente à la norme canonique $\|\cdot\|_{H_1}$.

Chapitre 2

Etude variationnelle d'un problème non linéaire de contact avec frottement

Dans ce chapitre, on considère un problème statique de contact avec frottement de coulomb entre deux corps élastiques ayant une loi de comportement non linéaire. En utilisant la formule de Green et l'inégalité de Korn, on établit deux formulations variationnelles du problème considéré, (notés $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$) dont l'avantage est que la première formulation ne dépend que du champ de déplacement, tandis que la deuxième dépend uniquement de tenseur de contrainte. En utilisant le théorème de Stampachia, on démontre que chacun des problèmes $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, possèdent une solution unique. Et on termine ce chapitre par étudier le lien entre les solutions des problèmes variationnels $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$.

2.1 Formulation du problème et hypothèses

2.1.1 Position du problème

Dans ce paragraphe, on considère le problème non linéaire suivant :

Problème $\mathbb{P}$: Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$ et les

champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \rightarrow S_N$, $\ell=1,2$ tels que :

$$\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell)) \quad \text{dans} \quad \Omega^\ell \quad (2.1)$$

$$\text{Div} \sigma + f^\ell = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^\ell \quad (2.2)$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\ell \quad (2.3)$$

$$\sigma^\ell \eta^\ell = g^\ell \quad \text{sur} \quad \Gamma_2^\ell \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \sigma_\eta^1 = \sigma_\eta^2 \equiv \sigma_\eta \\ (b) & [u_\eta] \leq 0, \quad \sigma_\eta \leq 0, \quad \sigma_\eta [u_\eta] = 0 \\ (c) & \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ (d) & |\sigma_\tau| \leq -\mu \sigma_\eta \\ (e) & |\sigma_\tau| < -\mu \sigma_\eta \Rightarrow [u_\eta] = 0 \\ (f) & |\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\eta \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \quad \sigma_\tau = -\lambda [u_\tau] \end{array} \right. \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad (2.5)$$

Où σ_η désigne la contrainte normale (ou pression de contact), $[u_\eta]$ désigne l'arrête pour le saut relativement au champ du déplacement à travers Γ_3 , $[u_\tau]$ et $\sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \eta^\ell - \sigma_\eta \eta^\ell$ représente la composante tangentielle de contrainte. L'équation (2.1) représente la loi de comportement élastique, où F^ℓ est un opérateur linéaire ou non linéaire, l'équation (2.2) représente l'équation d'équilibre où f^ℓ désigne la densité des forces volumiques agissant sur le corps élastique occupant le domaine Ω^ℓ les relations (2.3) et (2.4) sont des conditions aux limites classiques des déplacements-tractions. Les conditions aux limites (2.5) représentent les conditions de contact de Signorini avec frottement, sur Γ_3 (voir Fig.1.).

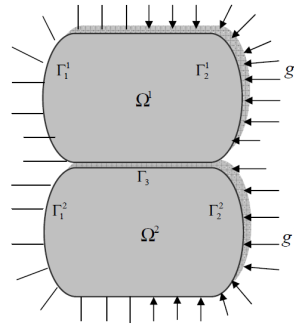


FIGURE 2.1 – Contact avec frottement entre deux corps élastiques

2.1.2 Hypothèses

Pour étudier le problème $\mathbb{P}$, on aura besoin des hypothèses de régularité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F^\ell : S_N \rightarrow S_N \text{ est un opérateur tel que :} \\ (a) : \exists m > 0 \ (F^\ell(x, \varepsilon_1) - F^\ell(x, \varepsilon_2))(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid^2 : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \text{ a.i } x \in \Omega^\ell \\ (b) : \exists L > 0 \mid F^\ell(x, \varepsilon_1) - F^\ell(x, \varepsilon_2) \mid \leq L \mid \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mid : \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \text{ a.i } x \in \Omega^\ell \\ (c) : \forall \varepsilon \in S_N : x \mapsto F^\ell(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurables sur } \Omega^\ell \\ (d) : \text{l'applications } x \mapsto F^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$f^\ell \in H^\ell, \quad \ell = 1, 2 \quad (2.7)$$

$$g^\ell \in H'_{\Gamma_2^\ell} \quad (2.8)$$

tandis que le coefficient de frottement est tel que

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad (2.9)$$

Rémarque 2.1. .

L'hypothèse (2.6) nous permet de considérer l'opérateur noté encore par F^ℓ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell \quad \text{telque} \\ F^\ell \varepsilon(x) = F^\ell(x, \varepsilon(x)) \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{H}^\ell \text{ } x \in \Omega^\ell \end{array} \right.$$

En effet, si $\varepsilon \in \mathcal{H}^\ell$ en utilisant (2.6.a), il résulte que $x \mapsto \varepsilon(x)$ est une fonction mesurable de Ω^ℓ à valeurs dans S_N et d'après (2.6.b), il résulte :

$$\int_{\Omega^\ell} |F^\ell \varepsilon(x)|^2 dx \leq L^2 \int_{\Omega^\ell} |\varepsilon(x)|^2 dx < +\infty$$

On a donc $F^\ell(\varepsilon) \in \mathcal{H}^\ell$

On remarque également que d'après (2.6.a.b), l'opérateur $F^\ell : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ est un opérateur fortement monotone et de Lipchitz, car il satisfait aux inégalités :

$$\langle F^\ell(\varepsilon_1) - F^\ell(\varepsilon_2), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq m \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}^\ell \quad (2.10)$$

$$\|F^\ell(\varepsilon_1) - F^\ell(\varepsilon_2)\|_{\mathcal{H}^\ell} \leq L \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}^\ell \quad (2.11)$$

Rémarque 2.2. Etant donnée que l'opérateur $F^\ell : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ est fortement monotone et Lipchitz, l'opérateur F^ℓ est donc inversible et $(F^\ell)^{-1} : \mathcal{H}^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ est également fortement monotone et Lipchitz.

Rémarque 2.3. Les hypothèses (2.7), (2.8) sont des hypothèses de régularité sur les données f, g qui sont nécessaires pour que le problème (2.3)-(2.5) ait une solution de la régularité $u \in H_1, \sigma \in \mathcal{H}_1$. En effet, puisque $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell, \ell = 1, 2$ alors $\text{Div} \sigma \in H^\ell$ et d'après (2.2), il vient $f^\ell \in H^\ell$, de plus $\sigma^\ell \eta^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ ce qui entraîne que $g \in H'_{\Gamma_2^\ell}$ en utilisant (2.4).

Pour l'étude du problème $\mathbb{P}$, on considère le sous espace fermé $V(\Omega^\ell)$ de H_1^ℓ défini par :

$$V(\Omega^\ell) = \{ \nu^\ell \in H_1^\ell / \nu^\ell = 0 \text{ p.p sur } \Gamma_1^\ell \}. \quad (2.12)$$

Et on considère l'espace V défini par :

$$V = V(\Omega^1) \times V(\Omega^2). \quad (2.13)$$

Sur cet espace, on définit l'opérateur bilinéaire comme suit :

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ \langle \nu, \omega \rangle = \sum_{\ell=1}^2 \langle \varepsilon(\nu^\ell), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \end{cases} \quad (2.14)$$

Lemme 2.1. si $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0, \ell = 1, 2$ V est un espace du Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$.

Démonstration. Il est clair que l'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est une forme bilinéaire positive, symétrique. On pose

$$\|\nu\|_V = \sqrt{\langle \nu, \nu \rangle_V}. \quad (2.15)$$

En utilisant l'inégalité de Korn, il résulte qu'il existe une constante m^ℓ telle que :

$$\|\varepsilon(\nu^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq m^\ell \|\nu^\ell\|_{H_1^\ell} \quad \forall \nu^\ell \in V^\ell.$$

Pour $m = \min(m^1, m^2)$, on a $\|\nu\|_V \geq m \|\nu\|_{H_1} \quad \forall \nu \in V$ ce qui nous permet de conclure que si $\|\nu\|_V = 0$ alors $\nu = 0$, d'où il résulte que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un opérateur défini positif et par conséquent $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un produit scalaire sur V . $\square$

Il ne reste que de démontrer que V est complet. Ceci est clair en utilisant le fait que V est fermé dans H_1 , ce qui achève la démonstration.

Rémarque 2.4. Les deux normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_{H_1}$ sont équivalentes sur V .

Il est facile de voir que l'application :

$$\nu^\ell \mapsto \int_{\Omega^\ell} f^\ell \cdot \nu^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \nu^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell$$

est une forme linéaire continue sur $V(\Omega^\ell)$, en appliquant le Théorème de représentation du Riesz-Fréchet, il résulte qu'il existe $\varphi^\ell \in V(\Omega^\ell)$ tel que :

$$\langle \varphi^\ell, \nu^\ell \rangle_{V(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} f^\ell \cdot \nu^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \nu^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell \quad \forall \nu^\ell \in V(\Omega^\ell) \quad (2.16)$$

et soit $j : \mathcal{H}_1^\ell \times V \rightarrow \mathbb{R}$ être le fonctionnel

$$j(\sigma, \nu) = - \int_{\Gamma_3} \mu \sigma_\eta |[\nu_\tau]| d\Gamma_3 \quad (2.17)$$

où $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne. soit $\sigma \in \mathcal{H}_1^\ell$, le fonctionnel $j(\sigma, \cdot)$ est continu, convexe et non différentiable. Ainsi $\sigma \in \mathcal{H}_1^\ell$ est convexe et semi-continue inférieurement sur V .

On pose $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$. En outre on définit respectivement les ensembles des “déplacement admissible” et l'ensemble des “contrainte admissible” suivants :

$$U_{ad} = \{ \nu = (\nu^1, \nu^2) \in V \mid [\nu_\eta] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \} \quad (2.18)$$

$$\Sigma_{ad}(g) = \left\{ \tau \in \widehat{\mathcal{H}}_1 \mid \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(g, \nu) \geq \langle \varphi, \nu \rangle \quad \forall \nu \in U_{ad} \right\}, \quad (2.19)$$

où

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \{ \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathcal{H}_1 \mid \sigma^1 \eta^1 = \sigma^2 \eta^2 \text{ sur } \Gamma_3 \}$$

aussi, pour tous $g \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ avec $g_\eta^1|_{\Gamma_3} \leq 0$ l'ensemble $\Sigma_{ad}(g)$ est non vide ($g \in \Sigma_{ad}(g)$) fermé et convexe.

Soit a l'application définie par :

$$\begin{cases} a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ a(\nu, \omega) = \sum_{\ell=1}^2 \langle F^\ell(\varepsilon(\nu^\ell)), (\varepsilon(\omega^\ell)) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(\nu^\ell)) \cdot (\varepsilon(\omega^\ell)) d\Omega^\ell \end{cases} \quad (2.20)$$

2.2 Formulation variationnelle.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la formulation variationnelle du problème considéré qui consiste dans une première formulation, notée $\mathbb{P}_1$, à trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ tandis que dans la seconde formulation, notée $\mathbb{P}_2$, on cherche les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$. Ces résultats sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Si le couple des fonctions (u, σ) est une solution du problème $\mathbb{P}$ alors :*

$$u \in U_{ad}, \quad \sigma \in \Sigma_{ad}(\sigma), \quad (2.21)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle_V \quad \forall \nu \in U_{ad}, \quad (2.22)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\sigma). \quad (2.23)$$

Démonstration. Siot $\nu \in U_{ad}$ en utilisant la formule de Green on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = - \sum_{\ell=1}^2 \langle \text{Div} \sigma^\ell, \nu^\ell \rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, \nu^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}},$$

donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \sigma^\ell \cdot \nu^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \cdot \nu^\ell \eta^\ell d\Gamma^\ell.$$

De (2.2) et (2.3) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f^\ell \cdot \nu^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell \cdot \nu^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \cdot \nu^\ell \eta^\ell d\Gamma_3^\ell$$

et de (2.16)

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, \nu \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta[\nu_\eta] d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau[\nu_\tau] d\Gamma_3,$$

d'après (2.18) on déduit

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau[\nu_\tau] d\Gamma_3,$$

donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V - \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |\nu_\tau| d\Gamma_3.$$

En utilisant (2.5.d), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \mu \sigma_\eta |\nu_\tau| d\Gamma_3.$$

Alors de (2.17) on déduit

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V. \quad (2.24)$$

Si $u \in U_{ad}$ en appliquant la formule de Green on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = - \sum_{\ell=1}^2 \langle Div \sigma^\ell, u^\ell \rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, u^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}},$$

donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} Div \sigma^\ell \cdot u^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \cdot u^\ell \eta^\ell d\Gamma^\ell.$$

De (2.2) et (2.3) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f^\ell \cdot u^\ell d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell \cdot u^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \cdot u^\ell \eta^\ell d\Gamma_3^\ell$$

et de (2.16)

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta [u_\eta] d\Gamma_3 + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau [u_\tau] d\Gamma_3.$$

En utilisant (2.5.b), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau [u_\tau] d\Gamma_3.$$

Soit

$$\Gamma_{3,1} = \{x \in \Gamma_3 / \quad |\sigma_\tau| < -\mu \sigma_\eta\},$$

$$\Gamma_{3,2} = \{x \in \Gamma_3 / \quad |\sigma_\tau| = -\mu \sigma_\eta\}.$$

Donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V + \int_{\Gamma_{3,1}} \sigma_\tau[u_\tau] d\Gamma_{3,1} + \int_{\Gamma_{3,2}} \sigma_\tau[u_\tau] d\Gamma_{3,2}.$$

En utilisant (2.5.e), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V + \int_{\Gamma_{3,2}} \sigma_\tau[u_\tau] d\Gamma_{3,2},$$

de (2.5.f) on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V - \lambda \int_{\Gamma_3} |[u_\tau]|^2 d\Gamma_3,$$

donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V - \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |u_\tau| d\Gamma_3.$$

Alors

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, u \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \mu \sigma_\eta |u_\tau| d\Gamma_3,$$

de (2.17) on résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) = \langle \varphi, u \rangle_V. \quad (2.25)$$

de (2.24) et (2.25) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V - \langle \varphi, u \rangle_V, \quad (2.26)$$

donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle_V.$$

D'où l'inégalité (2.22).

Pour $\nu = 2u \in U_{ad}$ et pour $\nu = 0 \in U_{ad}$ dans (2.22), il résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) = \langle \varphi, u \rangle_V. \quad (2.27)$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) &= \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) \end{aligned}$$

En utilisant (2.27), (2.19) et (2.22), il en découle :

$$\forall \nu \in U_{ad} : \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle_V + \langle \varphi, u \rangle_V$$

Ou encore :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V.$$

Ce qui implique que $\sigma \in \Sigma_{ad}$.

On a

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Sigma_{ad} : \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) - j(\sigma, u) \\ = \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) - \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} - j(\sigma, u). \end{aligned}$$

De (2.19), (2.27) il en résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq \langle \varphi, u \rangle_V - \langle \varphi, u \rangle_V = 0.$$

□

D'où l'inégalité (2.23).

En tenant compte la remarque 2.2, le lemme précédent nous permet de considérer les deux formulations faibles du problème $\mathbb{P}$.

Problème $\mathbb{P}_1$ Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2)$ avec $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$, tels que :

$$\begin{cases} u \in U_{ad}, & F^1(\varepsilon(u^1))\eta^1 = F^2(\varepsilon(u^2))\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3 \\ a(u, \nu - u) + j(F(\varepsilon(u)), \nu) - j(F(\varepsilon(u)), u) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle_V \quad \forall \nu \in U_{ad} \end{cases} \quad (2.28)$$

où

$$F(\varepsilon(u)) = F^1(\varepsilon(u^1)) \text{ ou } F(\varepsilon(u)) = F^2(\varepsilon(u^2)). \quad (2.29)$$

Problème $\mathbb{P}_2$ Trouver les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell : \Omega^\ell \rightarrow S_N$, tels que :

$$\sigma \in \Sigma_{ad}(\sigma), \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, (F^\ell)^{-1}(\sigma^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (2.30)$$

Les détails de ces correspondances peuvent être trouvés dans [11]. Ainsi, le problème (2.28) peut être réécrit comme la formulation hybride directe suivante :

Problem $\overline{\mathbb{P}}_1$ pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs de déplacement $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$, tel que :

$$u \in U_{ad} \quad F^1(\varepsilon(u^1))\eta^1 = F^2(\varepsilon(u^2))\eta^2 = \sigma\eta \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.31)$$

$$a(u, \nu) = \langle \varphi, \nu \rangle + \langle \sigma_\eta, [\nu_\eta] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} + \langle \sigma_\tau, [\nu_\tau] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} \quad \forall \nu \in V \quad (2.32)$$

$$\langle \sigma_\eta, [\nu_\eta] - [u_\eta] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} \geq 0 \quad \forall \nu \in U_{ad} \quad (2.33)$$

$$\langle \sigma_\tau, [\nu_\tau] - [u_\tau] \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} - \langle \mu \sigma_\eta, |[\nu_\tau]| - |[u_\tau]| \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma_3} \geq 0 \quad \forall \nu \in V \quad (2.34)$$

Pour chaque corps Ω^ℓ . Nous définissons la fonctionnelle d'énergie potentielle totale J^ℓ par

$$J^\ell(\nu^\ell) = \frac{1}{2}a(\nu^\ell, \nu^\ell) - \langle \varphi^\ell, \nu^\ell \rangle_{V^\ell} \quad \forall \nu \in V^\ell$$

et on pose

$$J(\nu) = J^1(\nu^1) + J^2(\nu^2) \quad \forall \nu \in V \quad (2.35)$$

l'énergie potentielle totale du système à deux corps. Avec l'hypothèse $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, le fonctionnel J est convexe, G-différentiable et coercitive sur V . Le théorème suivant (voir [16], Théorème 3.8) permet de remplacer l'inégalité variationnelle (2.28) par un problème de minimisation.

Théorème 2.1. Soit $\theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ et supposons $G : U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ est de la forme $G(\nu) = J(\nu) + j(\theta, \nu)$ où $J(\cdot)$ et $j(\theta, \cdot)$ sont convexes et semi-continues inférieurement et $J(\cdot)$ G-différentiable sur U_{ad} . Alors, si u_θ est un minimiseur de G sur U_{ad} .

$$\langle DJ(u_\theta), \nu - u_\theta \rangle + j(\theta, \nu) - j(\theta, u_\theta) \geq 0 \quad \forall \nu \in U_{ad}. \quad (2.36)$$

Inversement, si (2.36) vaut pour $u_\theta \in U_{ad}$, alors u_θ est un minimiseur de G .

Dans (2.36), $DJ(u_\theta)$ est le gradient de J . Puisque J est un quadratique fonctionnel, (2.36) est précisément

$$u_\theta \in U_{ad}, \quad a(u_\theta, \nu - u_\theta) + j(\theta, \nu) - j(\theta, u_\theta) \geq \langle \varphi, \nu - u_\theta \rangle_V \quad \forall \nu \in U_{ad}. \quad (2.37)$$

Avec l'hypothèse $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, le fonctionnel $J(\cdot) + j(\theta, \cdot)$ est strictement convexe et coercitive, alors il existe une solution unique à (2.36).

Avec les préparations ci-dessus, le problème de contact unilatéral avec le frottement de Coulomb peut être formulé comme le problème de minimisation contrainte.

Problème $\widehat{\mathbb{P}}_1$ Pour $\ell = 1, 2$. Trouver les champs de déplacement $u^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}^N$, tel que :

$$\begin{cases} u \in U_{ad}, & F^1(\varepsilon(u^1))\eta^1 = F^2(\varepsilon(u^2))\eta^2 \text{ sur } \Gamma_3 \\ J(u) + j(F(\varepsilon(u)), u) \leq J(\nu) + j(F(\varepsilon(u)), \nu) \quad \forall \nu \in U_{ad} \end{cases} \quad (2.38)$$

Rémarque 2.5. Le lemme 2.2, nous permet de conclure facilement que si (u, σ) est une solution régulière du problème $\mathbb{P}$ alors u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$ et σ est une solution du problème $\mathbb{P}_2$.

Dans la suite on s'intéresse à étudier le lien entre les problèmes variationnels qu'on a introduit et le problème $\mathbb{P}$. On commence par.

Théorème 2.2. Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $\ell = 1, 2$ et si $u = (u^1, u^2) \in V$ est une solution du problème variationnel $\mathbb{P}_1$, alors (u, σ) est une solution du problème $\mathbb{P}$.

Démonstration.

a/(2.2) : Pour tout $\Phi^\ell \in D^\ell \equiv (D(\Omega^\ell))^N$, on pose $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ avec $\Phi^{3-\ell} = 0$, $\ell = 1, 2$ en substituant $\nu = u \pm \Phi \in U_{ad}$ avec (2.28) et $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$ et en utilisant la formule de Green, ainsi que l'inégalité (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(\nu^\ell - u^\ell) d\Omega^\ell - \int_{\Omega^\ell} f^\ell(\nu^\ell - u^\ell) d\Omega^\ell - \int_{\Gamma_2^\ell} \mathbf{g}^\ell(\nu^\ell - u^\ell) d\Gamma_2^\ell \\ &= \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell(\nu^\ell - u^\ell) d\Gamma^\ell - \int_{\Omega^\ell} (Div \sigma^\ell + f^\ell)(\nu^\ell - u^\ell) d\Omega^\ell \\ &= \pm \int_{\Omega^\ell} (Div \sigma^\ell + f^\ell) \Phi^\ell d\Omega^\ell \end{aligned}$$

ce qui implique (2.2).

b/(2.4) : Soit $\nu \in U_{ad}$, en appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \text{Div} \sigma^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} \end{aligned}$$

Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, de l'équation d'équilibre, on conclut :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} = \sum_{\ell=1}^2 \langle F^\ell(\varepsilon(u^\ell)), \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}.$$

Ce qui implique en utilisant (2.28) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle.$$

Et de (2.16), on tire :

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + \sum_{\ell=1}^2 \langle f^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle f^\ell, \nu^\ell - u^\ell \rangle_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathbf{g}^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}}. \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle \mathbf{g}^\ell, (\nu^\ell - u^\ell) \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}}. \quad (2.39)$$

Pour tout $\omega^\ell \in D(\Omega^\ell \cup \Gamma_2^\ell)^N$. On pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ avec $\omega^{3-\ell} = 0$ par substitution de $\nu = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (2.39), il vient :

$$\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \omega^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}} = \langle \mathbf{g}^\ell, \omega^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}}.$$

D'où la condition (2.4)

c/(2.5) : Pour tout $\omega^\ell \in H_1^\ell$ et $\omega^\ell \eta^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ avec $\omega_\eta^\ell = 0$ sur Γ_3^ℓ et $\omega_\tau^1 = \omega_\tau^2$ sur Γ_3 si on pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ pour $\nu = u \pm \omega \in U_{ad}$ de (2.39), on tire :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^\ell \omega_\tau^\ell d\Gamma_3 = 0.$$

C'est à dire

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^1 \omega_\tau^1 d\Gamma_3 = - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^2 \omega_\tau^1 d\Gamma_3.$$

Et donc : $\sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2$ sur Γ_3 et de (2.28), d'où la condition (2.5.a.c) siot $\omega^\ell \in D(\Omega^\ell \cup \Gamma_3)^N$, $\omega_\tau^\ell = 0$, $\omega_\eta^\ell \leq 0$ sur Γ_3 , ,si on pose $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ $\omega^{3-\ell} = 0$, en remplaçant $\nu = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (2.39), on trouve :

$$\langle \sigma^\ell \eta^\ell, \omega^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_3} \times H_{\Gamma_3}} \geq 0.$$

Et puisque $\omega_\tau^\ell = 0$, $\omega_\eta^\ell \leq 0$ sur Γ_3 , on a alors

$$\langle \sigma_\eta^\ell, \omega_\eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_3} \times H_{\Gamma_3}} \geq 0.$$

D'où

$$\sigma_\eta^\ell \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad (2.40)$$

maintenant, par $u \in U_{ad}$ on a

$$[u_\eta] \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad (2.41)$$

Pour $\nu = 2u \in U_{ad}$ et pour $\nu = 0 \in U_{ad}$ tell que $u_\tau = 0$ dans (2.39), il résulte :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell \eta^\ell, u^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = \sum_{\ell=1}^2 \langle g^\ell, u^\ell \eta^\ell \rangle_{H'_{\Gamma_2^\ell} \times H_{\Gamma_2^\ell}}.$$

Et moyennant (2.4) avec $u^\ell \eta^\ell = 0$ sur Γ_1^ℓ on a donc

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \eta^\ell . u^\ell \eta^\ell d\Gamma_3 = 0.$$

En utilisant (2.5.a), on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma_\eta(u^\ell . \eta^\ell) d\Gamma_3 = 0$$

ou encore :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\eta[u_\eta] d\Gamma_3 = 0.$$

D'où

$$\sigma_\eta[u_\eta] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.42)$$

De (2.40), (2.41) et (2.42), on conclut (2.5.b).

Suppose que $\nu \in U_{ad}$ avec $\nu_\eta = u_\eta$ sur Γ_3 et utilise (2.4),(2.5.a.b) dans (2.39) on obtient :

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau[\nu_\tau] - \mu\sigma_\eta|[\nu_\tau]|)d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau[u_\tau] - \mu\sigma_\eta|[u_\tau]|)d\Gamma_3 \geq 0 \quad (2.43)$$

et on pose $\nu_\tau = 2u_\tau$ (respectif $\nu_\tau = 0$) dans (2.43) on déduire

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau[u_\tau] - \mu\sigma_\eta|[u_\tau]|)d\Gamma_3 = 0 \quad (2.44)$$

de (2.43) et (2.44) on a :

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau[\nu_\tau] - \mu\sigma_\eta|[\nu_\tau]|)d\Gamma_3 \geq 0 \quad \forall \nu \in U_{ad} \quad (2.45)$$

et soit $N = \{x \in \Gamma_3 / |\sigma_\tau| > -\mu\sigma_\eta\}$ de $\nu \in U_{ad}$ avec $[\nu_\tau]|_{\Gamma_3-N} = 0$ et $[\nu_\tau]|_N = -\sigma_\tau$ dans (2.45), on déduire :

$$\int_N (-|\sigma_\tau|^2 - \mu\sigma_\eta|\sigma_\tau|)d\Gamma_3 \geq 0 \quad (2.46)$$

puisque $|\sigma_\tau| > -\mu\sigma_\eta$ et $\sigma_\eta \leq 0$ sur N , alors $-|\sigma_\tau| - \mu\sigma_\eta < 0$ et $|\sigma_\tau| \neq 0$ sur N , implique :

$$-|\sigma_\tau|^2 - \mu\sigma_\eta|\sigma_\tau| > 0 \quad \text{sur } N. \quad (2.47)$$

Utilisant (2.46) et (2.47), on obtient $mes(N) = 0$, on déduire :

$$|\sigma_\tau| \leq -\mu\sigma_\eta \quad p.p \quad \text{sur } \Gamma_3$$

et donc (2.5.d) vérifie

utilisant maintenant (2.5.d) et (2.44) on déduire :

$$\sigma_\tau[u_\tau] - \mu\sigma_\eta|[u_\tau]| = 0 \quad p.p \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.48)$$

de plus,de (2.5.d) on obtient :

$$0 = \sigma_\tau[u_\tau] - \mu\sigma_\eta|[u_\tau]| \geq -|\sigma_\tau| \cdot |[u_\tau]| - \mu\sigma_\eta|[u_\tau]| \geq -|[u_\tau]|(|\sigma_\tau| + \mu\sigma_\eta) \geq 0$$

donc

$$-|[u_\tau]|(|\sigma_\tau| + \mu\sigma_\eta) = 0 \quad (2.49)$$

pour $|\sigma_\tau| < -\mu\sigma_\eta$: de (2.49), on déduire $[u_\tau] = 0$, donc (2.5.e) vérifie.

pour $|\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\eta$: de (2.48), on déduire

$$\sigma_\tau[u_\tau] = \mu\sigma_\eta|[u_\tau]| = -|\sigma_\tau| \cdot |[u_\tau]|$$

donc on déduire qu'il existe une constante $\lambda' \geq 0$ telle que $[u_\tau] = -\lambda'\sigma_\tau$, donc (2.5.f) vérifie. $\square$

Théorème 2.3. *Pour $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $u \in V$, si $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est une solution du $\mathbb{P}_2$, alors u est une solution du problème $\mathbb{P}_1$*

Démonstration.

On suppose que $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est une solution de (2.30), on commence par démontrer que $u \in U_{ad}$. On suppose que $u \notin U_{ad}$ et notons par $u_* = (u_*^1, u_*^2)$ la projection de u sur U_{ad} qui est caractérisée par :

$$\langle u_* - u, \nu \rangle \geq \langle u_* - u, u_* \rangle > \langle u_* - u, u \rangle \quad \forall \nu \in U_{ad}. \quad (2.50)$$

Ce qui nous permet de conclure l'existence d'un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\langle u_* - u, \nu \rangle > \alpha > \langle u_* - u, u \rangle \quad \forall \nu \in U_{ad}. \quad (2.51)$$

On introduit la fonction τ_* définie par :

$$\tau_* = (\tau_*^1, \tau_*^2) = (\varepsilon(u_*^1 - u^1), \varepsilon(u_*^2 - u^2)) \in \mathcal{H} \quad (2.52)$$

En utilisant le produit scalaire défini par (2.14), on déduit :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \varepsilon(u_*^\ell - u^\ell), \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} > \alpha > \sum_{\ell=2}^2 \langle \varepsilon(u_*^\ell - u^\ell), \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \nu \in U_{ad}.$$

Et de (2.5.b), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} > \alpha > \sum_{\ell=2}^2 \langle \tau_*^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \nu \in U_{ad}. \quad (2.53)$$

Et, en prenant $\nu = 0 \in U_{ad}$ dans (2.53), il vient :

$$\alpha < 0. \quad (2.54)$$

Il est aisé de vérifier que

$$\langle \tau_*^1, \varepsilon(\nu^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \varepsilon(\nu^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0 \quad \forall \nu \in U_{ad}. \quad (2.55)$$

En effet, on suppose qu'il existe $\nu_* = (\nu_*^1, \nu_*^2) \in U_{ad}$ tel que :

$$\langle \tau_*^1, \varepsilon(\nu_*^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \varepsilon(\nu_*^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} < 0 \quad (2.56)$$

puisque $\beta \cdot \nu \in U_{ad} : \forall \beta > 0$, si on remplace $\nu = \beta \cdot \nu_*$, dans (2.53), il vient :

$$\beta(\langle \tau_*^1, \varepsilon(\nu_*^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \varepsilon(\nu_*^2) \rangle_{\mathcal{H}^2}) > \alpha \quad \forall \beta > 0$$

Et en faisant tendre β vers $+\infty$ avec (2.56), on déduit que $\alpha \leq -\infty$, ceci constitue une contradiction avec le fait que α est un réel. On déduit :

$$\langle \tau_*^1, \varepsilon(\nu^1) \rangle_{\mathcal{H}^1} + \langle \tau_*^2, \varepsilon(\nu^2) \rangle_{\mathcal{H}^2} \geq 0 \quad \forall \nu \in U_{ad}$$

maintenant en utilisant (2.30), (2.19) on déduit :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V \quad \forall \nu \in U_{ad}, \quad (2.57)$$

et, en utilisant (2.55) on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) \geq 0 + \langle \varphi, \nu \rangle_V \quad \forall \nu \in U_{ad},$$

donc :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell + \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) \geq \langle \varphi, \nu \rangle_V \quad \forall \nu \in U_{ad},$$

en disant

$$\tau_* + \sigma \in \Sigma_{ad}(\sigma). \quad (2.58)$$

Choisir $\tau = \tau_* + \sigma \in \Sigma_{ad}(\sigma)$ dans (2.30), et $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$ on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0, \quad (2.59)$$

en utilisant maintenant (2.53) et $\alpha < 0$ nous trouvons

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tau_*^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} < 0 \quad (2.60)$$

Les relations (2.59) et (2.60) constituent une contradiction, on déduit alors que $u \in U_{ad}$.

Il reste à prouver l'inégalité donnée en (2.39).

En utilisant le théorème de représentation de Riesz, nous définissons l'opérateur non linéaire $R : V \rightarrow V$ par

$$\langle R\nu, \omega \rangle_V = \sum_{\ell=1}^2 \langle F^\ell(\varepsilon(\nu^\ell)), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell}.$$

Alors des hypothèses (2.6) sur F^ℓ impliquent que R est strictement monotone, coercitif et lipchitzien opérateur, d'une part le fonctionnel $j(\sigma, \cdot)$ est propre, convexe et continue du bas sur V Puis résulte de la théorie des inégalités variationnelles elliptiques [5] du deuxième espèce, nous avons l'existence de $\bar{\tau} = (\bar{\tau}^1, \bar{\tau}^2) \in \mathcal{H}$ telle que

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \bar{\tau}^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle_V \quad \forall \nu \in V, \quad (2.61)$$

prendre $\nu = 2u$ et $\nu = 0$ dans (2.61), alors

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \bar{\tau}^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) = \langle \varphi, u \rangle_V, \quad (2.62)$$

soustraire (2.62) de (2.61), cela signifie que $\bar{\tau} \in \Sigma_{ad}(\sigma)$.

Par conséquent, de (2.30) et $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} &\geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \\ \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} &\geq \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \\ \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) &\geq \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u) \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}, \end{aligned}$$

de (2.62) on obtient

$$\langle \varphi, u \rangle_V \geq \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u).$$

L'inégalité inverse suivre de (2.19) puisque $\sigma \in \Sigma_{ad}(\sigma)$ et $u \in U_{ad}$.

Par conséquent, nous conclusions que

$$\langle \varphi, u \rangle_V = \sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, u). \quad (2.63)$$

En utilisant encore (2.19), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \sigma^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\sigma, \nu) - j(\sigma, u) \geq \langle \varphi, \nu - u \rangle \quad \forall \nu \in U_{ad}, \quad (2.64)$$

et $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ on déduit que u est une solution de le problème $\mathbb{P}_1$ □

Théorème 2.2 et Théorème 2.3, permettent de déduire ce qui suit :

Corollaire 2.1. *Supposons l'hypothèse (2.6), (2.7) et (2.8). Soit $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ est une solution du problème variationnel $\mathbb{P}_2$ et , $u = (u^1, u^2) \in V$ est donné par $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $\ell = 1, 2$. Alors (u, σ) est une solution du problème $\mathbb{P}$.*

De plus, le théorème 2.2 et le lemme 2.2 permettent de déduire ce qui suit :

Corollaire 2.2. *Supposons l'hypothèse (2.6), (2.7) et (2.8). Soit $u = (u^1, u^2) \in V$ est une solution du problème $\mathbb{P}_1$, et $\sigma^\ell = F^\ell(\varepsilon(u^\ell))$, $\ell = 1, 2$. On a $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ une solution du problème $\mathbb{P}_2$*

2.3 Existence et unicité de la solution

Le but de ce paragraphe est de prouver quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions des problèmes variationnels $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, et de préciser le lien entre ces problèmes.

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses (2.6) - (2.8) et (2.7). Alors il existe $C_0 > 0$ qui ne dépend que de Ω^ℓ , Γ^ℓ et F^ℓ , $\ell = 1, 2$ tel que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C_0$ alors il existe une solution unique (u, σ) du problème $\mathbb{P}$. De plus, la solution satisfait*

$$u \in V, \quad \sigma \in \mathcal{H}_1.$$

Proposition 2.1. Soit $\theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ et (u_θ^1, u_θ^2) la solution de (2.37), alors :

$$(F^1(\varepsilon(u_\theta^1)), F^2(\varepsilon(u_\theta^2))) \in \widehat{\mathcal{H}}_1. \quad (2.65)$$

Démonstration. Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ où $w^\ell \in D(\Omega^\ell \cup \Gamma_3)^N$ et $[\omega\eta] = 0$ sur Γ_3 . Alors $\nu = u \pm \omega \in U_{ad}$ dans (2.37) donne :

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell)), \varepsilon(\omega^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi, \omega \rangle,$$

et en utilisant (2.20), avec $\omega^\ell \eta^\ell = -\omega^{3-\ell} \eta^{3-\ell}$ sur Γ_3 on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell)) \varepsilon(\omega^\ell) d\Omega^\ell = \int_{\Omega^\ell} f^\ell \omega^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell \omega^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell,$$

en appliquant la formule de green on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell)) \varepsilon(\omega^\ell) d\Omega^\ell = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell)) \varepsilon(\omega^\ell) d\Omega^\ell - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \eta^\ell \omega^\ell \eta^\ell d\Gamma^\ell.$$

Alors

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell)) \eta^\ell \omega^\ell \eta^\ell d\Gamma_3 = 0.$$

On a

$$\int_{\Gamma_3} \{F^1(\varepsilon(u_\theta^1)) \eta^1 - F^2(\varepsilon(u_\theta^2)) \eta^2\} \omega^1 \eta^1 d\Gamma_3 = 0.$$

Par conséquent, nous concluons que $F^1(\varepsilon(u_\theta^1)) \eta^1 = F^2(\varepsilon(u_\theta^2)) \eta^2$ sur Γ_3

Alors (2.65). □

Nous considérons maintenant l'opérateur $A : \widehat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_1$ défini par

$$A(\theta) = (F^1(\varepsilon(u_\theta^1)), F^2(\varepsilon(u_\theta^2))). \quad (2.66)$$

On a les résultats suivants.

Proposition 2.2. Il existe $C_0 > 0$, tel que, $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C_0$, L'opérateur A admet un point fixe unique $\theta^* \in \widehat{\mathcal{H}}_1$.

Démonstration. Soit $\theta_i \in \widehat{\mathcal{H}}_1$, pour $i = 1, 2$ et soit u_i les solutions de (2.37), on a

$$\begin{cases} a(u_1, u_2 - u_1) + j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) \geq \langle \varphi, u_2 - u_1 \rangle \\ a(u_2, u_1 - u_2) + j(\theta_2, u_1) - j(\theta_2, u_2) \geq \langle \varphi, u_1 - u_2 \rangle. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant (2.20), on déduit que

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} (F^\ell(\varepsilon(u_1^\ell)) - F^\ell(\varepsilon(u_2^\ell)))(\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)) d\Omega^\ell \leq \\ j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) + j(\theta_2, u_1) - j(\theta_2, u_2) \end{cases} \quad (2.67)$$

De l'inégalité de Korn et (2.6), donner

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle F^\ell(\varepsilon(u_1^\ell)) - F^\ell(\varepsilon(u_2^\ell)), \varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell) \rangle \geq C_1 \|u_1 - u_2\|_V^2. \quad (2.68)$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) + j(\theta_2, u_1) - j(\theta_2, u_2) = \int_{\Gamma_3} \mu(\theta_{1\eta} - \theta_{2\eta})(|[u_{1\tau}]| - |[u_{2\tau}]|) d\Gamma_3,$$

pour que

$$j(\theta_1, u_2) - j(\theta_1, u_1) + j(\theta_2, u_1) - j(\theta_2, u_2) \leq C_2 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\mathcal{H}_1} \cdot \|u_1 - u_2\|_V$$

et en utilisant (2.67), (2.68) avec le théorème de trace, on a

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq C_3 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\mathcal{H}_1}. \quad (2.69)$$

En mettant (2.6) et (2.67), cela donne :

$$\|A\theta_1 - A\theta_2\|_{\mathcal{H}_1}^2 \leq C_4 \sum_{\ell=1}^2 \|\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)\|_{\mathcal{H}_1^\ell}^2. \quad (2.70)$$

De plus, de (2.69) et (2.70), on obtient :

$$\|A\theta_1 - A\theta_2\|_{\mathcal{H}_1} \leq C_5 \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\theta_1 - \theta_2\|_{\mathcal{H}_1},$$

on concluons que l'opérateur A est une contraction si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \frac{1}{C_5}$. Par le théorème du point fixe de Banach, on obtient que cet opérateur a un point fixe unique $\theta^* \in \widehat{\mathcal{H}}_1$. $\square$

Proposition 2.3. *Pour chaque $\theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1$, il existe une solution unique $\sigma_\theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1$, tel que*

$$\sigma_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta) \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle (F^\ell)^{-1}(\sigma_\theta), \tau^\ell - \sigma_\theta^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta). \quad (2.71)$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \widehat{\mathcal{H}}_1$, il est facile de vérifier que l'application

$$\tau \longmapsto \sum_{\ell=1}^2 \langle (F^\ell)^{-1}(\sigma^\ell), \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell}$$

est une forme linéaire continue sur $\widehat{\mathcal{H}}_1$ (pour σ fixe). De plus, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, on pouvons définir l'opérateur $E : \widehat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}_1$ par la relation

$$\langle E\sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \sum_{\ell=1}^2 \langle (F^\ell)^{-1}(\sigma^\ell), \tau^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \sigma, \tau \in \widehat{\mathcal{H}}_1. \quad (2.72)$$

En gardant à l'esprit (2.6) et l'inégalité de Korn, on déduisons que l'opérateur E est fortement monotone et Lipschitz continuous sur E . Aussi, $\Sigma_{ad}(\theta)$ est un sous-ensemble fermé, convexe et non vide de $\widehat{\mathcal{H}}_1$.

D'après le théorème de *Lions, Stampacchia*, on obtient l'existence et l'unicité de l'élément $\sigma_\theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1$ tel que

$$\sigma_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta) \quad \langle E\sigma_\theta, \tau - \sigma_\theta \rangle_V \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Alore

$$\sigma_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta) \quad \sum_{\ell=1}^2 \langle (F^\ell)^{-1}(\sigma_\theta), \tau^\ell - \sigma_\theta^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta).$$

□

Soit considérons maintenant l'opérateur $B : \widehat{\mathcal{H}}_1 \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_1$ défini par

$$B\theta = \sigma_\theta : \quad \forall \theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1 \quad (2.73)$$

Démonstration de Théorème 2.4 .

Existence. Soit $u^* = (u^{*1}, u^{*2}) \in V$ les solutions de (2.37) avec $\theta = \theta^*$.

Prendre $\nu = 0 \in V$ et $\nu = 2u^* \in V$ dans (2.37) on obtient

$$a(u^*, u^*) + j(\theta^*, u^*) = \langle \varphi, u^* \rangle, \quad (2.74)$$

et de (2.37), (2.74), on a

$$a(u^*, \nu^*) + j(\theta^*, \nu^*) \geq \langle \varphi, \nu^* \rangle \quad \forall \nu \in U_{ad}, \quad (2.75)$$

de (2.19), (2.75) et $\theta^* = A(\theta^*)$, il suit que

$$\theta^* \in \Sigma_{ad}(\theta^*) \quad (2.76)$$

Prendre maintenant $\nu = u \pm \phi \in V$ avec $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ et $\phi^\ell \in (D(\Omega^\ell))^N$, $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (2.37), il suit que :

$$\langle F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell)), \varepsilon(\phi^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} = \langle \varphi^\ell, \phi^\ell \rangle. \quad (2.77)$$

De plus, de (2.16), (2.77) et en appliquant la formule *Green*, on obtient

$$-Div(F^\ell(\varepsilon(u_\theta^\ell))) = f^\ell \quad \text{sur } \Omega^\ell. \quad (2.78)$$

En utilisant (2.74) et (2.16), on déduisons que

$$\begin{aligned} & - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} Div(F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell}))) \cdot u^{*\ell} d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^\ell} F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell})) \eta^\ell \cdot u^{*\ell} \eta^\ell d\Gamma^\ell + j(\theta^*, u^*) \\ & = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f^\ell \cdot u^{*\ell} d\Omega^\ell + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell \cdot u^{*\ell} \eta^\ell d\Gamma_2^\ell. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (2.78) et $u^*|_{\Gamma_1^\ell} \equiv 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \theta^* \eta \cdot [u^* \eta] d\Gamma_3 + j(\theta^*, u^*) &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell \cdot u^{*\ell} \eta^\ell d\Gamma_2^\ell - \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell})) \eta^\ell \cdot u^{*\ell} \eta^\ell d\Gamma_2^\ell \end{aligned} \quad (2.79)$$

prendre $\nu = u \pm \phi \in V$ avec $\phi = (\phi^1, \phi^2) \in V$, $\phi^{3-\ell} = 0$ et $\phi^\ell \eta^\ell = 0$ sur $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_3^\ell$ dans (2.37), il suit que

$$\int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell})) \cdot \varepsilon(\phi^\ell) d\Omega^\ell = \int_{\Omega^\ell} f^\ell \phi^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_2^\ell} g^\ell \cdot \phi^\ell \eta^\ell d\Gamma_2^\ell \quad (2.80)$$

en appliquant la formule *Green* dans (2.80) et en utilisant (2.78), on obtient

$$F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell})) \eta^\ell = g^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell. \quad (2.81)$$

En combinant (2.79) et (2.81), il suit que

$$\int_{\Gamma_3} \theta^* \eta \cdot [u^* \eta] d\Gamma_3 = -j(\theta^*, u^*), \quad (2.82)$$

et, pour tout $\tau \in \Sigma_{ad}(\theta^*)$

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \tau^\ell \cdot \varepsilon(u^{*\ell}) d\Omega^\ell \geq \langle \varphi, u^* \rangle - j(\theta^*, u^*). \quad (2.83)$$

En utilisant (2.78) et (2.81) avec $F^1(\varepsilon(u^{*1}))\eta^1 = F^2(\varepsilon(u^{*2}))\eta^2$ sur Γ_3 , on déduit que

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell})) \cdot \varepsilon(u^{*\ell}) d\Omega^\ell = \langle \varphi, u^* \rangle + \int_{\Gamma_3} \theta^* \eta \cdot [u^* \eta] d\Gamma_3. \quad (2.84)$$

De plus, de (2.83), (2.84) et (2.82), on déduit l'inégalité dans (2.30) avec prouve que θ^* est une solution de problème $\mathbb{P}_2$.

Il suit du corollaire 2.1 que (u^*, θ^*) est une solution au problème $\mathbb{P}$.

Unicité. Pour prouver l'unicité de la solution soit (u^*, θ^*) est une solution du problème $\mathbb{P}$ obtenu ci-dessus et (u, σ) est une autre solution telle que $u \in V$ et $\sigma \in \widehat{\mathcal{H}}_1$.

pour tous $\theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1$. Par conséquent, en choisissant $\tilde{\sigma}_\theta = A\theta$ et en utilisant (2.37) et (2.66), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tilde{\sigma}_\theta^\ell, \varepsilon(\nu^\ell) - \varepsilon(u_\theta^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\theta, \nu) - j(\theta, u_\theta) \geq \langle \varphi, \nu - u_\theta \rangle_V, \quad \forall \nu \in V. \quad (2.85)$$

Prendre $\nu = 2u_\theta$ et $\nu = 0$ dans (2.85), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle \tilde{\sigma}_\theta^\ell, \varepsilon(u_\theta^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} + j(\theta, u_\theta) = \langle \varphi, u_\theta \rangle_V. \quad (2.86)$$

En utilisant maintenant (2.85) et (2.86), on a

$$\tilde{\sigma}_\theta \in \Sigma_{ad}(\theta), \quad (2.87)$$

et de (2.66), (2.86) et (2.19) il suit que

$$\sum_{\ell=1}^2 \langle (F^\ell)^{-1}(\tilde{\sigma}_\theta^\ell), \tau^\ell - \tilde{\sigma}_\theta^\ell \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta). \quad (2.88)$$

De plus, de (2.87) et (2.88), il en résulte que $\tilde{\sigma}_\theta$ est une solution du problème (2.71). et par l'unicité de la solution, on déduit $\tilde{\sigma}_\theta = \sigma_\theta$, alors on a

$$A\theta = B\theta : \quad \forall \theta \in \widehat{\mathcal{H}}_1. \quad (2.89)$$

En utilisant maintenant le lemme 2.2, avec

$$\theta^* = (F^1(\varepsilon(u^{*1})), F^2(\varepsilon(u^{*2})))$$

et

$$\sigma = (F^1(\varepsilon(u^1)), F^2(\varepsilon(u^2))),$$

telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta^* \in \Sigma_{ad}(\theta^*), & \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \theta^{*\ell}, (F^\ell)^{-1}(\theta^{*\ell}) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\theta^*) \\ \sigma \in \Sigma_{ad}(\sigma), & \sum_{\ell=1}^2 \langle \tau^\ell - \sigma^\ell, (F^\ell)^{-1}(\sigma^\ell) \rangle_{\mathcal{H}^\ell} \geq 0, \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(\sigma) \end{array} \right. \quad (2.90)$$

et de (2.71) et (2.73), on obtient

$$B\theta^* = \theta^*, \quad B\sigma = \sigma. \quad (2.91)$$

De plus, de (2.91) et (2.89) et de la proposition 2.2, il suit que

$$\theta^* = \sigma. \quad (2.92)$$

Par conséquent

$$F^\ell(\varepsilon(u^{*\ell})) = F^\ell(\varepsilon(u^\ell)) \quad \ell = 1, 2. \quad (2.93)$$

Par conséquent, par (2.6) et (2.93), on a

$$u^* = u.$$

La preuve du Théorème 2.4 est complète. □

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème non linéaire de contact avec frottement entre deux corps élastiques. La loi de comportement élastique est supposée non linéaire et le contact est modélisé avec les conditions de Signorini et la version de la loi de Coulomb de la frottement sec.

Nous avons utilisé la formule de Green, ainsi que l'inégalité de Korn pour obtenir deux formulations variationnelles de ce problème $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$, du problème considéré, où $\mathbb{P}_1$ dépend du champ de déplacement et $\mathbb{P}_2$ dépend du champ de contrainte.

Nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité, en utilisant des arguments d'inégalités variationnelles elliptiques et une propriété de point fixe, théorème de Stampachia.

Bibliographie

- [1] Amassad. A, Fabre. C, *Analysis of a Viscoelastic Unilateral Contact Problem Involving the Coulomb Friction Law*, Journal of optimizatton theory and applications : Vol. 116, No. 3, pp. 465–483, March 2003
- [2] Anca. C, *Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement*, 10/2011.
- [3] Andrews. K.L, Klarbring. A, Shilor. M, Wright. S, *A dynamical thermoviscoelastic contact problem with friction and wear*, Int. J. Engng. Sci., 35(1997), no. 14, 1291-1309.
- [4] Arezki. T, *A quasistatic unilateral contact problem with slip-dependent coefficient of friction for nonlinear elastic materials*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006(2006), No. 144, pp. 1-14.
- [5] Atkinson. K, Han. W, *Theoretical numerical analysis a functional anlysis framework*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [6] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [7] Capatina. A, *Variational inequalities and frictional contact problems (Advances in mechanics and mathematics 31)*. New York, NY : Springer, 2014.
- [8] Capatina. A, *A quasistatic frictional contact problem with normal compliance and unilateral constraint*, Mathematics and Mechanics of Solids 2017, Vol. 22(11) 2135–2155
- [9] Drabla. S, Sofonea. M and Teniou. B, *Analysis of a frictionless contact problem for elastic bodies*, Annales polonici mathematici LXIX.1 (1998), pp. 75-88
- [10] Duvaut.G, Lions.J.L, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod 1972
- [11] Hadj Ammar. T, *Etude theorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables*, Mémoire de Magister, Univ. Ouargla, 2006.

- [12] Hadj ammar. T, *Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables*, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, (2015).
- [13] Hadj Ammar. T and B. Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babe,s-Bolyai Math.57 (2012), No. 3, 427-444.
- [14] Huston. V. C. L. and Pym, J. S., *Application of functional analysis and operator theory*. Academic Press London, New York/Toronto/Sydney (1980)
- [15] Khenous. H, *Problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en élasto-statique et élastodynamique. Etude mathématique et résolution numérique*. Mémoire de doctorat, INSA de Toulouse, 2005. Français.
- [16] Kikuchi. N, Oden, J.T, *Contact Problems in Elasticity, A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, PA, 1988.
- [17] Martins. J.A.C, Oden. T.J, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, Nonlin. Anal., 11(1987), no. 3, 407-428.
- [18] Minazzo. C, Rider. K, *Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles*.
- [19] Nečas. J, Jarušek. J, Haslinger. J, *On the solution of the variational inequality to the signorini problem with small friction*, Boll. U.M.I., 5(17B)(1980), 796-811.
- [20] Sofonea. M, Matei. A, *Variational inequalities with applications : A study of antiplane frictional contact problems (Advances in mechanics and mathematics 18)*. Springer, 2009.
- [21] Stromberg. N, Johansson. L, Klarbring. A, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, 33(1996), no. 13, 1817-1836.

Résumé

Ce mémoire contient une Etude théorique d'un problème de contact de Signorini avec frottement de coulomb entre deux corps élastiques. Cette étude se compose en deux chapitres. Le premier chapitre considère la formulation mathématique de problème de contact et rappel d'analyse. Le deuxième chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section considère la forme mathématique cet problème noté par P , par l'utilisation de la forme de Green et l'inégalité de Korn dans le deuxième section on obtient à deux forme variationnelle, P_1 qui dépend uniquement de déplacement et P_2 qui dépend uniquement de contrainte. Enfin, dans la troisième section on étudie l'existence et l'unicité avec le lien entre P_1 , P_2 et P .

Mots-Clés : déplacement, contrainte, existence, unicité, frottement de coulomb, loi de comportement élastique, problèmes de contact, le point fixe

Abstract

This memory contains a theoretically study of a signorini contact problem with coulomb friction between two elastic bodies. This study consists of two chapters. The first chapter considers the mathematical formulation of contact problem and return analysis. The second chapter is divided into three sections. The first section considers the mathematical form this problem noted by P . one uses the Green shape and the inequality of Korn one also gets to two shapes variationnelle P_1 , that depends solely on the displacement and P_2 that depend solely on constraint in the second section. Finally, in the third section, one studies the existence and the uniqueness with the tie between P , P_1 and P_2 .

Words keys : displacement, constraint, existence, uniqueness, coulomb friction, law of behavior elastic, fixed point.

ملخص

هدف هذه المذكرة هو دراسة نظرية مسألة الإتصال مع الإحتكاك كولوم بين جسمين مرنين, تتكون المذكرة من فصلين, تطرقنا في الفصل الأول إلى بعض الوسائل الرياضية اللازمة في هذه المذكرة, أما في الفصل الثاني مكون من ثلاثة أجزاء, الجزء الأول نعتبر فيه الشكل الرياضي لهذه الدراسة ويرمز له بالرمز P , ثم باستعمال شكل قرين ومتراجحة كورن في الجزء الثاني فنحصل على شكلين متغيرين P_1 متعلق بالحركة فقط و P_2 متعلق بالكونترانت فقط, وفي الجزء الثالث والأخير ندرس مسألة الوجود والوحدانية والعلاقة بين P_1 , P_2 و P .

الكلمات المفتاحية : الحركة, كونترانت, الوجود, الوحدانية, إحتكاك كولوم, قانون السلوك المرن,

النقطة الثابتة.